

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 13

Abgabe am 30. Januar 2017 bis 10:15 Uhr

50. Es sei \mathbb{F}_q der Körper mit q Elementen. Ein *Quadrat* in \mathbb{F}_q ist ein Element der Form a^2 , für ein $a \in \mathbb{F}_q$. Zeigen Sie:
- (a) Falls q gerade ist, dann ist jedes Element in \mathbb{F}_q ein Quadrat in \mathbb{F}_q .
 - (b) Falls q ungerade ist, dann sind genau die Hälfte aller Elemente ungleich Null Quadrate in \mathbb{F}_q .
 - (c) Jedes Element in \mathbb{F}_q ist eine Summe von zwei Quadraten.
51. Beweisen Sie die folgende Umkehrung von Satz 5.1.5 aus der Vorlesung: Es sei K ein Körper. Falls K^* zyklisch ist, dann ist K endlich. (*Hinweis*: Einheitswurzeln)
52. Es sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie, dass jede endliche Körpererweiterung $K \subset L$ mit $p \nmid [L : K]$ separabel ist.
53. Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 = 2$ und $\beta^4 = 5$.
- (a) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.
 - (b) Zeigen Sie, dass $\gamma = \alpha\beta$ ein primitives Element für diese Erweiterung ist.
 - (c) Folgern Sie, dass das Polynom $x^{12} - 2000$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.