Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität
dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (LEHRAMT)

Blatt 13

Abgabe am 30. Januar 2017 bis 10:15 Uhr

50. Es sei $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen. Ein *Quadrat* in $\mathbb{F}_q$ ist ein Element der Form a^2, für ein $a \in \mathbb{F}_q$. Zeigen Sie:

(a) Falls q gerade ist, dann ist jedes Element in $\mathbb{F}_q$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_q$.

(b) Falls q ungerade ist, dann sind genau die Hälfte aller Elemente ungleich Null Quadrate in $\mathbb{F}_q$.

(c) Jedes Element in $\mathbb{F}_q$ ist eine Summe von zwei Quadraten.

51. Beweisen Sie die folgende Umkehrung von Satz 5.1.5 aus der Vorlesung: Es sei K ein Körper. Falls K^* zyklisch ist, dann ist K endlich. (*Hinweis:* Einheitswurzeln)

52. Es sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie, dass jede endliche Körpererweiterung $K \subset L$ mit $p \nmid [L : K]$ separabel ist.

53. Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 = 2$ und $\beta^4 = 5$.

(a) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\gamma = \alpha\beta$ ein primitives Element für diese Erweiterung ist.

(c) Folgern Sie, dass das Polynom $x^{12} - 2000$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.