Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität
dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 14
ohne Abgabe

54. (a) Zeigen Sie, dass das Polynom $f = x^3 + 6x^2 - 12x + 2$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.
(b) Zeigen Sie, dass f auch über $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ irreduzibel ist.

55. Sei $f = x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

(a) Beweisen Sie, dass der Ring $K = \mathbb{F}_2[x]/\langle f \rangle$ ein Körper ist.
(b) Finden Sie einen Erzeuger der Gruppe K^*.
(c) Berechnen Sie das Inverse von $x + \langle f \rangle$ in K.

56. Sei $\zeta = (1\,2 \cdots n) \in S_n$ ein Zykel der Länge n und sei $\sigma \in S_n$. Zeigen Sie, dass $\zeta\sigma = \sigma\zeta$ genau dann gilt, wenn $\sigma = \zeta^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Stimmt die gleiche Aussage auch für einen Zykel der Länge $n - 1$?

57. Es sei G eine Gruppe und seien H und K zwei Untergruppen von G. Zeigen Sie: Für $x, y \in G$ ist $xH \cap yK$ entweder leer oder eine Linksnebenklasse von $H \cap K$ in G.

58. Es sei $L = \mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ mit $\alpha^3 = 2$ und $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Zeigen Sie:

(a) Die Erweiterung $\mathbb{Q} \subset L$ hat Grad 6 und eine $\mathbb{Q}$-Basis von L ist durch $1, \alpha, \alpha^2, \omega, \omega\alpha, \omega\alpha^2$ gegeben. (*Hinweis:* Berechnen Sie als erstes ω^2 und ω^3.)
(b) Das Element $\gamma = \alpha + \omega$ ist ein primitives Element von $\mathbb{Q} \subset L$.
(*Vorschlag:* Zeigen Sie, dass $1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.)