Prof. Dr. Daniel Plaumann
M. Sc. Roland Piontek
Wintersemester 2017/2018

technische universität dortmund

# ERGÄNZENDE ÜBUNGSAUFGABEN ZUR REELLEN ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE

Es sei immer $R$ ein reell abgeschlossener Körper.

**E1.** Bestimmen Sie alle Grammatrizen des Polynoms

$$p \;=\; 2x^4 - 2x^3y - 2x^3 + 2x^2y^2 - 4x^2y + 2x^2 + 8.$$

Finden Sie eine positiv semidefinite Grammatrix und eine Darstellung von $p$ als Summe von drei Quadraten in $R[x, y]$.
*Hinweis:* Sie müssen die Grammatrix nicht mit allen Monomen vom Grad 2 ansetzen- vgl. Kor. 2.2.11.

**E2.** Es seien $a, b \in R$, $b \neq 0$ und $h = (t - a)^2 + b^2$. Zeigen Sie, dass

$$R[t]/\langle h\rangle \cong R[\sqrt{-1}]$$

gilt. (Lesen Sie auch noch einmal nach, was diese Aussage für das reelle Spektrum von $R[t]$ bedeutet; siehe Beispiel 3.1.15.)

**E3.** Es sei $A = R[x, y]$, $g \in R[t]$ und

$$P_g = \{f \in A \mid \exists \varepsilon > 0\colon f(t, g(t)) \geqslant 0 \text{ für alle } 0 < t < \varepsilon\}.$$

Zeigen Sie, dass $P_g$ eine Anordnung von $A$ ist mit $\operatorname{supp}(P_g) = \langle y - g(x)\rangle$.
(Um die Aussage über den Träger genau zu begründen, braucht man etwas algebraische Geometrie. *Zusatz*: Beschreiben Sie so konkret wie möglich die Menge aller Anordnungen von $A$ mit Träger $\langle y - x^2\rangle$.)

**E4.** Es sei $A = \mathbb{R}[x, y]$ und

$$P_{\exp} = \{f \in A \mid \exists \varepsilon > 0\colon f(t, e^t) \geqslant 0 \text{ für alle } 0 < t < \varepsilon\}.$$

Zeigen Sie, dass $P_{\exp}$ eine Anordnung von $A$ ist mit $\operatorname{supp}(P_{\exp}) = \langle 0\rangle$.
(*Hinweis.* Sie dürfen verwenden, dass ein Polynom in $A \setminus \{0\}$ nur in endlich vielen Punkten des Graphen $\{(t, e^t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ der Exponentialfunktion verschwinden kann.)

**E5.** Es sei $R/\mathbb{R}$ ein nicht-archimedischer reell abgeschlossener Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ und sei $\varepsilon \in R$ positiv und infinitesimal (d.h. $\varepsilon^{-1} > \mathbb{N}$).

(a) Zeigen Sie: Das Polynom $1 - t^2 + \varepsilon$ ist positiv auf dem Intervall $[-1, 1]$, liegt aber nicht in der Präordnung $T\big((1 - t^2)^3\big) \subset R[t]$. (*Hinweis.* Aufgabe 12).

(b) Sei $p \in \mathbb{R}[x,y]$ ein Polynom, das keine Quadratsumme ist. Zeigen Sie, dass

$$p(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})$$

nicht in der Präordnung $T(1-x^2-y^2) \subset R[x,y]$ liegt. (*Hinweis.* Substituieren Sie $x = \varepsilon u$ und $y = \varepsilon v$.)

**E6.** Wir betrachten ein semidefinites Optimierungsproblem und sein Dual:

$$\left.\begin{array}{rll} \text{Finde} & p^* = \inf\langle M, A\rangle & \\ \text{unter} & \langle M_i, A\rangle = \beta_i & \text{für i=1,...,m} \\ & A \succeq 0 & \end{array}\right\} \text{ für } A \in \mathrm{Sym}_d(\mathbb{R}) \qquad (P)$$

und

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Finde} & d^* = \sup\langle \lambda, \beta\rangle \\ \text{unter} & M - \sum_{i=1}^m \lambda_i M_i \succeq 0 \end{array}\right\} \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}^m \qquad (D)$$

(a) Sei $n = 2$, $m = 1$ und

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = 1.$$

Zeigen Sie, dass $p^* = d^* = 0$ gilt, dass $\lambda_1 = 0$ ein optimaler Punkt von (D) ist und dass (P) keinen optimalen Punkt besitzt.

(b) Sei $n = 2$, $m = 1$ und

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = 0.$$

Zeigen Sie, dass $p^* = 0$ gilt, dass (P) einen optimalen Punkt besitzt, jedoch (D) keinen zulässigen Punkt (und damit $d^* = -\infty$).

**E7.** Seien (P) und (D) wie in der vorigen Aufgabe. Sei $n = 3$, $m = 4$ und

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass (P) und (D) beide beschränkt sind und $p^*$ und $d^*$ angenommen werden, dass aber dennoch $p^* > d^*$ gilt.

**E8.** Beweisen Sie den folgenden Trennungssatz für konvexe Mengen: Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunkte konvexe Teilmengen mit $A$ abgeschlossen und $B$ kompakt. Dann gibt es $v \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle x, v\rangle < c < \langle y, v\rangle$$

für alle $x \in A$ und alle $y \in B$.

(*Vorschlag:* Beweisen Sie als erstes, dass es Punkte $x_0 \in A$ und $y_0 \in B$ gibt mit $\|x_0 - y_0\| \leqslant \|x - y\|$ für alle $x \in A$ und $y \in B$.)

**E9.** Es sei $e = (1, 0, \dots, 0)$ und sei $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d$ mit $f(e) \neq 0$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ sind alle Nullstellen von $f(a - te)$ in $t$ reell. (Das heißt, $f$ ist hyperbolisch bezüglich $e$.)
(ii) Für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ sind alle Nullstellen von $f(sa - e)$ in $s$ reell.
(iii) Für jedes $a \in \{e\}^\perp$ sind alle Nullstellen von $f(a - te)$ in $t$ reell.

**E10.** Sei $V_d \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ der Vektorraum aller homogenen Polynome vom Grad $d$ und sei $e \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome in $V_d$, die hyperbolisch bezüglich $e$ sind, einen inneren Punkt besitzt. (*Hinweis:* Die Nullstellen eines Polynoms in einer Variablen hängen stetig von den Koeffizienten ab.)

**E11.** Sei $f = x^3 - x^2z - xz^2 - y^2z + z^3$.

(a) Finden Sie reelle symmetrische $3 \times 3$-Matrizen $A$ und $B$ mit $f = \det(M)$ für $M = xA + yB + zI$.
(b) Verwenden Sie Software Ihrer Wahl, um die reellen Punkte der Kurven zu plotten, die in der Ebene $z = 1$ durch folgende Polynome gegeben sind:

$$f, \quad \det(M'_{11}), \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

(Dabei bezeichnet $M'_{11}$ die Matrix, die aus $M$ durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht.)

**E12.** Sei $f = x^3 - x^2z - xz^2 - y^2z + z^3$ wie in der vorangehenden Aufgabe. Bestimmen Sie die multivariate Hermite-Matrix von $f$ bezüglich $z$ und zeigen Sie, dass diese global positiv semidefinit ist.

**E13.** Bestimmen Sie eine Darstellung des Kegels $K = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^4 \geqslant b^4 + c^4,\ a \geqslant 0\}$ als spektraedrischen Schatten (direkt, nicht mit Hilfe von Beispiel 6.4.6).
(*Hinweis:* Schreiben Sie $\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^2 \mid vw \geqslant u^2, w \geqslant 0\}$ als spektraedrischen Kegel. Was hilft das?)

**E14.** Vervollständigen Sie die Argumente in Beispiel 6.4.7 aus dem Vorlesungsskript.

**E15.** Betrachten Sie die Teilmenge $W = W_\mathbb{R}(y - x^3, x, y, 1 - y)$ von $\mathbb{R}^2$. Das ist eine Variante von Beispiel 6.4.7. (Bild!) Zeigen Sie, dass in diesem Fall die dritte Lasserre-Relaxierung (bezüglich der gegebenen Erzeuger $p_1 = y - x^3$, $p_2 = x$, $p_3 = y$, $p_4 = 1 - y$) exakt ist, d.h. also $W = \mathcal{L}_3$ (*Vorschlag:* Stellen Sie das Polynom $\ell_r = y - 3r^2x + 2r^3$ für $r \in (0, 1)$ in $M_3(p_1, \dots, p_4)$ dar. )

**E16.** Für einen konvexen Kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ sei $K^\vee = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \geqslant 0 \text{ für alle } y \in K\}$ der duale Kegel. Zeigen Sie, dass $(K^\vee)^\vee = \overline{K}$ für jeden konvexen Kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt. (*Hinweis:* Trennungssatz)