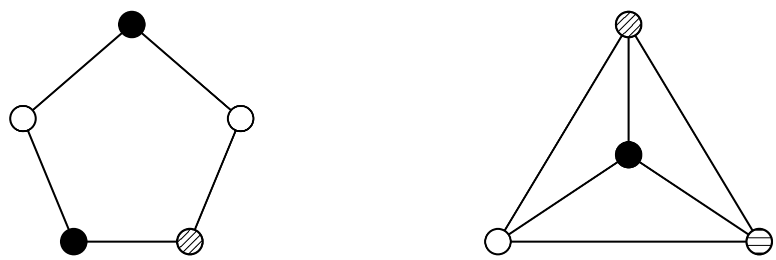
11.2. ANWENDUNG: CLIQUEN- UND FÄRBUNGSZAHL EINES GRAPHEN

Ein *Graph* (im Unterschied zu einem gerichteten Graph, was wir beim letzten Mal definiert hatten) besteht aus einer Menge N („Knoten") und einer symmetrischen Relation $E \subset N \times N$ („Kanten"). Sind $m, n \in N$ Knoten mit $(m, n) \in E$, dann sagt man, dass m und n durch eine Kante *verbunden* sind. Wie zuvor nehmen wir stets an, dass es keine Schleifen gibt, also keine Kanten, die einen Knoten mit sich selbst verbinden.

Definition 11.5. Es sei $\Gamma = (N, E)$ ein Graph.

(1) Eine *Clique* in Γ ist eine Teilmenge $C \subset N$ von Knoten derart, dass je zwei verschiedene Knoten in C durch eine Kante verbunden sind. Die Mächtigkeit einer maximalen Clique in Γ heißt die *Cliquenzahl* von Γ und wird mit $\omega(\Gamma)$ bezeichnet.
(2) Eine *k-Färbung* von Γ ist eine Abbildung $\varphi \colon N \to \{1, \ldots, k\}$ mit der Eigenschaft $\varphi(m) \neq \varphi(n)$ für alle $(m, n) \in E$. Die kleinste Zahl k derart, dass Γ eine k-Färbung besitzt heißt die *Färbungszahl* von Γ und wird mit $\chi(\Gamma)$ bezeichnet.

Es gilt $\omega(\Gamma) \leqslant \chi(\Gamma)$, da eine k-Clique keine Färbung mit weniger als k Farben haben kann.



Der berühmte *Vier-Farben-Satz* (bewiesen 1976 durch K. Appel und W. Haken) besagt, dass sich jede Landkarte (mit zusammenhängenden Ländern) durch vier Farben so färben lässt, dass je zwei Länder, die eine echte Grenze miteinander haben, verschiedene Farben haben. Formalisiert wird dies zu der Aussage, dass jeder ebene Graph (d.h. ein Graph der sich ohne Überkreuzungen von Kanten in $\mathbb{R}^2$ einbetten lässt) eine Vierfärbung besitzt. Im allgemeinen ist es rechnerisch sehr aufwendig („NP-vollständig") die Cliquen- oder Färbungszahl für einen gegebenen Graph zu ermitteln oder auch nur gut zu approximieren. Zum Beispiel kann ein ebener Graph auch eine Dreifärbung besitzen, die aber im allgemeinen nicht leicht zu finden ist. (Diese Tatsache kann man sich auch in der Kryptographie zunutze machen.) Einer der ersten wichtigen Sätze (bewiesen von L. Lovász im Jahr 1978), der die Nützlichkeit der semidefiniten Programmierung für die kombinatorische Optimierung aufgezeigt hat, besagt jedoch, dass es ein duales Paar von semidefiniten Programmen gibt, deren optimaler Wert eine Zahl $\vartheta(\Gamma)$ mit der Eigenschaft $\omega(\Gamma) \leqslant \vartheta(\Gamma) \leqslant \chi(\Gamma)$ ist. Die Funktion $\vartheta \colon \Gamma \mapsto \vartheta(\Gamma)$ heißt die *Lovászsche Theta-Funktion*[1] Wir beschreiben nun, wie das entsprechende semidefinite Programm gebaut wird:

Konstruktion 11.6. Es sei $\Gamma = (N, E)$ ein Graph mit n Knoten $N = \{1, \ldots, n\}$. Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei A_{ij} die Matrix mit $a_{ij} = a_{ji} = 1$ und alle anderen Einträge gleich 0. Sei J die $n \times n$-Matrix, deren Einträge alle gleich 1 sind und I die $n \times n$-Einheitsmatrix.

[1] Es besteht kein Zusammenhang mit den diversen Typen von Theta-Funktionen in der komplexen Analysis, Zahlentheorie und algebraischen Geometrie.

Wir definieren das folgende *Primäre Programm:*

$$
\text{(P)} \qquad \left.\begin{array}{ll}
\text{Finde} & \vartheta(\Gamma) = \sup\langle J, X\rangle = -\inf\langle -J, X\rangle \\
\text{unter} & \langle A_{ij}, X\rangle = 0 \text{ für } i < j \text{ mit } (i,j) \notin E \\
& \operatorname{tr}(X) = \langle I, X\rangle = 1 \\
& X \succeq 0
\end{array}\right\} \text{ in der Variablen } X \in \mathrm{Sym}_n .
$$

Übung 11.4. Wie sieht das duale Programm dazu aus?

Bemerkung 11.7. Das Programm (P) und sein Dual haben keine Dualitätslücke. Denn die Matrix $\frac{1}{n}I$ ist ein zulässiger Punkt von (P). Außerdem ist I positiv definit und beschreibt eine der Nebenbedingungen in (P). Nach Satz 11.3 gibt es deshalb keine Dualitätslücke.

Satz 11.8 (Lovász). *Ist $\Gamma = (N, E)$ ein Graph und (P) wie oben, dann gilt*

$$\omega(\Gamma) \leqslant \vartheta(\Gamma) \leqslant \chi(\Gamma).$$

Beweis. Als erstes kümmern wir uns um die Cliquenzahl: Es sei $W \subset N$ eine Clique und sei $k = |W|$. Sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ der Vektor

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in W \\ 0 & \text{falls } i \notin W \end{cases}$$

und setze $X = (1/k) \cdot xx^T$. Dann ist X ein zulässiger Punkt von (P) und es gilt $\langle J, X\rangle = k$ und damit $\vartheta(\Gamma) \geqslant \omega(\Gamma)$.

Jetzt kommt die Färbungszahl dran. Es sei X ein zulässiger Punkt von (P) (z.B. $X = \frac{1}{n}I$). Da X positiv semidefinit ist, gibt es nach Prop. 6.2 eine Matrix $U \in \mathrm{Mat}_n$ mit $X = U^T U$. Es seien $u_1, \dots, u_n$ die Spalten von U, so dass $\langle u_i, u_j\rangle = x_{ij}$ gilt.

Sei nun $\varphi\colon N \to \{1, \dots, k\}$ eine k-Färbung von Γ. Da X ein zulässiger Punkt ist, gilt $x_{ij} = 0$, wann immer $\varphi(i) = \varphi(j)$. Wegen $\operatorname{tr}(X) = \langle I, X\rangle = 1$ gilt außerdem

$$\sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2 = 1.$$

Für jede Farbe $1 \leqslant j \leqslant k$ definieren wir einen Vektor

$$w_j = \sum_{i:\varphi(i)=j} u_i.$$

Es gilt dann

$$||w_j||^2 = \sum_{i_1,i_2:\varphi(i_1)=\varphi(i_2)=j} \langle u_{i_1}, u_{i_2}\rangle = \sum_{i:\varphi(i)=j} ||u_i||^2,$$

die zweite Gleichheit weil die Summanden in der Mitte für $i_1 \neq i_2$ gleich 0 sind, und damit

$$\sum_{j=1}^{k} ||w_j||^2 = 1.$$

Wegen $\sum_{j=1}^{k} w_j = \sum_{i=1}^{n} u_i$ gilt außerdem

$$\langle J, X\rangle = ||\sum_{j=1}^{k} w_j||^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{k} ||w_j||\right)^2.$$

Nach der nachfolgenden Aufgabe folgt daraus nun $\langle J, X\rangle \leqslant k$ und damit $\vartheta(\Gamma) \leqslant \chi(\Gamma)$. $\square$

Übung 11.5. Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = 1$. Zeige, dass $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant \sqrt{k}$ gilt.

Übung 11.6. Es sei Γ das Fünfeck mit Knoten $1, 2, 3, 4, 5$ und Kanten $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 1)$. Zeige, dass $\omega(\Gamma) = 2$, $\chi(\Gamma) = 3$, und $\vartheta(\Gamma) = \sqrt{5}$ gelten.