Daniel Plaumann
Jens Diewald
Simone Naldi
Sommersemester 2017

technische universität dortmund

Seminar zu Algebra und Zahlentheorie

1 Allgemeine Informationen

Ziel des Seminars ist die selbständige Erarbeitung eines mathematischen Themas und seine Präsentation in einem einstündigen Vortrag. Außerdem ist eine schriftliche Ausarbeitung anzufertigen. Die wichtigsten Ziele sind:

- Zeigen Sie in Vortrag und Ausarbeitung, dass Sie das Thema verstanden haben.
- Präsentieren Sie das Thema für die Teilnehmer verständlich und in ansprechender und unterhaltsamer Weise.

1.1 Zur Vortragsvorbereitung

Die Angaben zu Ihrem Vortragsthema weiter unten geben nur einen groben Umriss vor. Sie haben einen großen Spielraum bei der Ausgestaltung. Eine sinnvolle Auswahl zu treffen, gehört mit zu Ihrer Aufgabe.

Für Ihren Vortrag haben Sie eine Gesamtzeit von gut **60 Minuten** zur Verfügung. Für das letzte Vortragsdrittel sollten Sie einen „Zeitpuffer“ einplanen, etwa Beispiele oder Bemerkungen, die man bei auftretendem Zeitmangel auch weglassen kann. Es empfiehlt sich außerdem, vor dem Vortrag vor Publikum einen Testlauf zu machen.

Eine Woche vor Ihrem Vortragstermin liefern Sie bitte ein **Vortragsmanuskript** ab. Es muss nicht gedruckt sein, aber übersichtlich gestaltet und lesbar.

Ganz wichtig: Mathematik braucht Zeit! Beginnen Sie so früh wie möglich mit der Vorbereitung und der Literaturarbeit. Wenn Sie Fragen haben, kommen Sie bitte während dieser Zeit in unsere Sprechstunden oder schreiben Sie uns eine E-Mail.

1.2 Zum Vortrag

Es genügt nicht, Ihr Manuskript wortwörtlich auf die Tafel zu übertragen. Versuchen Sie, Ihre Hörer anzusprechen. Stellen Sie an sinnvoller Stelle auch Fragen ans Publikum. Ihr Manuskript sollte Ihnen lediglich als Leitfaden und Gedächtnisstütze dienen.

Selbstverständlich müssen Sie in der Lage sein, ihre Aussagen auf Nachfrage zu begründen (auch dann, wenn in Ihrer Vorlage keine Begründung gegeben wird).

Beim Tafelanschrieb sind in erster Linie die mathematische und logische Vollständigkeit und Richtigkeit wichtig. Vergeuden Sie keine Zeit mit dem Anschreiben von unnötigem Text. Bitte verwenden Sie einen Overheadprojektor oder Beamer höchstens unterstützend (etwa für Illustrationen, Tabellen oder Zusammenfassungen). Alternativ können Sie solches Begleitmaterial auch als Handout an die Zuhörer verteilen.

1.3 Zur Vortragsausarbeitung

Die schriftliche Ausarbeitung besteht in einer überarbeiteten und komprimierten Fassung Ihres Vortragsmanuskripts und sollte **nicht länger als 3 Seiten sein** (zuzüglich eventueller Illustrationen). Die engültige Version der Ausarbeitung soll **spätestens zwei Wochen nach Ihrem Vortrag** per E-Mail an uns gesendet werden:

Daniel Plaumann	`daniel.plaumann@math.tu-dortmund.de`
Jens Diewald	`jens.diewald@math.tu-dortmund.de`
Simone Naldi	`simone.naldi@tu-dortmund.de`

Nutzen Sie die Gelegenheit, sich mit LaTeX vertraut zu machen. Falls Sie noch keine Erfahrung damit haben, können wir Ihnen eine Vorlage zur Verfügung stellen. Anleitungen für LaTeX finden sich hier:

`ftp://ftp.tu-dortmund.de/pub/local/ITMC/OnlineSkripte/wissanw/latex2007.pdf`
`https://tobi.oetiker.ch/lshort/lshort.pdf`

Gestalten Sie Ihre Ausarbeitung so, dass wir sie vervielfältigen und den anderen Teilnehmern zur Verfügung stellen können.

1.4 Zu den Arbeitsgruppen

Alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer arbeiten in Paaren oder Dreiergruppen, sollten aber individuell etwa gleich lang vortragen. Die Aufteilung ist Ihnen überlassen.

Idealerweise sollten Sie Ihr Thema nicht zu früh in Stücke schneiden, sondern zunächst gemeinsam arbeiten. Dadurch haben alle Beteiligten ein besseres Verständnis und können für die Unterteilung des Vortrags bessere Entscheidungen treffen.

2 Termine

werden in der zweiten Märzwoche per Doodle-Umfrage ermittelt.

3 Themen

Im folgenden finden Sie zu jedem Thema eine ganz kurze Beschreibung und eine Liste mit Literatur, die Sie in der Bibliothek oder zum Teil als Ebook finden können. Wir ermuntern Sie aber ausdrücklich dazu, auch selbständig nach passender Literatur zu suchen.

(1) Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. (*Drei Vorträge*)
Schon in der Antike wurde die Frage untersucht, welche Punkte in der Ebene sich aus einer gegebenen Punktmenge mit Hilfe von Zirkel und (unmarkiertem) Lineal konstruieren lassen. Ihre vollständige Beantwortung gelang erst mit Methoden der Körpertheorie. So wurde bewiesen, dass die berühmten Probleme der Antike (die Dreiteilung des Winkels, die Quadratur des Kreises und die Verdoppelung des Würfels) alle unlösbar sind.

Literatur:
- Karpfinger, C, Meyberg, K: *Algebra*, Springer Spektrum (3. Aufl. 2013)
- Bosch, S: *Algebra*, Springer (6. Aufl. 2005)
- Stillwell, J: *The four pillars of geometry*, Springer UTM (2005)
- Martin, G.E.: *Geometric constructions*, Springer UTM (1998)

Inhaltliche Ziele. Historische Einordnung; Algebraische Übersetzung der Konstruktionen in der komplexen Zahlenebene; Unlösbarkeit der drei großen antiken Probleme (mindestens eines mit Beweis); *optional:* Konstruierbarkeit der regelmäßigen n-Ecke.

(2) Quadratische Reziprozität. (*Zwei bis drei Vorträge*)
Das berühmte quadratische Reziprozitätsgesetz stellt ein Verfahren dar um zu entscheiden, ob eine Zahl modulo einer anderen ein Quadrat ist. Es wurde von Euler vermutet und zuerst von Gauß bewiesen. Heute gibt es kaum einen anderen Satz, für den so viele teils überraschende Beweise verschiedenster Art bekannt sind. In der Literaturliste wird auf einen kombinatorischen Beweis verwiesen, der sich mit einem Kartentrick erklären lässt.

Literatur:
- Forster, O: *Algorithmische Zahlentheorie*, Springer Spektrum (2. Aufl. 2015)
- Leutbecher, A: *Zahlentheorie*, Springer (1996)
- Pieper, H: *Variationen über ein zahlentheoretisches Thema von Carl Friedrich Gauß*, Springer (1977)
- Baker, M: *Zolotarev's magical proof of the Law of Quadratic Reciprocity*, `http://people.math.gatech.edu/~mbaker/pdf/zolotarev.pdf`
- Shurman, J: *Zolotarev's proof of the Law of Quadratic Reciprocity*, `http://people.reed.edu/~jerry/361/lectures/qrz.pdf`

Inhaltliche Ziele. Einführung des Legendre-Symbols und Beweis des Reziprozitätsgesetzes; Anwendung an Beispielen; *optional:* Beweis nach Solotarjow und Zusammenhang mit „Kartentricks“.

(3) Kettenbrüche (*Zwei bis drei Vorträge*)
Ein Kettenbruch ist ein Ausdruck der Form

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

mit ganzen Zahlen $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$. Jede reelle Zahl besitzt eine Kettenbruchentwicklung. An der Kettenbruchentwicklung lassen sich viele Eigenschaften einer Zahl ablesen, die aus der Dezimalbruchentwicklung nicht ersichtlich sind. Außerdem spielen Kettenbrüche in der Approximation und für verschiedene Fragen der Anwendungen eine Rolle.

Literatur:
- Forster, O: *Algorithmische Zahlentheorie*, Springer Spektrum (2. Aufl. 2015)
- Burton, D.M.: *Elementary Number Theory*, McGraw-Hill (7. Aufl. 2011)
- Rockett, A.M., Szüsz, P: *Continued Fractions*, World Scientific (1992)

Inhaltliche Ziele. Endliche und unendliche Kettenbrüche; rationale Zahlen; Konvergenz allgemeiner Kettenbrüche; Kettenbruchentwicklung von e; Fibonacci-Zahlen und goldener Schnitt; Periodische Kettenbrüche und quadratische Irrationalzahlen; *optional:* Anwendung auf die Pellsche Gleichung; Irrationalität von e und π; weitere Anwendungen und Kettenbrüche von Funktionen

(4) Quaternionen und der Vier-Quadrate-Satz von Lagrange (*Zwei Vorträge*)
Ein Satz von Lagrange besagt, dass jede natürliche Zahl eine Summe von vier Quadraten natürlicher Zahlen (oder Null) ist. Der Beweis dieses Satzes wurde von Euler stark vereinfacht, unter Benutzung einer allgemeinen Identität für das Produkt zweier Summen von vier Quadraten. Diese Formel wiederum versteht man heute am einfachsten in einem ganz anderen Kontext, nämlich über die Norm des Quaternionenschiefkörpers. Dieser wurde im 19. Jahrhundert von Hamilton entdeckt und stellt eine reell vierdimensionale Verallgemeinerung der komplexen Zahlen dar.

Literatur:
- Forster, O: *Algorithmische Zahlentheorie*, Springer Spektrum (2. Aufl. 2015)
- Ebbinghaus et al.: *Zahlen*, Springer (3. Aufl. 1991)

Inhaltliche Ziele. Historische Einordnung; Konstruktion und grundlegende Eigenschaften der Quaternionen; Zusammenhang mit der Quaternionengruppe mit acht Elementen; Beweis des Satzes von Lagrange; *optional:* Algorithmische Aspekte des Satzes von Lagrange; Weitere Anwendungen der Quaternionen, etwa in der Physik

(5) Der Große Fermatsche Satz. (*Zwei Vorträge*)
Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ hat unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen, die sogenannten pythagoräischen Zahlentripel. Der Große Satz von Fermat sagt, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n \geqslant 3$ dagegen keine ganzzahligen Lösungen mit $xyz \neq 0$ besitzt. Der Satz wurde im 17. Jahrhundert von Pierre de Fermat formuliert, aber erst 1994 von Andrew Wiles und Richard Taylor bewiesen. Der Satz selbst ist nicht sehr wichtig, aber die vielen Versuche, ihn zu beweisen, haben über die Jahrhunderte die ganze Geschichte der Algebra und Zahlentheorie geprägt. Der Beweis ist entsprechend sehr tiefliegend. Einige

Spezialfälle kann man aber mit weniger Aufwand verstehen.

Literatur:
- Schmidt, A: *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*, Springer (2007)
- Lemmermeyer, F: *Quadratische Zahlkörper: Ein Schnupperkurs*, Südwestdeutscher Verlag für Hochschulschriften (2011)
- Singh, S: *Fermat's Last Theorem*, Harper (1997)

Inhaltliche Ziele. Historische Einordnung; Vorstellen des Satzes und Reduktion auf die Fälle $n = 4$ oder n ungerade Primzahl; pythagoräische Tripel; Beweis des Satzes für $n = 4$; *optional:* Beweis des Satzes für $n = 2, 3, 5$ und $n \nmid xyz$ oder ähnliche Spezialfälle; andere einfache Beispiele für diophantische Gleichungen.

(6) Ganzheitsringe (*Zwei bis drei Vorträge*)

Ganzheitsringe in endlichen Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ verallgemeinern die bekannten ganzen Zahlen und vereinfachen in vielen Fällen die Untersuchung von algebraischen Gleichungen in den ganzen Zahlen. Insbesondere kann mithilfe der Theorie der Ganzheitsringe von quadratischen Zahlkörpern der Große Fermatsche Satz für $n = 3$ gezeigt werden.

Literatur:
- Müller-Stach, S, Piontkowski, J: *Elementare und algebraische Zahlentheorie*, Springer Spektrum (2011)
- Schmidt, A: *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*, Springer (2007)
- Lemmermeyer, F: *Quadratische Zahlkörper: Ein Schnupperkurs*, Südwestdeutscher Verlag für Hochschulschriften (2011)

Inhaltliche Ziele. Begriff des Ganzheitsrings in einem Zahlkörper; Bestimmung der Ganzheitsringe quadratischer Zahlkörper; Faktorialität des Ganzheitsrings von $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$; Beweis des großen Fermatschen Satzes für $n = 3$; *optional:* Charakterisierung der Einheiten in Ganzheitsringen; Beispiele für nicht-faktorielle Ganzheitsringe; Primelemente im Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$; Anwendungen auf weitere diophantische Gleichungen.

4 Homepage

Bitte besuchen Sie die Veranstaltungsseite für Informationen und die aktuelle Fassung dieses Dokuments.

`http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~dplauman/lehre/17SeminarAZ.html`