Das Kakeya-Problem und Verbindungen zur Harmonischen Analyse

Alexander Dicke

Im Jahr 1971 konnte C. Fefferman nachweisen, dass der sphärische Summationsoperator in mehr als einer Dimension lediglich auf L^2 beschränkt ist. Der Beweis lenkt den Blick auf Nullmengen, die eine Strecke der Länge 1 in jede Richtung enthalten. Derartige Mengen heißen Besicovitch- oder Kakeya-Mengen.

In diesem Vortrag werden wir zwei Versionen der sogenannten Kakeya-Vermutung betrachten: Die Erste besagt, dass Besicovitch-Mengen im $\mathbb{R}^n$ Minkowski-Dimension n besitzen und die Zweite befasst sich mit der Kakeya-Maximalfunktion. Diese wird für $\delta \in (0,1]$ und lokal-integrierbare Funktionen f erklärt durch

$$f_\delta^*(v) := \sup_T \frac{1}{|T|} \int_T |f|,$$

wobei sich das Supremum über alle Zylinder T der Länge 1 und des Radius δ erstreckt, deren lange Seite in Richtung $v \in S^{n-1}$ zeigt. Die Kakeya-Vermutung besagt dann, dass es für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$\|f_\delta^*\|_{L^n(S^{n-1})} \leq C_\varepsilon \, \delta^{-\varepsilon} \, \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

gilt. Wir werden sehen, dass die Zweite Version die Erste impliziert.

Danach motivieren wir kurz die Restriktionsvermutung für die Fourier-Transformation und skizzieren, welche Verbindung zur Kakeya-Vermutung besteht.