Ein geometrisches Analogon der Geschlossenheitsrelation der Primstellen eines algebraischen Zahlkörpers

Fabian Kopei

5. Mai 2008

Sei C eine glatte, algebraische Kurve über einem perfekten Körper K. Dann ist der Grad eines Hauptdivisors null, d.h. für $f \in \bar{K}(C)^*$ gilt

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = \sum_{P \in C} \mathrm{ord}_P(f) = 0.$$

Dieser Gleichheit entspricht im analytischen Kontext, dass eine meromorphe Funktion auf einer kompakten Riemannschen Fläche mit Vielfachheiten gerechnet ebenso viele Null- wie Polstellen hat. Sei nun K ein algebraischer Zahlkörper und $a \in K^*$. Dann existiert eine obiger Formel sehr ähnliche Geschlossenheitsrelation: Das Produkt über alle Bewertungen von a ist gleich eins, das heißt

$$\deg(\mathrm{div}(a)) = \sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(a) \log \mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = 0.$$

Wir zeigen, dass man eine analoge Formel findet, wenn man eine bestimmte Klasse von Blätterungen durch Riemannsche Flächen betrachtet. Dieses Ergebnis ist Teil einer von Christopher Denigner entdeckten umfangreichen Analogie, die wir am Ende kurz skizzieren.