Beiträge zum Mathematikunterricht

2006

**Vorträge auf der
40. Tagung für
Didaktik der Mathematik
vom 6. 3. bis 10. 3. 2006
in Osnabrück**

Verlag Franzbecker, Hildesheim und Berlin

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Information bibliographique de la Deutsche Nationalbibliothek
La Deutsche Nationalbibliothek a répertorié cette publication dans la Deutsche Nationalbibliografie; les données bibliographiques détaillées peuvent être consultées sur Internet à l'adresse http://dnb.d-nb.de.

ISBN 978-88120-434-7

Beiträge zum Mathematikunterricht 2006 in Osnabrück

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der Vervielfältigung und Übertragung auch einzelner Textabschnitte, Bilder oder Zeichnungen vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Zustimmung des Verlages in irgendeiner Form reproduziert werden (Ausnahmen gem. 53, 54 URG). Das gilt sowohl für die Vervielfältigung durch Fotokopie oder irgendein anderes Verfahren wie auch für die Übertragung auf Filme, Bänder, Platten, Transparente, Disketten und andere Medien und die Darstellung im Internet.

© 2006 by Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin

Eröffnung

SJUTS, Johann
Eröffnung der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6. bis 10. März 2006 in Osnabrück 1

Hauptvortrag

Michael NEUBRAND, Oldenburg
Professionalität von Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrern: Konzeptualisierungen und Ergebnisse aus der COACTIV- und der PISA-Studie 5

Moderierte Sektionen **13**

Moderierte Sektion
Empirische Untersuchungen zum Mathematikunterricht der Hauptschule

Gerald WITTMANN, Schwäbisch Gmünd
Empirische Untersuchungen zum Mathematikunterricht in der Hauptschule 15

Anke WAGNER, Ludwigsburg
„Die 39er-Reihe Reihe“ haben wir noch nicht gelernt“ – Zum Kopfrechnen in der Hauptschule 17

Gerald WITTMANN, Schwäbisch Gmünd
Zum Zusammenhang von Lösungswegen und Beliefs in der Bruchrechnung 20

Katja MAASS, Freiburg
Mathematik zwischen Schülervorstellungen und Bildungszielen – erste Ergebnisse einer empirischen Studie 23

Moderierte Sektion
Lehrerfortbildung und Schülerleistungen

Regina BRUDER, Darmstadt, Alexander JORDAN, Kassel, Marina STRÖBELE, Christina COLLET, Darmstadt
Moderierte Sektion: Lehrerfortbildung und Schülerleistungen 26

Christina COLLET, Regina BRUDER, Evelyn KOMOREK, Bernhard SCHMITZ, Technische Universität Darmstadt
Ein Fortbildungskonzept zum Problemlösenlernen in Verbindung mit Selbstregulation im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und deren Effekte für Lehrer und Schüler 28

Alexander JORDAN, Kassel
Verändertes Lernen – verbesserte Leistungen? Zur Entwicklung der Schülerfähigkeiten bei SINUS-Transfer 31

Marina Ströbele, Regina Bruder, TU Darmstadt
Evaluation des Modellversuchs Sinus-Transfer mit Schwerpunkt Mathematik in Nordhessen 34

Moderierte Sektion
Mathematik erleben – Diskrete Mathematik in Schule und Hochschule

Stephan, HUSSMANN, Dortmund; Timo LEUDERS, Freiburg
Mathematik treiben, authentisch und diskret - eine Perspektive für die Lehrerausbildung 37

Brigitte LUTZ-WESTPHAL, Berlin
Typisch diskret - Was macht diskretes Arbeiten aus? 45

Moderierte Sektion
Mathematische Modellierung in der Schule

Gabriele KAISER (Moderatorin), Hamburg
Mathematische Modellierung in der Schule 48

Rita BORROMEO FERRI, Gabriele KAISER, Hamburg
Perspektiven zur Modellierung im Mathematikunterricht – Analysen aktueller Ansätze 50

Rita BORROMEO FERRI, Hamburg; Dominik LEISS, Kassel; Werner BLUM, Kassel
Der Modellierungskreislauf unter kognitionspsychologischer Perspektive 53

Gabriele KAISER, Björn SCHWARZ; Hamburg
Modellierungskompetenzen – Entwicklung im Unterricht und ihre Messung 56

Moderierte Sektion
Problembearbeitungsstile mathematisch begabter Grundschulkinder

Friedhelm KÄPNICK, Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Problembearbeitungsstile mathematisch begabter Grundschulkinder 59

Mandy FUCHS, Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen 61

Friedhelm KÄPNICK, Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Intuitives Erfassen, Vortasten und Lösen –
ein besonderer Problembearbeitungsstil mathematisch begabter Grundschulkinder 64

Moderierte Sektion
Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik

Gert KADUNZ, Klagenfurt
Zum Schreiben von Mathematik 67

Willi DÖRFLER, Klagenfurt
Keine Angst – Mathematik ist nicht (nur) abstrakt 71

Martin HENSEL, Siegburg
Am Anfang war die Triade von Peirce. . . 75

Barbara SCHMIDT-THIEME (Ludwigsburg)
Unmathematisches Argumentieren im Mathematikunterricht 78

Rose VOGEL, Ludwigsburg
Mathematische Sprachentwicklung – eine erste Annäherung 82

Moderierte Sektion
Taschencomputer im Mathematikunterricht

Hans-Georg WEIGAND, Würzburg, Regina BRUDER, Maria INGELMANN, Darmstadt
Moderierte Sektion: Taschencomputer im Mathematikunterricht 85

Regina BRUDER, Darmstadt
Taschencomputer in Klasse 11- Portfolioevaluation eines Modellprojektes in Hessen 87

Maria INGELMANN, Darmstadt
CAliMERO – ein Modellversuch zu CAS-fähigen Taschencomputern ab Klasse 7 in Niedersachsen 90

Hans-Georg WEIGAND, Würzburg
Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe
- Evaluation eines einjährigen Schulversuchs 93

Sektionsvorträge 97

Reimund ALBERS, Bremen
Die Papierfaltungsfolge 99

Gabriella Ambrus, Budapest
Analyse eines geometrischen Problems für die Klassen 7-11 103

Lucas AMIRAS, Weingarten
Von den Grundlagen der Geometrie zur Sinngebung geometrischer Grundbegriffe 107

Ludwig Bauer, Universität Passau
Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht der Hauptschule. Überlegungen zum zentralen Jahrgangsstufentest 2004 für bayerische Hauptschulen (Jahrgangsstufe 8) 111

Heinrich BAUERSFELD, Bielefeld
Probleme besonders befähigter Kinder und ihrer Tutoren 115

Astrid BECKMANN, Schwäbisch Gmünd
Nicht-lineare Funktionen in der Hauptschule 119

Astrid BEGEHR, Berlin
„Reden ist Silber, Schweigen ist Gold!“ – Eine videobasierte Analyse von TIMSS- und LPS-Daten 123

Christine BESCHERER, Flensburg
LOGO lebt! - Computer im Mathematikunterricht der Grundschule 127

Kathrin BLOCKSDORF, Inge SCHWANK, Osnabrück
Die Osnabrücker Zwergen-Mathe-Olympiade [ZMO] 131

Claudia BÖTTINGER, Essen
Arithmetische Darstellungen – Punktmusterdarstellungen 135

Peter BORNELEIT, Leipzig
Zur Etablierung der Methodik des Mathematikunterrichts an Universitäten und Hochschulen in der Sowjetischen Besatzungszone (SBZ) 1946-49 139

Manfred BOROVCNIK, Klagenfurt
Statistische Zusammenhänge 143

Astrid BRINKMANN, Dortmund/Iserlohn
Mind Mapping oder Concept Mapping? – Schülerpräferenzen 147

Silke BRINKSCHMIDT, Springe
Einblicke in die Unterschiedlichkeit kognitiver Prozessedurch Analyse von Blickbewegungen 151

Andreas BÜCHTER, Soest
Kompetenzorientierte Diagnose im Mathematikunterricht 155

Richard CABASSUT, Strasbourg
Beweisen in Schulbüchern in Frankreich und Baden-Württemberg 159

Norbert CHRISTMANN, Kaiserslautern
Mathematik musikalisch gestaltet 163

Rainer DANCKWERTS, Siegen
Mathematiklehrerbildung Neu Denken:
Ein Projekt der Deutschen Telekom Stiftung 167

Timo EHMKE, Kiel & Frauke ULFIG, Oldenburg
PISA 2003: Ergebnisse zur mathematischen Kompetenz und zum Problemlösen in den Ländern der Bundesrepublik Deutschland 171

Andreas EICHLER, Bielefeld
Zusammenhänge zwischen der lehrerspezifischen Planung und des Lernergebnisses im Bereich der Stochastik 175

Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Düsseldorf
Lernmethoden-Kompetenzen, auch im MU 179

Joachim ENGEL, Hannover
Modellierung von Wachstumskurven und dynamischinteraktive Lernsoftware 183

Marei FETZER, Frankfurt a. M.
Schreibanlässe im Mathematikunterricht – Wie lernen die Kinder dabei? 187

Astrid FISCHER, Essen
Die Konstruktion von Vorstellungen zur Linearen Algebra 191

Pascal R. FISCHER & Rolf BIEHLER, Kassel
VEMA - Virtuelles Eingangstutorium Mathematik 195

Torsten FRITZLAR, Lüneburg
Lässt sich Sensibilität für die Komplexität problemorientierten Mathematikunterrichts „messen“? 199

Lutz FÜHRER, Frankfurt am Main
„Siehe“-Beweise für elementare Volumenbestimmungen 203

Thomas GAWLICK; Landau
Benchmarks zur Verknüpfung von CAS und DGS 207

Peter GEERING, Zürich
Lernbücher Mathematik 211

Daniela GÖTZE, Paderborn
„Ich kapier auch kein Prinzip“ – Zum Einfluss sozialer Interaktion von Grundschulkindern beim Lösen komplexer Aufgaben 215

Günter Graumann, Bielefeld
Zugänge zu Werten trigonometrischer Funktionen im Bereich 90° bis 360° 219

Gilbert GREEFRATH, Wuppertal
Prozessanalysen von Modellierungsaufgaben 223

Christian GROSS und Marianne MOORMANN, Augsburg/München
Ergebnisse der ersten Erprobung der Lernsoftware LeActiveMath in der Praxis 227

Annemarie GUBLER-BECK, Dortmund
Portfolio als alternatives Beurteilungsinstrument im angelsächsischen und im deutschen Sprachraum – ein Vergleich 231

Dörte HAFTENDORN, Lüneburg
Polarkoordinaten besser verstehen durch bewegliche und gleichzeitige Darstellung der zugehörigen „kartesischen Funktion“. 235

Heike Hahn / Regina Möller, Universität Erfurt
Schriftliches Rechnen – ein mathematikdidaktisches Thema mit methodischer Öffnung? 239

Kirsten HECKMANN, Universität Bielefeld
Zehntel, Hundertstel und andere Unbekannte – zum Stellenwertverständnis von Sechstklässlern 243

Sandra HECKMANN, Vechta
Fächerverbindendes Arbeiten im Montessori-Mathematikunterricht 247

Aiso HEINZE, München
Umgang mit Fehlern im Mathematikunterricht – Empirische Ergebnisse zur Schülerwahrnehmung 251

Frank HELLMICH, Münster & Stephan WERNKE, Oldenburg
Lernstrategien, Metakognitionen und Motivationen von Kindern im Mathematikunterricht 255

Lutz HELLMIG, Rostock
Zur Evaluation von Lehrerfortbildungen in Ontario 259

Ueli HIRT, Bern
Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte – Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht 263

Thilo HÖFER, Schwäbisch Gmünd
Funktionales Denken ganzheitlich fördern 267

Christine HÖRNSCHEMEYER, Rahden
Ein frühzeitiger Zugang zum Variablenbegriff in der Jahrgangsstufe 5 271

Hans Niels JAHNKE, Essen
Beweise und Hypothesen 275

Helga JUNGWIRTH, München
Implizite Botschaften: Software und Normen 279

Rainer H. Kaenders, TU Delft und Radboud Universität Nimwegen
Kräne und Lemniskaten 283

Tünde KÁNTOR, Universität Debrecen, Debrecen (Ungarn)
Über die neue Ungarische Zentralabitur 287

Romualdas KASUBA, Vilnius
Psychologie und Tiefe des Denkens oder über Einstiegsfähigkeit bei der Lösung von Aufgaben 291

Andreas KITTEL, Schwäbisch Gmünd
Unterrichtliche Erprobung von Dynamischen-Geometrie-Systemen in der Hauptschule 295

Dieter KLAUDT, Ludwigsburg
Operieren am mentalen Zahlenstrahl 299

Martina KLEINHEINRICH, Essen
Hypothesen über die Sonnenbahn als Gegenstand des Geometrieunterrichts 303

Olaf KNAPP und Heinz SCHUMANN, PH Weingarten
Evaluation von Instruktionsvideos für raumgeometrische Konstruktionen 307

Evelyn KOMOREK, Darmstadt
Mit Hausaufgaben Anlässe für eigenverantwortliches Lernen schaffen und Problemlösekompetenzen fördern 311

Maria Korcz, Edyta Nowinska, Adam Mickiewicz Universität Poznan
Visualisierung der Rechnungen auf konvexen Mengen 315

Stefan KRAUSS[1], Jürgen BAUMERT[1], Werner BLUM[2], Michael NEUBRAND[3], Alexander JORDAN[2], Martin BRUNNER[1], Mareike KUNTER[1] und Katrin LÖWEN[1]
[1] Berlin, [2] Kassel, [3] Oldenburg
Die Konstruktion eines Tests zum fachlichen und zum fachdidaktischen Wissen von Mathematiklehrkräften 319

Günter KRAUTHAUSEN, Hamburg
ZAHLENFORSCHER® – eine innovative Software-Reihe (Kl. 2-6) 323

Sebastian KUNTZE, München
Implementation von Themenstudienarbeit - Wie gehen Mathematiklehrerinnen und -lehrer mit Anregungen aus Fortbildungsmaßnahmen um? 327

Silke LADEL, Schwäbisch Gmünd
Eine unterrichtliche Erprobung zum Computereinsatz im Mathematikunterricht der ersten Grundschulklasse 331

Anselm LAMBERT, Frankfurt
Aktuelle Schlagworte – im Spiegel der Mathematikdidaktik Walt(h)er Lietzmanns 335

Ingmar LEHMANN, Berlin
Die Fibonacci-Zahlen in der Kunst 339

Katja LENGNINK, Darmstadt
Das Stellenwertsystem als Prinzip vom Rechnen mit wenigen Steinen: Reflektierend mathematisch handeln 343

Tiit LEPMANN, Tartu
TIMSS 2003 - Leistungen und die Einstellung zur Mathematik 347

Helmut Linneweber-Lammerskitten (Aarau)
Bildungsstandards in Mathematik: allgemein, abstrakt, exemplarisch oder vage? 351

Matthias Ludwig , PH Weingarten
Die Fußball WM 2006 im mathematischen Blick 355

Jürgen Maaß, Linz
„Power Girls“ lernen gerne Mathematik 359

Andreas MARX, Paderborn
Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen und die „Basic Metaphor of Infinity“ 363

Stefanie MEIER & Jan Hendrik MÜLLER, Universität Dortmund
Anwendungsbeispiele gemeinsam entwickelt – Ergebnisse eines COMENIUS 2.1-Kooperationsprojektes 367

Carla MERSCHMEYER-BRÜWER, Bielefeld
„Ich habe erst diese Würfel gezählt und dann immer zwei dazu getan." – Zum Zusammenhang von räumlichem Vorstellungsvermögen und Rechenfertigkeiten bei der Strukturierung von Würfelbauwerken 371

Henrik MEYER, Universität Hildesheim
Aspekte der numerischen Mathematik in der Schule 375

Jörg MEYER, Hameln
Theoriearmes Testen 379

Wolfram Meyerhöfer, Potsdam
Praxisorientierung als Verblendung. Eine Fallstudie. 381

Thorsten MEYFARTH, Kassel
Die kontinuierliche Verwendung von Simulationen im Stochastik-Leistungskurs – Ein Kurskonzept 385

Renate MOTZER, Augsburg
Soziale Bezüge in mathematischen Themen sehen
Unterschiedliche Akzente in den Arbeiten von Jungen und Mädchen 389

Hartmut MÜLLER-SOMMER, Vechta
Das „Baustoff - Bauplan - Prinzip" – Ein heuristisches Werkzeug für kreatives Lernen im Geometrieunterricht 393

Fritz Nestle, Ulm (Ludwigsburg)
Didaktikervorstellungen über Lernergebnisse im MU 397

Bernd NEUBERT, Gießen
Kompetenzen von Grundschülern bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung 401

Reinhard OLDENBURG, Göttingen
Mathematik, Realität und Experiment 405

Andreas PALLACK, Soest
Zentrale Mathematikprüfungen in NRW 409

Bernold PICKER, Köln
Von Osnabrück bis PISA -
40 Jahre Mathematikdidaktik in Deutschland 413

Guido PINKERNELL, Lingen
„Mehrwertaufgaben" - Kleine, weittragende Unterrichtsideen für den Rechnereinsatz 417

Renate RASCH, Landau
Frühes operatives Denken beim Bearbeiten von Textaufgaben 421

Sebastian REZAT, Gießen
Mathematikschulbücher – Struktur und Nutzungsmöglichkeiten 425

Bettina RÖSKEN & Katrin ROLKA, Duisburg, Peter LILJEDAHL, Vancouver, Kanada
Veränderung mathematischer Beliefs – Dokumentation in Lerntagebüchern 429

Katrin ROLKA, Duisburg & Stefan HALVERSCHEID, Bremen
Die Mathematik im Bild – Zeichnungen zur Erforschung mathematischer Weltbilder 433

Jürgen ROTH, Würzburg
Computerwerkzeuge – Ein Thema für Lehrerfortbildungen?! 437

Bo|ena RO{EK, Kraków
Kinderinterpretationen der Multiplikation in Anlehnung an die Zeilen-Spalten-Anordnung 441

Franziska RUDOLPH-ALBERT und Stephan KESSLER, München
Problemlösekompetenzen von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 7 445

Herwig SÄCKL, Regensburg
Albrecht Altdorfer (ca. 1480 -1538): Künstler, Baumeister, Stadtpolitiker - Nutzung einer historischen Situation für den Mathematikunterricht und die Mathematiklehrerausbildung 449

Ildar Safuanov, Naberezhnye Chelny, Russia
GENETIC APPROACH IN THE SOVIET MATHEMATICAL EDUCATION 453

Jutta SCHÄFER, Pforzheim
Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule 457

Ulrike SCHÄTZ, München
Der TAG DER MATHEMATIK motiviert für Mathematik 461

Christine SCHERRES, Universität Bremen
Erfassung der Qualität von Arbeitsprozessen bei natürlicher Differenzierung: Erste Einblicke in eine qualitative Fallstudie 465

Wolfgang, SCHLÖGLMANN, Linz/Donau
Affekte und Mathematiklernen - Einige Anmerkungen 469

Kathrin SCHNALLE & Inge SCHWANK, Osnabrück
Das Zahlen-Hochhaus [ZH]: Multiplikative Zusammenhänge im Hunderterraum 473

Helmuth SCHÖNE Köln
Über den Term $(P - x^2) / x$ 477

Christof SCHREIBER, J.W. Goethe Universität Frankfurt
Projekt Lehr@mt - Medienkompetenz in der Lehrerbildung für die Primarstufe 481

Marcus SCHÜTTE, Universität Frankfurt/ Hamburg.
Mathematiklernen im Grundschulunterricht einer sprachlichkulturell heterogenen Schülerschaft 485

Stanislaw SCHUKAJLOW, Kassel
Schüler-Schwierigkeiten beim Lösen von Modellierungsaufgaben – Ergebnisse aus dem DISUM-Projekt 489

Heinz SCHUMANN, Weingarten
Gestaltung einer interaktiven Lernumgebung für synthetische Raumgeometrie 493

Hans-Dieter SILL, Rostock
Funktionen und Ziele von Leistungserhebungen im Mathematikunterricht 497

Johann SJUTS, Osnabrück/Leer; Binyan XU, Shanghai
Befunde aus empirischen Studien zum mathematischen Denken unter besonderer Berücksichtigung von Metakognition 501

Norbert SOMMER, Osnabrück
„Bremens Gymnasiasten hinken ein Jahr hinterher.“ 505

Horst STEIBL, Braunschweig
Kombinatorische Aspekte auf dem 9-Nagel-Geobrett 509

Kinga SZCS, Budapest
Untersuchung der Reichweite der allgemeinen fremdsprachlichen Lesekompetenz in mathematischer Lernumgebung
Eine Fallstudie an der Budapester Wirtschaftshochschule 513

Allan TARP, MATHeCADEMY.net
Mathematismus und kognitive Bomben 517

Marie TICHÁ, Praha
Sind die Reflexionen des Unterrichts zuträglich? 521

Ingrida Veilande, Seefahrt Akademie Lettlands
Die Methode des Mittelwertes für die kombinatorisch - geometrische Aufgaben. 525

Markus VOGEL, Ludwigsburg
Funktionale Abhängigkeiten in Daten erkunden - ein Beitrag der Mathematik zum naturwissenschaftlichen Arbeiten 529

Andreas VOHNS, Universität Siegen
Fallbezogene Rekonstruktion grundlegender Ideen in der Geometrie 533

Wolfgang WEIGEL, Würzburg
Grundlagen zur Organisation virtueller Lehre an Beispielen aus dem Bereich der Mathematik 537

Gregor Wieland, Freiburg (Schweiz)
Verständnis für Funktionen und Graphen aufbauen 541

Kirsten WINKEL, Osnabrück
Metakognition im Unterrichtsdiskurs der Grundschule 545

Martin WINTER, Vechta
„Theorema Pythagoricum“ - Ein lateinischer Beitrag aus dem Jahr 1855 an einem westfälischen Gymnasium 549

Erich Ch. WITTMANN, Dortmund
Mathematische Frühförderung vom Fach aus 553

40. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6. bis 10. März 2006 in Osnabrück

Eröffnung

Herr Staatssekretär, Herr Abgeordneter, Herr Präsident, sehr geehrte Damen und Herren, liebe Kolleginnen und Kollegen, verehrte Gäste,

das Organisationskomitee hat mir die Aufgabe zugedacht, zur Einführung einige Worte zu sagen.

Mathematikdidaktik hat ihren Platz sowohl in Hochschulen als auch in Schulen. Zuständig dafür ist das jeweilige Bundesland, hier also Niedersachsen. Folgerichtig ist die Niedersächsische Landesregierung vertreten, und ich freue mich sehr, Herrn Staatssekretär Dr. Lange begrüßen zu dürfen. Seien Sie herzlich willkommen!

Wissenschaftliche Tagungen finden konsequenterweise in einer Universität statt. Gastgebend in diesem Jahr ist die Universität Osnabrück, deren Präsidenten Herrn Professor Rollinger ich begrüßen darf. Ihnen und der Universität Osnabrück herzlichen Dank!

Jahrestagungen der Mathematikdidaktik in Osnabrück zeichnen sich durch besondere Zahlen aus. Die 1. (1967) und die 25. (1991 – unmittelbar nach der deutschen Wiedervereinigung) fanden in Osnabrück statt, die jetzige ist die 40. Wir müssen es aber einem späteren Rückblick überlassen, herauszufinden, was das Besondere an ihr gewesen sein wird.

Die Initiative zur ersten, zur allerersten Tagung der Mathematikdidaktik im Jahr 1967, ist untrennbar mit Ursula Viet verbunden, der langjährigen Professorin für Mathematikdidaktik an der Universität Osnabrück. Sehr verehrte, liebe Frau Viet, Ihnen gilt ein sehr herzliches Willkommen!

Gleichermaßen ist zu erwähnen Professor Heinz Griesel, der allererste 1. Vorsitzende der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Sehr geehrter, lieber Herr Griesel, Ihnen gilt gleichfalls ein sehr herzliches Willkommen, und, da Sie vor zwei Tagen 75 Jahre alt geworden sind, unsere besondere Gratulation!

Viele sind schon in Osnabrück eingetroffen, einige kommen noch im Laufe des Tages und in den nächsten Tagen dazu. Ich denke, wir alle dürfen uns freuen auf die Begegnungen mit unseren nationalen und internationalen Kollegen, mit unseren vielen Bekannten und Freunden.

Die Anmeldezahlen nicht nur für die Teilnahme an der diesjährigen Tagung, sondern auch für die verschiedensten Vorträge sind überaus hoch. Das Organisationsteam hat sich bemüht, den geäußerten Wünschen gerecht zu werden und die gesamte Tagung so zu gestalten, dass alle am Ende zufrieden nach Hause fahren.

Was die Einzelheiten angeht, so setzen wir darauf, dass das, was nicht genau geregelt oder selbst-instruktiv ist, Gelegenheit zum erforschenden und entdeckenden Lernen bietet. Wir sind selbstverständlich bereit, wo es geht, zu helfen.

Es ist an dieser Stelle nicht möglich, alle zu erwähnen, denen besonderer Dank gebührt. Viele haben sich mit großem Engagement an der Vorbereitung beteiligt, waren und sind mit der Organisation befasst, werden den Tagungsablauf in der einen oder anderen Funktion begleiten.

Eine Ausnahme ist sicher gerechtfertigt. Ich erlaube mir, Silke Brinkschmidt und das Junge Herforder Blechbläser-Ensemble hervorzuheben. Für den musikalischen Rahmen sagen wir sehr herzlichen Dank!

Ich persönlich bin hauptberuflich in der zweiten Phase der Lehrerausbildung tätig, im Schuldienst also, und nebenberuflich an der Universität. Gerade deshalb möchte ich das Tagungsmotto betonen: „Mathematiklehren braucht forschungsgestützte Professionalität."

So darf ich nun allen eine interessante Tagung, anregende Vorträge und aufschlussreiche Diskussionen wünschen.

Johann Sjuts

Hauptvortrag

Michael NEUBRAND, Oldenburg

Professionalität von Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrern: Konzeptualisierungen und Ergebnisse aus der COACTIV- und der PISA-Studie

Auf den Tag genau vor 20 Jahren, am 7. März 1986, habe ich in Bielefeld auf der 20. Bundestagung für Didaktik der Mathematik einen Hauptvortrag über „Aspekte und Beispiele zum Prozesscharakter der Mathematik“ gehalten (Neubrand, 1986). Erhalten blieb der Zugriff auf mathematikdidaktische Fragestellungen: Was heißt es, Mathematik zu betreiben? Geblieben ist auch, „kognitive Aktivierung“ der Schülerinnen und Schüler als Kern didaktischen Handelns zu begreifen. Im Bielefelder Vortrag wurde diskutiert, auf welchen Ebenen dies stattfinden kann, auch wenn damals andere Bezeichnungen verwendet wurden. Hinzu kamen solche Fragen: Was wissen wir über Erreichtes? Kann man „innere Strukturen des mathematischen Wissens“ (Neubrand & Neubrand, 2004) von Schülerinnen und Schüler erkennen? Und eben jetzt die Frage, wie man Wissensstrukturen von Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrern definieren und erfassen kann.

Der Zeitpunkt, Lehrerwissen zu untersuchen, ist günstig. Denn durch die Ergebnisse der PISA-Studien sind zahlreiche Initiativen im deutschen Bildungssystem ausgelöst worden, und zwar auf unterschiedlichen Ebenen, etwa der Ebene der Schulstrukturen (z.B. Ganztagsschulen), der Ebene von Leistungserhebungen (z.B. Vergleichsarbeiten als bildungspolitische Vorgaben) oder der Ebene der Steuerung des Bildungswesens (von Lehrplänen hin zu Bildungsstandards). Aber es fehlt die Ebene des Wissens und des Handelns der Lehrerinnen und Lehrer. Doch dies hat einen zentralen Einfluss auf das Geschehen in der Schule (Baumert, Blum & Neubrand, 2004).

Nach dieser entscheidenden Variable aller bildungsbezogenen Entwicklungen zu fragen, ist mit divergierenden Gedanken verbunden: Was sind die Ziele der Lehrkräfte im Unterricht? Mit welchen Methoden werden diese angegangen? Welches professionelle Wissen haben die Lehrkräfte? Und folglich: Kann man dieses professionelle Wissen so konzeptualisieren und erfassen, dass es einer empirischen Untersuchung zugänglich wird? Vor allem mit der zuletzt genannten Problematik hat sich die COACTIV-Studie auseinandergesetzt, und dies ist das Hauptthema dieses Vortrags.

1. Die COACTIV-Studie

Das (systematisch erhobene) „Wissen über Lehrer“ hat eine klar zu benennende Lücke. Es gibt zwar allgemeine Studien aus pädagogischer Perspektive (als Basis vorrangig: Shulman, 1986). Es gibt aber kaum Konzeptuali-

sierungen und noch weniger empirische Daten, sobald das professionelle Wissen von Lehrerinnen und Lehrern in Bezug zum jeweiligen Fach gesetzt wird. Deborah Ball (vgl. etwa: Ball, Hill & Bass, 2005) hat solche Fragen mit Blick auf US-amerikanische Primatstufenlehrkräfte thematisiert; in Deutschland kann man Arbeiten von Uwe-Peter Tietze (1985) über Mathematiklehrer in der Sekundarstufe II und von Andreas Eichler (2005) zu subjektiven Curricula von Stochastik-Lehrkräften nennen. Aber es bleibt eine Lücke bestehen. Es gibt kaum eine breite Übersicht über vorhandenes Professionswissen von Mathematiklehrerinnen und -lehrern. COACTIV will diese Lücke schließen, indem explizit die mathematik-spezifischen Facetten des Lehrerwissens herausgearbeitet werden (Krauss & al., 2004).

Der Bezug zum Fach Mathematik macht die Fragestellung zugänglicher als dies für manch andere Fächer der Fall wäre. Aus fachdidaktischer Perspektive wurden hier nämlich konzeptionelle Vorarbeiten für empirische Studien geleistet, jedenfalls bezüglich des Schülerwissens. So enthalten die Rahmenkonzeptionen von PISA und weitere Arbeiten aus dem Umfeld von PISA (Neubrand, 2004, 2005) kognitionspsychologisch und fachdidaktisch begründete Konzepte mathematischer Leistung von Schülerinnen und Schülern, die auf das Lehrerwissen zurückgespiegelt werden können. Der Fokus auf „kognitive Aktivierung“ hat hier seine Wurzeln.

Die COACTIV-Studie hat den vollen Titel „Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz“ und ist ein von der DFG gefördertes, in das Schwerpunktprogramm BiQua („Bildungsqualität von Schule“) eingebettetes und an PISA-2003 angehängtes Projekt. COACTIV wird von Jürgen Baumert (Berlin), Werner Blum (Kassel) und mir geleitet. Auf dieser Tagung wird auch Stefan Krauss (Berlin) weiter über die Studie berichten.

Die Daten der Studie wurden im Rahmen von PISA-2003 erhoben. In der Schülerstichprobe befinden sich 440 Klassen aus dem 9. Schuljahr (in 2003) und dem 10. Schuljahr (in 2004), die durch Aufstockung der Klassen zustande kamen, aus denen die Schülerinnen und Schüler für den internationalen Teil der PISA-Studie gezogen wurden. Diese Klassen wurden, soweit dies möglich war, also nicht mehr in den Hauptschulen, längsschnittlich verfolgt. Die Lehrerinnen und Lehrer dieser Klassen im Fach Mathematik bilden die Lehrerstichprobe. Befragt wurden 366 Lehrerinnen und Lehrer in 2003 und 217 in 2004. COACTIV untersucht somit „die Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer der PISA-Klassen“. Aufgrund dieses Ziehungsprozesses handelt es sich um einen repräsentativen Querschnitt durch die Lehrerinnen und Lehrer im Fach Mathematik in Deutschland.

COACTIV benutzt (vgl. detaillierter: Krauss & al., 2004)

- für Schülerinnen und Schüler den PISA-Schüler-Fragebogen (allgemeine und mathematik-spezifische Fragen) und die Leistungstests in PISA,

- für Lehrerinnen und Lehrer den PISA-Lehrer-Fragebogen (national und international, allgemein und mathematik-spezifisch: über Ziele des Mathematikunterrichts, Wahrnehmung des Unterrichts, Vorstellungen über Lehren und Lernen von Mathematik) sowie zusätzlich den COACTIV-Fragebogen. Dieser, teilweise computergestützte und mit Video-Beispielen versehene, Fragebogen stellt Aufgaben über didaktisches Handlungsrepertoire, über Auswahl und Anordnung von Aufgaben, über Erkennen von Fehlern (auch unter Zeitdruck), über diagnostische Fähigkeiten, über das Erkennen kognitiver Dimensionen von mathematischen Aufgaben und über Elemente eines vertieften Hintergrundwissens zur Schulmathematik.

- Zu COACTIV gehört zudem eine Auswertung von Hausaufgaben und Klassenarbeiten aus den PISA-Klassen.

2. Professionelles Wissen von Lehrerinnen und Lehrern: Was ist das? Wie kann man es konzeptualisieren?

In Anlehnung an mittlerweile "klassische" Konzepte von Shulman (z.B. Shulman, 1986), aber auch von anderen (z.B. Weinert & al., 1989; Baumert & al., 2000) wird der Gesamtkomplex „Professionelle Handlungskompetenz" von Lehrerinnen und Lehrern ausdifferenziert: Es gehört dazu neben Überzeugungen, Werthaltungen, motivationalen Orientierungen und selbstregulativen Fähigkeiten ein spezifisches Professionswissen i.e.S.. Dieses ist, dem Ansatz Shulmans folgend, konzeptionell in pädagogisches Wissen, fachdidaktisches Wissen (bei Shulman: pedagogical content knowledge) und Fachwissen (content knowledge) zu unterscheiden.

Vom fachdidaktischen Standpunkt aus besteht die entscheidende Problematik offenbar darin, Fachwissen und fachdidaktisches Wissen so zu konzeptualisieren und in Facetten des Lehrerwissens umzusetzen, dass die Spezifika des jeweiligen Faches - hier der Mathematik - hinreichend breit, vor allem aber authentisch ins Spiel gebracht werden können. Woran kann man sich halten? Drei Aspekte können leiten:

(1) Wir gehen von einer grundlegenden Orientierung aus: Schülerinnen und Schüler sollen im Fachunterricht „*kognitiv aktiviert*" werden, der Unterricht soll demnach verständnisorientiert angelegt sein, und Lehrerinnen und Lehrer sollen die Voraussetzungen und Möglichkeiten dafür besitzen. Damit ist die COACTIV-Untersuchung spezifisch zugeschnitten. Rein methodisches Unterrichtsrepertoire interessiert weniger als die auf die Mathematik selbst bezogenen Ansätze im Unterricht: Welche Voraussetzungen sind nötig, um mathematische Tätigkeiten der Schülerinnen und Schü-

ler anzuregen und zu erkennen? Welche Kenntnisse braucht man für „unverfälschtes Zugänglich-Machen“ (Kirsch, 1977)?

(2) Fachdidaktisches Wissen soll unter dem Fokus der kognitiven Aktivierung breit abgebildet werden. Shulman folgend geht es dabei einerseits darum, spezifische Repräsentationsformen des mathematischen Wissens so zur Verfügung zu haben, dass damit Lehren und Lernen adäquat angelegt werden können. Anderseits muss fachdidaktisches Wissen auch Kenntnisse über Denkweisen (conceptions and preconceptions) der Schülerinnen und Schüler einschließen. Zusammen mit dem Spektrum an Interventionsmöglichkeiten im Mathematikunterricht sind unschwer die Eckpunkte eines „*didaktischen Dreiecks*“ zu erkennen.

(3) Die Konstruktion von Instrumenten erfordert es, einen aussagekräftigen inhaltlichen Zugriff auf das fachdidaktische Wissen zu erhalten. In der Mathematikdidaktik hat sich vielfach bewährt, *mathematische Aufgaben als Analyseinstrumente* einzusetzen. So konnten etwa bei PISA mathematische Leistungen differenziert dargestellt werden, weil bestimmte Aufgabenklassen unterschieden wurden (Neubrand, 2004); bei TIMSS-Video konnten mit Aufgabenanalysen inhaltliche Unterrichtsstrukturen aufgedeckt werden (Neubrand, 2006). Die Aufgaben im Unterrichts sind nämlich Träger mathematischen Wissens und Ausgangspunkt des Lehrerhandelns gleichermaßen (Bromme, Seeger & Steinbring, 1990). Wenn aber Aufgaben das Handeln der Lehrerinnen und Lehrer bestimmen, dann kann man sie auch als Mittel zur Darstellung des professionellen Wissen nutzen.

Mit fachdidaktisch definierten Eigenschaften mathematischer Aufgaben erhält man somit Zugang zu Eckpunkten des fachdidaktischen Wissens und zu Elementen des auf den Mathematikunterricht bezogenen Fachwissens: Wissen über mathematische Anforderungen an Schülerinnen und Schüler zeigt sich etwa daran, ob das Potential einer Aufgabe für multiple Lösungswege erkannt wird. Professionelles Wissen als Grundlage für Erklärungswissen zeigt sich daran, ob verschiedene Repräsentationen mathematischer Begriffe verfügbar sind und für passende Aufgaben genutzt werden können. Wissen über mathematikbezogene Schülerkognitionen kann man auch durch Kenntnisse über typische Fehler und Fehlvorstellungen beim Aufgabenlösen erfragen. Wissen über lokale Interventionsmöglichkeiten zeigt sich, wenn in kritischen Situationen didaktische Strukturierungen von Aufgaben vorgenommen werden sollen. Die letztgenannten Aspekte kommen in COACTIV vor, werden hier jedoch nicht mehr näher beleuchtet. Wissen der Lehrerinnen und Lehrer über mathematische Anforderungen an Schülerinnen und Schüler äußert sich nicht zuletzt auch darin, welches Spektrum an Hausaufgaben und Klassenarbeiten sie stellen.

3. Ziele, Vorstellungen vom Lehren und Lernen und Unterrichtswahrnehmung von Mathematiklehrerinnen und -lehrern

Die Lehrerfragebögen in der PISA-Studie enthielten Skalen, um die angestrebten Ziele für den Mathematikunterricht abzubilden. Hierbei zeigten sich beachtliche Schulformunterschiede. Vgl. zu allen Details Baumert & al. (2004) sowie Kunter & al.(2005):

Während Lehrerinnen und Lehrer an Gymnasien die Modellierungs-Fähigkeit als Ziel hervorhoben, scheinen bei den Lehrerinnen und Lehrern an Hauptschulen mathematische Alltags-Anwendungen „nur" der Motivation zu dienen. Kognitive Aktivierung sollte allerdings keine Frage der Schulform sein. Es ist durchaus möglich, „leichte", aber dennoch kognitiv anregende Aufgaben zu finden. Das ist Teil professionellen Wissens.

Weiter wurden Vorstellungen von Fachlehrerinnen und -lehrern zum Lehren und Lernen von Mathematik erhoben. Auch hier sind deutliche Schulformunterschiede zu erkennen. Unterschiedliche Lern-Voraussetzungen in der Hauptschule scheinen die Lehrerinnen und Lehrer dort eher Methoden des „Einschleifens" präferieren zu lassen, während am Gymnasium mehr „Vertrauen auf mathematische Selbstständigkeit" gelegt wird. Aber ist dies nicht generell Voraussetzung für produktives Lernen, auch und gerade in der Hauptschule? Auch hiermit sind Komponenten des professionellen Wissens angesprochen.

4. Exemplarische Ergebnisse aus den COACTIV-Instrumenten

Elemente des fachdidaktischen Wissens und eines auf den Mathematikunterricht bezogenen Fachwissens zeigen sich an diesen Aufgaben:

Für Wissen über kognitive Hintergründe von Aufgaben und damit auch für Wissen, das Voraussetzung ist für das verständige Umgehen mit Schülerkognitionen, steht exemplarisch dieses Beispiel:

> *„Hoch Null":* Schüler haben immer wieder Schwierigkeiten, die Definition $a^0 = 1$ einzusehen. - Welche Ursachen könnten dieser Schwierigkeit zugrunde liegen? Bitte zählen Sie so viele Ursachen wie möglich auf.

Auf diese (Lehrer-)Aufgabe kann man auf unterschiedlichen Niveaus antworten: Man kann eine konkret-operationsbezogene Perspektive einnehmen: Schüler können sich „Null mal den Faktor a" nicht vorstellen. Man kann aber auch eine allgemeine kognitive Problematik ansprechen: Die Schülerinnen und Schüler müssen sich hier - wie z.B. auch bei der Einführung der Bruchrechnung - von einer auf Zahlen bezogenen Sichtweise lösen und nun „in Beziehungen zwischen Zahlen" denken. Gymnasiallehre-

rinnen und -Lehrer in der COACTIV-Erhebung von 2004 nannten 117 mal, in verschiedenen Varianten, das erste Niveau, nur 13 mal antworteten sie auf der zweitgenannten Ebene.

Exemplarisch für das Wissen über die Repräsentationsmöglichkeiten für mathematische Begriffe und damit auch exemplarisch für grundlegendes Wissen, welches zum verständigen Erklären gebraucht wird, ist eine Aufgabe, die wohl allen, die Mathematik lehren, schon begegnet ist:

> *„Minus mal minus“:* Eine Schülerin sagt: Ich verstehe nicht, warum $(-1) \cdot (-1) = 1$ ist. - Bitte skizzieren Sie möglichst viele verschiedene Wege, mit denen Sie der Schülerin diesen Sachverhalt klar machen könnten.

Die Antworten der Gymnasiallehrer in der COACTIV-Erhebung von 2004 fielen so aus: Über 20 % konnten keine ausreichende Antwort geben (das wäre z.B.: „Das muss man als Regel lernen!“); 40 % konnten nur eine Erklärungsvariante präsentieren, 30 % zwei substantiell unterschiedliche Varianten und etwa 7 % mehr als drei Erklärungen. Zugänglich-Machen verlangt aber Verfügen über mehr als eine Darstellungs- und Erklärungsebene.

Wissen über multiple Lösungswege einer Aufgabe, mithin über das kognitive Potential, das aus einer Aufgabe geschöpft werden kann, zeigt die folgende Frage an die Lehrerinnen und Lehrer. Sie war Teil einer Reihe von Aufgaben, die mehrere Lösungsmöglichkeiten zulassen. Die Lehrerinnen und Lehrer sollten für jede Aufgabe so viele Lösungsmöglichkeiten wie möglich nennen.

> *„Nachbarzahlen“:* Luca behauptet: „Das Quadrat einer natürlichen Zahl ist immer um 1 größer als das Produkt ihrer beiden Nachbarzahlen“. Stimmt Lucas Behauptung?

Die Hälfte der Gymnasiallehrer kann nur einen Lösungsweg für die Aufgabe angeben, etwa 38 % liefern zwei Lösungswege, 10 % aber können die Aufgabe überhaupt nicht lösen. Wie wichtig die Offenheit gegenüber mehren Lösungsansätzen als Element professionellen Wissens ist, zeigt sich an den Schüler-Antworten auf diese Aufgabe. Die Aufgabe „Nachbarzahlen“ war nämlich auch eine national gestellte PISA-Aufgabe. Sie erwies sich zwar als sehr schwer, jedoch zeigt sich, dass keineswegs alle Schülerinnen und Schüler eine Lösungsvariante bevorzugten. Unter den Gymnasiasten wählten 7 % die algebraische Methode, 16 % argumentierten hingegen stimmig an typischen Beispielen. Professionelles Wissen bedeutet, sich auf solche unterschiedlichen Argumentationsformen einstellen zu können.

Die Sammlung von Hausaufgaben und Klassenarbeitsaufgaben und die anschließende Auswertung mit einem Klassifikationssystem (Jordan & al.,

2006) offenbarte das schon anderweitig bekannte Bild: Unabhängig von der Schulform sind Hausaufgaben und Klassenarbeiten eher „kognitiv arm“ zu nennen: Es überwiegen „technische“ Aufgaben, man findet - verglichen etwa mit den PISA-Aufgaben - deutlich weniger Aufgaben mit anspruchsvoller sprachlicher Gestaltung und erheblich weniger Aufgaben, die das Modellieren außermathematischer Sachverhalte verlangen.

Kann man, obwohl zahlreiche Fragen und Analysen aus COACTIV noch offen sind, eine Summe bisheriger Erkenntnisse ziehen? Wenn ja, dann diese:

> Professionelles Wissen im skizzierten und von COACTIV konzeptualisierten Sinn kann nur auf der Basis von FACH-Didaktik, d.h. von bewusster Fachspezifität in der didaktischen Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern entstehen.

Literatur

Ball, D.L., Hill, H.C. & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who knows mathematics well enough to teach third Grade, and how can we decide? *American Educator, Fall 2005*, 14 - 23.

Baumert, J. & Köller, O. (2000). Unterrichtsgestaltung, verständnisvolles Lernen und multiple Zielerreichung im Mathematik- und Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Hrsg.), *TIMSS/III: Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie - Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Band II* (S. 271-315). Opladen: Leske & Budrich.

Baumert, J., Blum, W. & Neubrand, M. (2004). Drawing the lessons from PISA-2000. Long term research implications: Gaining a better understanding of the relationship between system inputs and learning outcomes by assessing instructional and learning processes as mediating factors. In D. Lenzen, J. Baumert, R. Watermann & U. Trautwein (Hrsg.), *PISA und die Konsequenzen für die erziehungswissenschaftliche Forschung. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 7, Beiheft 3/2004*, 143 - 158.

Baumert, J., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, St., Blum, W. & Neubrand, M. (2004). Mathematikunterricht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und -Schüler und ihrer Lehrkräfte. In M. Prenzel & al. (Hrsg.), *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 314 - 354). Münster: Waxmann.

Bromme, R., Seeger, F & Steinbring, H. (1990). *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* (= IDM-Untersuchungen zum Mathematikunterricht 14). Köln: Aulis.

Eichler, A. (2005). *Individuelle Stochastikcurricula von Lehrerinnen und Lehrern*. Hildesheim: Franzbecker.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, St., Baumert, J., Blum, W., Löwen, K., Brunner, M., Kunter, M. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenklassifikation im COACTIV-Projekt*. (= Materialien aus der Bildungsforschung, Nr. 81). Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, 2006.

Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik, 5*, 87 - 101.

Krauss, St., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Jordan, A. & Neubrand, M. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (S. 31 - 53). Münster: Waxmann. 2004.

Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Klusmann, U., Krauss, St., Blum, W., Jordan, A. & Neubrand, M. (2005). Der Mathematikunterricht der PISA-Schülerinnen und Schüler: Schulformunterschiede in der Unterrichtsqualität. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 8 (4)*, 502 - 520.

Neubrand, J. (2006): The TIMSS 1995 and 1999 Video Studies: In Search for Appropriate Units of Analysis. In: F.K.S Leung, K.-D. Graf & F.J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West. - The 13th ICMI Study*. (New ICMI Study Series, Vol. 9). (pp 291 - 318). Berlin, Heidelberg, New York: Springer

Neubrand, J. & Neubrand, M. (2004). Innere Strukturen mathematischer Leistung im PISA-2000-Test. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000* (S. 87 - 107). Wiesbaden: VS - Verlag für Sozialwissenschaften.

Neubrand, M. (1986). Aspekte und Beispiele zum Prozeßcharakter der Mathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1986*, S. 25 - 32.

Neubrand, M. (Hrsg.) (2004). *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000*. Wiesbaden: VS - Verlag für Sozialwissenschaften.

Neubrand, M. (2005). Impulse aus PISA für die mathematikdidaktische Forschung. *Der Mathematikunterricht, 51 (2/3)*, 23 - 35 (2005).

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2)*, S. 3-14.

Tietze, U.-P. (1986). *Der Mathematiklehrer in der Sekundarstufe II: Bericht aus einem Forschungsprojekt*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Weinert, F. E., Schrader, F. W. & Helmke, A. (1989). Quality of instruction and achievement outcomes. *International Journal of Educational Research, 13*, 895-914.

homepage von COACTIV:
http://www.mpib-berlin.mpg.de/coactiv/index.htm

Moderierte Sektionen

Gerald WITTMANN, Schwäbisch Gmünd

Empirische Untersuchungen zum Mathematikunterricht in der Hauptschule

Zum Mathematikunterricht in der Hauptschule gibt es in der Literatur nur wenige empirische Befunde. Sie beziehen sich einerseits auf die Leistungen der Schüler[1], andererseits auf ihre Motivation und ihr Interesse.

Die *Leistungen* der Hauptschüler in PISA 2000 streuen stark (Baumert u.a. 2001, 167ff). Einerseits zählen 24,7 % der 15-Jährigen zur „Risikogruppe"; sie erbringen nur Leistungen auf oder unter Grundschulniveau. Die meisten dieser Schüler dürften wohl eine Hauptschule besuchen. Andererseits gibt es auch unter den Hauptschülern eine Spitzengruppe, die im Mittelfeld der Gymnasiasten mithalten kann. Zwar sind die Leistungen innerhalb einer Schule vergleichsweise homogen, die mittleren Leistungen verschiedener Hauptschulen variieren jedoch sehr stark.

Ferner scheint für Hauptschüler eine bekannte Darbietung von Aufgaben besonders wichtig zu sein, wichtiger als für Realschüler und Gymnasiasten: „Es zeigt sich, dass – gemessen an ihrem Gesamtleistungsniveau – Hauptschüler dann etwas besser abschneiden, wenn eine Aufgabe … nach Art und stofflichem Inhalt vertraut ist" (ebd. 182f). Dieser Sachverhalt wird so interpretiert: „Die typische Hauptschuldidaktik im Fach Mathematik konzentriert sich offenbar auf außermathematische Anwendungen zu Standardthemen. … Es käme darauf an, auch Hauptschüler in geeigneter Form an Anwendungsaufgaben heranzuführen, die ungewohnte Elemente enthalten und auf einfachem Niveau begriffliches Denken erfordern" (ebd. 183).

Bauer (2001) betrachtet Aufgaben, die Hauptschullehrer als für ihren Unterricht charakteristisch ausgewählt haben: „Typische Mathematikaufgaben des Curriculums sind in ihrem Angebot bzw. in ihren Anforderungen auf ein enges Profil im oberen Leistungsbereich ausgerichtet." (ebd. 18) Für nicht wenige Schüler sind diese Aufgaben zu schwer, sie finden keinen Zugang zu einer Lösung. Hieraus erwächst die Forderung nach Differenzierungskonzepten. Insbesondere für die leistungsschwachen Schüler sollte der Stoffumfang reduziert werden, um die Kerninhalte intensiver bearbeiten zu können: „Weil viele Schüler alles lernen sollen, was im Curriculum gefordert wird, gibt es viele Schüler, die nichts gründlich lernen." (ebd. 18)

In Bezug auf die *Motivation* und das *Interesse* zeichnen Erhebungen ein ambivalentes Bild. „Es gibt keine Anzeichen, daß sich in der oft als Rest-

[1] Die Bezeichnungen „Schüler" bzw. „Lehrer" stehen im Folgenden stets für „Schülerinnen und Schüler" bzw. „Lehrerinnen und Lehrer".

schule bezeichneten Hauptschule alle Motivationsprobleme konzentrieren. Nicht einmal die Variabilität der Schulunlust ist in Hauptschulen größer als in anderen Schulformen. Überraschenderweise gilt das auch in Bundesländern, in denen nur noch ein relativ kleiner Teil des Alterjahrgangs die Hauptschule besucht.“ (Baumert u.a. 1997, 168f.) Dieses recht positive Bild bestätigt sich, wenn man das mathematisch-naturwissenschaftliche Interesse betrachtet: „Mathematik und die Naturwissenschaften sind gerade für Hauptschüler ein Feld der Interessenfindung“ (ebd. 168f.), bei allerdings relativ großen Unterschieden zwischen Jungen und Mädchen.

Bauer (2001) stellt hingegen fest, dass beim Lösen der vom Mathematiklehrer ausgewählten Aufgaben nur selten intrinsische Motivation auftritt, sondern das Leistungsmotiv (Hoffnung auf Erfolg, Angst vor einem Scheitern) vieles überlagert.

Die im Folgenden beschriebenen eigenen *empirischen Untersuchungen* können diese Befunde bestätigen und weiter ausdifferenzieren. Insbesondere zeichnen sich verschiedene Zusammenhänge von mathematischen Fertigkeiten und Fähigkeiten einerseits sowie Beliefs andererseits ab.

Als *Konsequenz* hieraus ergibt sich ein enormer Entwicklungsbedarf von passenden Lernumgebungen für den Mathematikunterricht an der Hauptschule. Nötig ist

- einerseits eine gezielte Förderung im Bereich der Wiederholung und Sicherung von Grundwissen, da ein beträchtlicher Teil der Hauptschüler nicht sicher über den Grundschulstoff verfügt;
- andererseits die Schaffung von offenen Situation bzw. Problemsituationen, die kognitiv aktivierend wirken auf dem Niveau der Hauptschüler und ein tieferes Verständnis der Lerninhalte unterstützen können.

In beiden Fällen müssen der Einsatz passender Aufgaben und eine entsprechende Unterrichtsgestaltung Hand in Hand gehen. Das Wachsen von Fertigkeiten und Fähigkeiten kann auch zur Stärkung des Selbstvertrauens beitragen.

Literatur

Bauer, Ludwig. (2001): Texte von Hauptschülern zu Mathematikaufgaben und ihren Lösungen. In: mathematica didactica 24(1), 3–30

Baumert, Jürgen u.a. (1997, Hrsg.): TIMSS – Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen: Leske + Budrich

Baumert, Jürgen u.a. (2001, Hrsg.): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich

Anke WAGNER, Ludwigsburg

„Die 39er-Reihe Reihe“ haben wir noch nicht gelernt“ – Zum Kopfrechnen in der Hauptschule

Auf der Suche nach Antworten auf die Frage, was genau unter dem Begriff *Kopfrechnen* verstanden wird, stößt man in der Literatur auf ein breites Spektrum unterschiedlicher Umschreibungen. Das Kopfrechnen

- ist ein schnelles und flexibles sich Bewegen durch die Welt der Zahlen (Buys 2001, 121),
- findet ohne jegliche Notation im Kopf statt (Krauthausen/Scherer 2003, 40; Reys u.a 1995, 304),
- ist nicht auf das bloße Abrufen von Ergebnissen aus dem Gedächtnis zu reduzieren, sondern es erfolgt vielmehr auch ein Prozess des Nachdenkens (Treffers 1997, 20),
- kann nicht auf einen bestimmten Zahlbereich (Beispiel: kleines 1×1) reduziert werden (Buys 2001, 121).

Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit genau dieser Thematik und berichtet von einer Studie in dem bislang noch wenig erforschten Bereich der Hauptschule.

Die Studie gliedert sich in 3 Teile. In einer *Untersuchung 1* (U1) wurden zunächst die Kopfrechenleistungen von Hauptschülern der Orientierungsstufe ermittelt. In einem zweiten Teil wurde ein *Unterrichtskonzept* entwickelt und in der Praxis evaluiert. Der letzte Teil der Studie, eine *Nachuntersuchung* (U2), soll Aufschluss darüber geben, ob in der Versuchsklasse im Vergleich zu einer Kontrollklasse ein Leistungszuwachs beobachtet werden konnte.

An der U1 nahmen 5 Schulen mit je 2 fünften Klassen teil (n = 185). In allen Klassen wurden 4 schriftliche Tests durchgeführt. Im Anschluss daran folgten klinische Interviews in je einer der beiden Klassen einer Schule (n = 90). Das Unterrichtsexperiment fand in einer der untersuchten Klassen (n = 22) statt. In der U2 wurden alle Tests und Interviews der U1 nochmals in der Versuchsklasse und in einer Kontrollklasse durchgeführt.

Die vorgestellten Ergebnisse beziehen sich auf die U1 der Studie. Eine Analyse der Daten zum *kleinen 1×1 und 1:1* ergab folgende *Fehlerschwerpunkte*: die Reihen mit 6, 7, 8 und 9, ebenso Aufgaben mit Nullen. Die Fehlerquote lag hierbei im Schnitt (ausgenommen die Aufgabe $0 \cdot 0$) bei 13%. Beim kleinen 1:1 sind Aufgaben mit hohem Divisor bzw. Quotienten stark fehlerbehaftet. Die drei schwierigsten Aufgaben waren 48 : 6 (31%), 48 : 8 und 63 : 9 (je 29%). Aufgaben der Bauart 0 : n (0 : 8) wurden häufig falsch gelöst. Schwierigkeiten bereiteten den Schülern auch Aufgaben der

Art n : n (5 : 5) und Aufgaben mit dem Divisor 1 (8 : 1). Als Hauptursachen für fehlerhafte Lösungen konnten 2 Faktoren bestimmt werden. Zum einen wurde festgestellt, dass Aufgaben mit hohen Faktoren, Divisoren, Quotienten zu Beginn der 5. Klasse von einem Großteil der Schüler noch nicht hinreichend automatisiert worden sind. Die Schüler konnten in der vorgegebenen Zeit (ca. 7 sec) die Ergebnisse der Aufgaben nicht aus dem Gedächtnis abrufen. Andererseits wurden Aufgaben mit einem Faktor gleich 0 (wie 0 · 8 oder 8 · 0) scheinbar falsch automatisiert. Dies äußerte sich durch Häufungen bei bestimmten Ergebnissen. So notierten 76,9% der Schüler, die bei der Aufgabe 0 · 8 ein falsches Ergebnis ermittelten, als Ergebnis die Zahl 8.

Die erhobenen *qualitativen Daten zum großen 1×1*[2] *und 1:1* wurden analysiert im Hinblick auf die von den Schülern verwendeten Strategien und mit Blick auf die Schülerfehler. Dies führte zu folgender Kategorisierung:

Strategien bei Malaufgaben	*Strategien bei Geteiltaufgaben*
• Faktor zerlegen (3 · 29 = 3 · 20 + 3 · 9) • Fortgesetzte Addition (4 · 36 = 36 + 36 + 36 + 36) • Faktor aufrunden (9 · 14 = 10 · 14 − 1 · 14) • Verdopplung (125 · 4 = 125 · 2 · 2 = 250 · 2 = 500) • Mal 10 durch 2 (17 · 5 = 17 · 10 : 2) • Ziffernrechnen (3 · 29 wird gerechnet: 9 · 3 = 27, schreibe 7, behalte 2, 2 · 3 = 6, 2 + 6 = 8, also 87; oder: 3 · 29 = 3 · 2 + 3 · 9 (falsch) • Wegstreichen von Nullen (40 · 30 = 4 · 3 + 2 Nullen) • Keine Strategie/Sonstiges	• Zerlegen des Dividenden (39 : 3 = 30 : 3 + 9 : 3) • Fortgesetzte Addition/Subtraktion (75:15 wird gerechnet: 15 + 15 = 30, 30 + 15 …; oder: 75 − 15 = 60, 60 − 15 = 45 …) • Dividend aufrunden (360 : 40 wird gerechnet: 400 : 40 = 10, also 9) • Approximation durch Probieren (96 : 2 = 45, 45 · 2 = 90, ist zu wenig; 75 : 15 wird gerechnet: 4 · 15 = 60, also 75 = 5 · 15) • Wegstreichen von Nullen (360 : 40, also 36 : 4) • Ziffernrechnen (56 : 4 = 5 : 4 = 1, 1 · 4 = 4, schreibe 4, 5 − 4 = 1, schreibe 1, 6 : 4 = 1, 1 · 4 = 4 (falsch, Sprechweise der Schüler) • Keine Strategie/Sonstiges

Die erheblichen *Fehlerquoten* beim großen 1×1 und 1:1 (s. exemplarisch nachfolgende Tabelle) weisen auf hohe Defizite hin.

[2] Traditionellerweise zählen Aufgaben, deren einer Faktor zwischen 0 und 10 und deren anderer Faktor zwischen 10 und 20 liegt, zum großen 1×1. Der Einfachheit halber wird hier der Begriff auch für Aufgaben verwendet, die darüber hinaus gehen, aber dennoch im Kopf gelöst werden können.

Aufgabe	25 · 5	9 · 14	4 · 36	39 : 3	56 : 4	96 : 2
Fehlerquote	26,7%	34,4%	62,2%	18,9%	47,8%	62,2%

Die Lösungswege wurden auf Fehler hin untersucht: Die Schülerfehler sind in ihrer Gesamtheit sehr heterogen, dennoch konnten Häufungen festgestellt werden.

Bei multiplikativen Aufgaben entstanden die meisten Fehler dadurch, dass die Schüler mit Ziffern rechneten, indem sie sich den schriftlichen Algorithmus im Kopf vorstellten. Nicht selten wurde hierbei die in der Grundschule gelernte Sprechweise verwendet. Der prozentuale Anteil an Fehlern verteilt sich auf folgende Hauptkategorien: Ziffernrechnen (32,8%), Einmaleinsfehler (11,6%), Anwenden der Strategie (11,0%), Additionsfehler (10,6%) und Nullenfehler (10,5%). Betrachtet man die Nullenaufgaben gesondert, so sind mehr als ein Drittel der Fehler (34,4%) auf einen fehlerhaften Umgang mit der Null zurückzuführen. In den Interviews beschrieben Schüler ihre Vorgehensweise mit Floskeln wie „hinzufügen“ oder „wegtun“, ohne erklären zu können, welche mathematische Vorgehensweise sich dahinter verbirgt.

Auch bei Geteiltaufgaben zeigte sich eine Vielfalt unterschiedlicher Schülerfehler. Die Hauptursache kann auf fehlende Strategien zurückgeführt werden (20,2%). Weitere Fehlerhäufungen konnten festgestellt werden beim Aufsagen der Reihe (16,0%), beim Anwenden der Strategie (12,8%), beim Ziffernrechnen (12,5%), durch Nullenfehler (11,7%) und durch fehlerhaftes Zerlegen des Dividenden (9,9%).

Die Ergebnisse der Studie und insbesondere die genaue Analyse von Fallbeispielen zeigen, dass die Beobachtung lernschwacher Schüler produktiv und bereichernd sein kann, da hier durchaus Rückschlüsse auf schulisches Lernen gezogen werden können, und das nicht nur für die Hauptschule, sondern auch für den Primarbereich.

Literatur

Buys, Kees (2001): Mental arithmetic. In: van den Heuvel-Panhuizen, Marja (Hrsg): Children learn mathematics. Freudenthal Institute, Utrecht University, 121–146

Teffers, Adri (1997), Angewandtes Rechnen – Realistischer Mathematikunterricht in den Niederlanden. In: Die Grundschule 29(3), 19–22

Krauthausen, Günther/Scherer, Petra (2003): Entwicklung arithmetischer Fertigkeiten und Strategien – Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen. In: Fritz, Annemarie u.a. (Hrsg.): Rechenschwäche. Beltz: Weinheim, 80–97

Reys, Robert E. u.a. (1995): Mental computation performance and strategy use of japanese students in grades 2, 4, 6 and 8. In: Journal for Research in Mathematics Education 26(4), 304–326

Gerald WITTMANN, Schwäbisch Gmünd

Zum Zusammenhang von Lösungswegen und Beliefs in der Bruchrechnung

Die Frage, welchen Einfluss die Beliefs von Schülern (ihre Vorstellungen von Mathematik und Mathematikunterricht sowie daraus resultierende Einstellungen) auf deren Leistungen haben, wird immer wieder diskutiert. So beschreibt Grigutsch (1996) eine Korrespondenz von Selbstbild und Mathematikbild, während Köller u.a. (2000) von einem Mediatorenmodell mit Fachinteresse, Kurswahl und Lernstrategien als vermittelnden Variablen ausgehen.

Untersuchungsdesign

Auch die vorliegende *qualitative Studie* verfolgt diese Frage. Konkret wird der *Zusammenhang von Lösungswegen und Beliefs bei Hauptschülern am Beispiel der Bruchrechnung* untersucht. Hierbei werden sowohl *Standardaufgaben*, die eine kalkülhafte Rechnung zulassen, als auch offene *Aufgaben zur Erhebung von Grundvorstellungen* einbezogen (s. Kasten). Der Aufbau adäquater Grundvorstellungen ist ein wesentliches Element des Bruchenrechenunterrichts (vgl. Padberg 2002); gleichzeitig belegen empirische Befunde, dass nicht adäquate inhaltliche Vorstellungen eine häufige Fehlerursache sind („Brüche bei den Brüchen“, Prediger 2004; „Grundvorstellungsumbrüche“, Wartha 2005).

Berechne: $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$

Gib einen Bruch an, der kleiner als $\frac{1}{8}$ ist.

Wie viele Brüche liegen zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$?

In einem offenen *Leitfadeninterview* wird jedem Schüler ein aus 7 bis 9 Aufgaben bestehendes Aufgabenset zur Bruchrechnung vorgelegt. Es umfasst beide oben beschriebene Aufgabenkategorien. Im Interview werden einerseits die *Lösungswege der Schüler* beobachtet („Lautes Denken“) und andererseits Fragen zur *Einschätzung der Aufgaben und zur Schilderung von Unterricht* gestellt. Die Auswahl der Probanden erfolgt gezielt („Theoretical Sampling“), wobei Klassen von „Expertenlehrern“ einbezogen werden, um auch positive Beispiele zu finden. Insgesamt liegen bislang 41 Interviews vor (Haupt- und Realschule, Jahrgangsstufen 6 und 8).

Untersuchungsergebnisse

Bei den Standardaufgaben fallen die Bearbeitungen sehr unterschiedlich aus – von raschen, sicheren Lösungen bis hin zur bekannten Fehlerstrategie „Zähler plus Zähler durch Nenner plus Nenner“ bei der Addition von Brüchen. Überraschend sind vor allem der hohe Zeitaufwand, den manche Schüler bei diesen Aufgaben benötigen, und die enorme Anstrengung, die

sie ihnen abverlangen. Nicht zuletzt wird die eigentliche Bruchrechnung von Problemen bei den Grundrechenarten überlagert – auch das Erweitern zu einem Hauptnenner 12 gelingt nicht immer sicher und fehlerfrei.

Die Lösungsschemata bei Standardaufgaben sind häufig instabil. So fällt es Schülern vielfach schwer, innerhalb der Schemata mathematisch wesentliche Elemente von Konventionen (z.B. in welcher Form etwas notiert wird) zu unterscheiden. Die Schemata stellen dann eher eine Belastung denn eine Entlastung dar, wenn die Angst, etwas falsch zu machen, den Bearbeitungsprozess dominiert. Ferner bieten die Lösungsschemata den Schülern keine Kontrollmöglichkeiten: Falsche Schemata werden auf diese Weise nicht identifiziert, sondern – im schlimmsten Fall – sogar gefestigt.

Auch bei den Grundvorstellungen zeigt sich weites Spektrum. Adäquate Vorstellungen sind *Bruch als Teil eines Ganzen* (verbale Beschreibung oder ikonische Darstellung) sowie *Bruch als Quotient* (ansatzweise oder vollständige Umwandlung des gemeinen Bruchs in einen Dezimalbruch). Nicht adäquate Vorstellungen kommen zum Ausdruck in Lösungsansätzen, die für natürliche Zahlen passen, nicht jedoch für Bruchzahlen, sowie in quasikardinalen Argumentationen, die im vorliegenden Fall nicht greifen, weil jeweils ein Übergang zu einem anderen Nenner nötig ist.

Die Beliefs in Bezug auf Mathematikunterricht lassen sich so beschreiben:

- Es dominieren *rezeptive Lerntheorien*. Typisch hierfür ist die Äußerung, dass die Lehrkraft Aufgabenlösungen ausführlich vorbesprechen muss, bevor sie von den Schülern praktiziert werden können. Sie empfinden damit eine hohe Abhängigkeit von der Lehrkraft und klagen über Disziplinprobleme, die den unterrichtlichen Vermittlungsprozess stören.
- Prinzipiell wollen die Schüler *die Lerninhalte verstehen* – dies gilt als eine wesentliche Voraussetzung für „Spaß“ – und *Erfolge erzielen*. Begrenzt wird dieses Wollen durch eine niedrige Frustrationsgrenze und vielfältige Probleme (z.B. Konzentrationsschwierigkeiten).
- Häufig *überlagern Versagensängste das fachbezogene Interesse*.
- Es tritt eine *relativ stabile und fachbezogen-globale Selbsteinschätzung* zu Tage, die das Verhalten der Schüler im Unterricht beeinflusst.

Diese Beliefs korrespondieren damit, dass die Schüler in den Interviews Aufgaben häufig danach sortieren, ob sie sie kennen oder nicht. Es tritt von Seiten der Schüler kein Lösungs*prozess* auf – dieser wird, wenn er stattfindet, erst durch Impulse des Interviewers angestoßen.

Diskussion und Folgerungen

Die Untersuchung bestätigt die enorme *Bedeutung von Grundvorstellungen*. Diesbezüglich lassen sich zwei Aspekte unterscheiden:

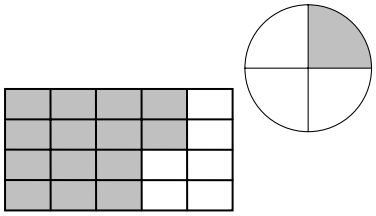
- Sie bilden eine wichtige *inhaltliche Basis zum Lösen offener Aufgaben* in der Bruchrechnung und sind damit eine wesentliche Voraussetzung dafür, dass überhaupt ein Lösungs*prozess* in Gang kommen kann.
- Darüber hinaus sind sie *mit den Beliefs verknüpft*: Durch die Fähigkeit, selbstständig Probleme lösen zu können, gewinnen die Schüler *Vertrauen in ihre eigenen Fertigkeiten und Fähigkeiten*.

Als Konsequenz für den Unterricht ergibt sich die Forderung, adäquate Grundvorstellungen gezielt aufzubauen und auch in der Folge explizit damit zu arbeiten. Aufgaben wie die im Kasten dargestellten finden sich bislang nur in wenigen Schulbüchern, insbesondere nicht in solchen für die Hauptschule. Darüber hinaus gehen offene Impulse, wie die eingangs dargestellten Interviewfragen oder das Schreiben von Rechengeschichten. Hier ist weitere Entwicklungsarbeit nötig, insbesondere um die in der Hauptschule problematische „Sprachlastigkeit“ der Aufgaben zu verringern.

Gib für den gefärbten Teil der Fläche einen Bruch an.

Welcher der beiden Brüche lässt sich kürzen?
Begründe dies anhand der Zeichnung.

Erweitere die Brüche mit 2 und stelle das Erweitern in der Zeichnung dar.



Jedoch müssen sich nicht nur die Aufgaben ändern, sondern auch deren Bearbeitung im Unterricht: Dies lässt sich unter Schlagworten wie „Zielklarheit“ oder „Explizitmachen von Lösungswegen“ zusammenfassen. Das bewusste Lernen von Mathematik, das auch eigene Fertigkeiten und Fähigkeiten offen legt und betont, scheint ein wesentlicher Schritt hin zur Veränderung der passiv-rezeptiven Sichtweise von Mathematikunterricht zu sein.

Literatur

Grigutsch, Stefan (1996): Mathematische Weltbilder von Schülern. Struktur, Entwicklung, Einflussfaktoren. Dissertation: Universität-Gesamthochschule Duisburg

Köller, Olaf u.a. (2000): Epistemologische Überzeugungen und Fachverständnis im Mathematik- und Physikunterricht. In: Baumert, J. u.a. (Hrsg.): TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Band 2: Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe. Leske + Budrich: Opladen, 229–269

Padberg, Friedhelm (2002): Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche und Dezimalbrüche. Spektrum: Heidelberg (3. Auflage)

Prediger, Susanne (2004): Brüche bei den Brüchen – umschiffen oder aufgreifen? In: mathematik lehren 123, 10–13

Wartha, Sebastian (2005): Fehler in der Bruchrechnung durch Grundvorstellungsumbrüche. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, 593–596

Katja MAASS, Freiburg

Mathematik zwischen Schülervorstellungen und Bildungszielen – erste Ergebnisse einer empirischen Studie

Der Mathematikunterricht soll Schülern u.a. helfen, Mathematik im Alltag anzuwenden. PISA hat jedoch gezeigt, dass dieses Ziel insbesondere in der Hauptschule nicht erreicht wird. Um Einblicke in den Unterrichtsalltag und Hinweise für die adressatengerechte Entwicklung von Unterrichtskonzepten zu bekommen, wendet sich diese Studie den Hauptschülern und ihren Vorstellungen von Mathematik zu.

Theoretischer und methodologischer Hintergrund

Beliefs setzen sich aus relativ überdauerndem subjektivem Wissen von bestimmten Objekten sowie damit verbundenen Haltungen zusammen (Pehkonen/Törner 1996). Grigutsch (1996) unterscheidet bei mathematischen Beliefs zwischen Schema-, Prozess-, Formalismus- und Anwendungsaspekt. Darüber hinaus gibt es sog. nicht-fachspezifische Beliefs, die sich i.W. auf den Mathematik*unterricht* beziehen. Diese können einen kognitiven Schwerpunkt (u.a. „Texte sind im Matheunterricht nicht wichtig“) oder einen affektiven Schwerpunkt haben (z.B. „Mathe ist gut, wenn Gruppenarbeit gemacht wird“) (vgl. Maaß 2004).

Die vorliegende Studie ist qualitativ und hat das Ziel, die mathematischen Beliefs von Hauptschülern detailliert zu explorieren und den Mathematikunterricht aus deren Sicht zu erforschen. Dabei geht es nicht darum, sehr viele Schüler zu befragen, sondern vielmehr die Beliefs in ihrer Breite zu erfassen. Grundlage der Studie ist die Grounded Theory (vgl. Flick 2000) und damit auch das Prinzip der Offenheit. Es wurden Leitfaden-Interviews mit Aufgaben (auch offene, realitätsbezogene) eingesetzt. Als Versuchspersonen wurden bislang 40 Schüler aus Klasse 5 und 8 ausgewählt, weitere Erhebungen folgen gemäß des theoretischen Samplings. Die Daten werden mithilfe des theoretischen Kodierens ausgewertet, dabei werden Kategorien sowohl anhand von In-vivo-Codes gebildet als auch – soweit passend – vorhandene Kategorien genutzt (Flick 2000).

Ergebnisse der Studie

Wie sehen Hauptschüler Mathematik?

1. Viele der jüngeren Schüler scheinen i.W. *schemaorientierte Beliefs* zu haben. Bei ihnen scheint die Vorstellung vorzuliegen, dass die Lehrkraft die Regeln erklären muss und anschließend geübt wird. Darüber hinaus wird Mathematik bei den untersuchten 11-Jährigen vorwiegend mit Rech-

nen und Zahlen gleichgesetzt („da muss man nur rechnen, zusammenzählen oder abziehen."). Diese Äußerung zeigt ein allgemeines und eingeschränktes Verständnis von Mathematik, das auf schemaorientierte Vorstellungen deuten könnte, ebenso wie einige kognitiv geprägte nicht-fachspezifische Beliefs: So waren viele Schüler der Meinung, dass im Mathematikunterricht keine Texte geschrieben werden müssen und man zum Lösen von Mathematikaufgaben im Unterricht nur wenige Minuten benötigt. Bei den 15-jährigen Schülern sind Aussagen, die sich allgemein auf das Rechnen beziehen, weniger zu finden, dafür eher solche zur Regelhaftigkeit von Mathematik („[Wir] schreiben dann die Regel in unser Regelheft rein, …, das haben wir auch immer bei uns, falls wir das vergessen").

2. Unter der *Nützlichkeit von Mathematik* scheinen leistungsschwache Schüler vor allem die unmittelbare Nützlichkeit im Alltag und im Beruf zu subsumieren. Die 11-jährigen Schüler denken dabei i.W. an das Einkaufen. Der überwiegende Teil der Schüler scheint allerdings der Meinung zu sein, dass man Mathematik im Alltag fast gar nicht benötigt. Bei den 15-Jährigen scheinen etwas mehr Schüler eine Nützlichkeit von Mathematik zu sehen. Einige konkrete Beispiele werden genannt. Vorstellungen, die auf das Weltverständnis zielen, konnten aber in beiden Gruppen nicht rekonstruiert werden.

3. Häufig konnten *affektiv geprägte nicht-fachspezifische Beliefs* rekonstruiert werden. Einen großen Stellenwert scheint die Ruhe im Klassenzimmer einzunehmen, die als wichtig zum Arbeiten erachtet wurde. Einige Aussagen deuten Zusammenhänge mit erheblichen Disziplinproblemen an. Zentral scheint auch der enge Zusammenhang zwischen dem von den Schülern wahrgenommenen Verständnis und Spaß zu sein.

Wie nehmen die Schüler den Mathematikunterricht wahr?

Insbesondere einige der 15-Jährigen gaben detaillierte Beschreibungen des Unterrichts ab („Der Lehrer, der tut das mal erst mal am Anfang …wiederholen, … dann tut er uns Aufgaben im Buch … die sollen wir dann rechnen. … Danach tut er … die Ergebnisse dann an die Tafel schreiben"). Auf Erklärungen des Lehrers scheinen Übungen zu folgen, die anschließend besprochen werden. Die häufigste Unterrichtsform scheint der Frontalunterricht zu sein, Gruppenarbeit wird kaum genannt. Lesen und Schreiben scheinen keine große Bedeutung zu haben, was darauf deuten könnte, dass Argumentationen und Begründungen im Unterricht nicht wesentlich sind.

Wie gehen Hauptschüler mit offenen Aufgaben um?

Die befragten Schüler zeigten in der Regel Interesse für die vorgelegten Standardaufgaben, lehnten jedoch die offenen Aufgaben (z.B. „Wie viel

Zeit hast du bisher in deinem Leben mit Essen verbracht?“) ab. Als Begründung wurde häufig angegeben, dass Angaben fehlen oder die Aufgabe nicht zum Mathematikunterricht gehöre. Viele hatten erhebliche Probleme beim Lösen dieser Aufgabe. Mit einfachen Motivationshilfen gelang es jedoch recht vielen Schülern, einen Lösungsansatz zu finden.

Bereits die ersten Ergebnisse zeigen, dass die mathematischen Beliefs von leistungsschwächeren Schülern vielfältig sein können. Die Beliefs scheinen sich auf einem Kontinuum von fachspezifischen Beliefs bis hin zu nicht-fachspezifischen Beliefs zu verorten. So wurde bei der Auswertung der Schüleraussagen deutlich, dass sich einige kognitiv geprägte nicht-fachspezifische Beliefs zwar auf den Mathematikunterricht beziehen, gleichzeitig aber auch Hinweise auf den Schemaaspekt liefern. Darüber hinaus scheint es allgemeine kognitiv geprägte nicht-fachspezifische Beliefs (z. B. „Mathematik ist ein Hauptfach“) zu geben. Die Vielfalt dieser Beliefs ergänzt bestehende Kategoriensysteme, eine entsprechende Kategorisierung am Ende der Studie wird angestrebt.

Zusammenfassung und erste Konsequenzen

Die ersten Ergebnisse der Studie deuten darauf hin, dass der Mathematikunterricht in der Hauptschule in den untersuchten Fällen hinter den Bildungszielen zurückbleibt. In der Stichprobe sind schemaorientierte Vorstellungen verbreitet und anwendungsorientierte kaum ausgeprägt, und zwar beides in sehr viel stärkerem Maße als am Gymnasium (vgl. Maaß 2004). Die Schüler reagieren unsicher auf offene, realistische Problemstellungen. Die Tatsache, dass diese Aufgaben vielfach gelöst werden konnten, wenn die Schüler Barrieren im Schätzen überwanden, deuten darauf hin, dass es sinnvoll sein könnte, sie in den Unterricht der Hauptschule zu integrieren. Im Hinblick auf die affektiv geprägten nicht-fachspezifischen Beliefs könnte es sinnvoll sein, alternative Arbeitsformen (z.B. Gruppenarbeit) zu praktizieren. Weitere Erhebungen im Sinne des theoretischen Samplings werden zeigen, inwieweit sich diese Hypothesen manifestieren.

Literatur

Flick, Uwe (2000): Qualitative Forschung – Rowohlt: Reinbek bei Hamburg.

Grigutsch, Stephan (1996): Mathematische Weltbilder von Schülern. Struktur, Entwicklung, Einflussfaktoren. Dissertation, Universität-Gesamthochschule Duisburg

Maaß, Katja (2004): Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer empirischen Studie. Franzbecker: Hildesheim/Berlin

Pehkonen, Erkki/Törner, Günther (1996): Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 28(4), 101–108

Regina BRUDER, Darmstadt, Alexander JORDAN, Kassel, Marina STRÖBELE, Christina COLLET, Darmstadt

Moderierte Sektion: Lehrerfortbildung und Schülerleistungen

In der Reaktion auf die Ergebnisse der internationalen Vergleichsstudien TIMS und PISA ist die Lehreraus- und –fortbildung wieder mit spürbarem gesellschaftlichen Interesse bedacht worden, was sich z.B. in der Einrichtung solch breit angelegter bundesweiter Lehrerfortbildungsprojekte wie SINUS-Transfer zeigt, vgl. www.sinus-transfer.de. Im Mittelpunkt des BLK-Projektes SINUS-Transfer für Mathematik und Naturwissenschaften steht die Verbesserung der Unterrichtsqualität über gemeinsame Fortbildungen der Fachschaften an den Schulen und die gemeinsame Entwicklung und der Austausch von Unterrichtsmaterialien. Die Philosophie dieses Projektes ist eine bodenständige Orientierung am Unterrichtsalltag und den Ideen und Möglichkeiten zur inhaltlichen und methodischen Weiterentwicklung des Unterrichts von engagierten Lehrkräften vor Ort.

Die konkrete Gestaltung des Projektes sieht in den einzelnen Bundesländern unterschiedlich aus. In Hessen konnte zum Abdecken des Fortbildungsbedarfs an den in der 1.Welle 2003-2005 beteiligten 51 Schulen auf einer Gruppe von Lehrkräften aufgebaut werden, die in einem von der Universität Kassel (Blum/Jordan) auch inhaltlich betreuten Vorläuferprojekt SINUS bereits zu Multiplikatoren insbesondere für eine neue Aufgabenkultur ausgebildet wurden.

Ein anderer, stärker forschungsorientierter Ansatz wird mit dem seit 2000 von der DFG geförderten Schwerpunktprogramm Bildungsqualität Schule (BIQUA) verfolgt. Hier werden systematisch theoriegestützte Unterrichtskonzepte entwickelt und erprobt und im Rahmen von Feldstudien seit 2004 unter den komplexen Bedingungen des Unterrichtsalltags evaluiert. Ein Beispiel dafür ist das Darmstädter Projekt PROSA (Bruder/Schmitz) zur Förderung von Problemlösenlernen in Verbindung mit Selbstregulation, Details unter www.math-learning.com.

Das Forschungsinteresse in dem noch jungen Zweig der fachdidaktischen Evaluationsforschung ist auf beide Projekttypen gerichtet.

Über Effekte von Fortbildung auf die subjektiven Theorien der Lehrkräfte und ihre Handlungskompetenz zur Weiterentwicklung der Unterrichtsqualität bis hin zu Auswirkungen auf die Lernergebnisse und Mathematikvorstellungen von Schülern ist bisher kaum etwas bekannt.

In dieser Sektion werden drei Studien vorgestellt, die systematisch Veränderungen in den Lehrervorstellungen und Handlungskompetenzen zur

nachhaltigen Unterrichtsgestaltung und parallel dazu auch Leistungsentwicklungen bei den Schülern mit jeweils unterschiedlichen Instrumenten beobachtet haben.

Alexander Jordan (Kassel) stellt Lernergebnisse und Testresultate in Klasse 9 und 10 in Korrespondenz zur Videodokumentation von Unterrichtsprozessen vor mit dem Thema: "Verändertes Lernen – verbesserte Leistungen?" im Schulset Nordhessen (SINUS Transfer). Hier konnte man sich auf Fortbildungsbausteine zur veränderten Aufgabenkultur stützen, die bereits im vorangegangenen SINUS-Durchlauf entwickelt wurden und die in den Klassen 9 und 10 unterrichtenden Lehrkräfte hatten überwiegend Erfahrung aus mehrjähriger Projektmitarbeit.
Marina Ströbele (Darmstadt) stellt Ergebnisse einer weiteren vertiefenden Evaluation im Lehrerfortbildungsprojekt SINUS-Transfer in Nordhessen für die Klassen 5 und 6 vor. Hier waren viele Lehrkräfte beteiligt, die noch wenig Projekterfahrung hatten. Der Untersuchungsschwerpunkt lag auf der Entwicklung der Schülerleistungen von Klasse 5 bis 6 in über 40 Schulklassen überwiegend in den nicht gymnasialen Schulformen.
Christina Collet (Darmstadt) berichtet über eine von der DFG geförderte Studie im Projekt PROSA im Schuljahr 2004/2005 mit 50 Lehrkräften, die u.a. auch mit einem internetgestützten Fortbildungskonzept zum Problemlösenlernen kombiniert mit Selbstregulation geschult wurden, vgl. www.prolehre.de. Effekte des Konzeptes auf Lehrerseite konnten z.B. mit Hilfe von repertory grid Befragung und teilstandardisierten Stundenberichten als Monitoringinstrument nachgewiesen werden.

In allen drei Studien konnten spezifische Leistungszuwächse erzielt werden, deren unterschiedlicher Hintergrund jeweils erläutert wird. Insbesondere liegen auch Schülerergebnisse zu Ankeritems vor, die in den Tests von Klasse 5 bis 10 in allen drei Studien gleichermaßen eingesetzt wurden.

Literatur:

HELMKE, A. (2003): Unterrichtsqualität erfassen – bewerten – verbessern. Seelze: Kallmeyer
JERUSALEM, M. & SCHWARZER, R. (1999): Skalen zur Erfassung von Lehrer- und Schülermerkmalen. Internet: http://www.fu-berlin.de/schulen/skalen.htm
LEUDERS, T. (2001): Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Skriptor
REISCHMANN, J. (2003): Weiterbildungs-Evaluation. Lernerfolge messbar machen. Neuwied: Luchterhand
WEINERT, F.E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: Weinert (Hrsg.): Leistungsmessung in Schulen. Weinheim, Basel: Beltz

Christina COLLET, Regina BRUDER, Evelyn KOMOREK, Bernhard SCHMITZ, Technische Universität Darmstadt

Ein Fortbildungskonzept zum Problemlösenlernen in Verbindung mit Selbstregulation im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und deren Effekte für Lehrer und Schüler

1. Ziele und Hintergrund des Fortbildungskonzepts

Die vorliegende Studie zu einem Lehrerfortbildungskonzept zum Problemlösenlernen in Verbindung mit Selbstregulation im Mathematikunterricht ist ein Teilprojekt des von der DFG geförderten Schwerpunktprogramms BIQUA, vgl. http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/biqua.
Ziel der Interventionsstudie ist mit der Implementation eines Fortbildungskonzeptes zu Problemlösen und Selbstregulation eine Förderung entsprechender Kompetenzen bei den Schülern im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I.
Im Vorfeld der hier vorgestellten Untersuchung wurde ein materialgestütztes Unterrichtskonzept, das auch ein Hausaufgabenkonzept beinhaltet, entwickelt und in der ersten Phase der Lehrerausbildung an der Technischen Universität Darmstadt sowie im Referendariat erprobt und erfolgreich evaluiert, vgl. Komorek, Bruder und Schmitz (2004) und Komorek (2005).
Eine der Hintergrundideen dieses Unterrichtskonzepts lautet: Mathematische Problemlösekompetenzen werden erworben durch Förderung von Erscheinungsformen geistiger Beweglichkeit (Reduktion, Reversibilität, Aspektbeachtung und Aspektwechsel) über das Ausbilden von Teilhandlungen des Problemlösens in Verbindung mit einer zeitweilig bewussten und zunehmend unterbewussten Anwendung von Heurismen.
Das entwickelte Unterrichtskonzept basiert auf einem Vier-Phasenmodell des Problemlösenlernens als langfristigem Lehr- und Lernprozess nach Bruder (2003):

I. Intuitives Gewöhnen an heuristische Methoden und Techniken
II. Bewusstmachen spezieller Heurismen anhand eines Beispiels
III. Bewusste Übungsphase
IV. Kontexterweiterung der Strategieanwendung

In den Fortbildungsveranstaltungen, basierend auf dem Unterrichtskonzept, wurden die beteiligten Lehrkräfte zu Beginn und während des ersten Schulhalbjahres 2004/2005 geschult. Das erlernte Konzept sollte von den Lehrern schrittweise angereichert und schließlich während des gesamten Schuljahres in einer 7. oder 8. Klasse umgesetzt werden. Als Materialunterstützung diente u.a. die an der TU Darmstadt entwickelte Aufgabendatenbank (www.madaba.de). Parallel zu dieser Datenbank wurde eine öffentlich verfügbare Lernplattform zum Thema Problemlösenlernen für Lehrkräfte (www.problemloesenlernen.de) aufgebaut.

2. Untersuchungsdesign

Die Intervention im Feld mit dem Fortbildungskonzept umfasst 50 Schulklassen der Klassenstufe 7 und 20 Schulklassen der Klassenstufe 8 von insgesamt 9 Schulen. Zur Effektmessung wurden verschiedene Instrumente miteinander kombiniert. Das Bild der Lehrer vom Lehren und Lernen von Mathematik, sowie ihre Sicht auf Mathematikaufgaben wurde durch die drei Instrumente Lehrerfragebogen, standardisierte Stundenberichte und durch eine weiter entwickelte Repertory Grid Befragung (vgl. Bruder, Lengnink & Prediger 2003) erfasst. Darüber hinaus liegen verschiedene Arbeitsprodukte der beteiligten Lehrkräfte vor. Auf Schülerseite dienen die beiden Instrumente Schülerleistungstest und Schülerfragebogen im Pre-Post-Vergleich der Erfassung der Wirkungen des Unterrichts von den fortgebildeten Lehrkräften. Der Fokus des Schülerleistungstests liegt auf der Messung der Effekte bezüglich des Problemlösenlernens über ein Schuljahr und weniger auf dem Lernzuwachs zum behandelten neuen Stoff. Daher wurden als Aufgabenformate neben Multiple-Choice-Aufgaben auch offene Antwortformate gewählt, um unterschiedliche Lösungswege erfassen zu können. So konnte auch eine Analyse der Lösungswege unter dem Blickwinkel von Heurismen erfolgen. Der Test wurde als open-ended Test mit einem wellenförmigen Anforderungsprofil entwickelt.
Im Folgenden wird lediglich auf ausgewählte Effekte, die mit dem Schülerleistungstest und mit der Repertory Grid Befragung gemessen wurden, eingegangen. Nähere Informationen zur Studie und die Instrumente befinden sich unter: www.math-learning.com.

3. Einige Ergebnisse auf Schüler- und Lehrerseite

In den Klassenstufen 7 und 8 der Gymnasien und der Haupt- und Realschulen konnte im Schülerleistungstest eine Verbesserung der Lernleistungen insbesondere der Problemlösekompetenz im Laufe des Schuljahres um 10 bis 15 Prozentpunkte festgestellt werden. Die größten Leistungszuwächse sind hypothesenkonform bei mittelstarken und leistungsschwächeren Schülern erzielt worden. Eine Analyse der von den Schülern im Leistungstest verwendeten Heurismen zeigt, dass die vermehrte Verwendung einhergeht mit einer Leistungssteigerung. Dabei hat sich die Anzahl der von den Schülern zur Lösung verwendeten Heurismen im Laufe des Schuljahres in allen Schulformen etwa verdreifacht.
Die eingesetzte Repertory Grid Befragung erfasst subjektive Theorien der Lehrkräfte über Mathematikaufgaben und wurde zu Beginn der Fortbildung und identisch noch einmal nach einem Jahr eingesetzt. Den Lehrern wurden mehrere Aufgabenpaare vorgelegt. Sie wurden aufgefordert, Unterscheidungsmerkmale der Aufgaben eines Paares zu benennen. Die von den

Lehrern genannten Unterscheidungsmerkmale der vorgelegten Aufgaben wurden Kategorien zugeordnet, die in drei Aspekte eingeteilt wurden: „Äußeres“: Äußere Merkmale der Aufgabe, expliziter mathematischer Gehalt. „Inneres“: Aufgabenstruktur in Bezug auf das Handlungsziel, Schwierig-keitsgrad und Art der erforderlichen Schülertätigkeit.„Übergeordnetes“: Didaktische Funktion im Lernprozess, Lösungsstrategien.
Im Pre-Post-Vergleich der Lehrerprofile können u.a. eine Verschiebung innerhalb der drei Aspekte (Abb.1) oder eine Erhöhung der genannten Merkmale innerhalb der einzelnen Aspekte festgestellt werden, vgl. Abb.2.

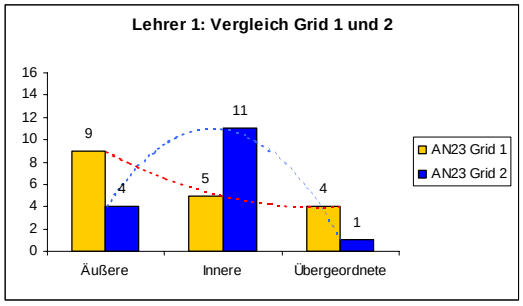


Abb. 1 Aspektverschiebung

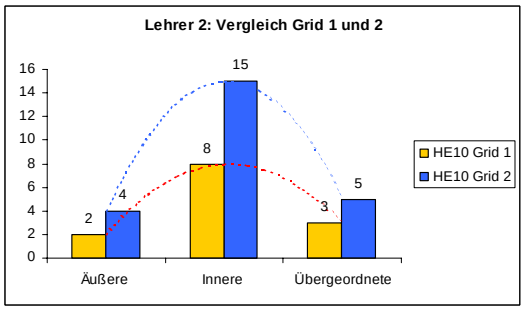


Abb.2 Anzahlsteigerung

4. Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Das entwickelte Fortbildungskonzept zum Problemlösen in Verbindung mit Selbstregulation im Mathematikunterricht hat einerseits die Sicht der Lehrer auf Mathematikaufgaben verändert. Andererseits bewirkt die Fortbildung indirekt Lernzuwächse der Schüler in Richtung mathematischer Leistungsfähigkeit insbesondere der Problemlösekompetenz. Diese Leistungssteigerung kann u.a. auch auf den vermehrten Einsatz der kennen gelernten Heurismen zurückgeführt werden.

Literatur:

Bruder, R. (2003). Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Material im Rahmen des BLK-Programms „Sinus“ zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Kiel: IPN.

Bruder, R., Lengnink, K.& Prediger, S. (2003). Wie denken Lehramtsstudierende über Mathematikaufgaben? Ein methodischer Ansatz zur Erfassung subjektiver Theorien mittels Repertory-Grid-Technik. Mathematica Didactica, 26 (1), 63-85.

Komorek, E. (2005). Förderung mathematischer Problemlösekompetenzen in der Sekundarstufe I. Entwicklung, Durchführung und Evaluation eines Ausbildungsprogramms für Referendare zur Förderung mathematischer Problemlösekompetenz in Kombination mit selbstreguliertem Lernen.

Komorek, E., Bruder, R., Schmitz, B. (2004). Integration evaluierter Trainingskonzepte für Problemlösen und Selbstregulation in den Mathematikunterricht. In: Doll, J. & Prenzel, M. (Hrsg.), Schulische und außerschulische Ansätze zur Verbesserung der Bildungsqualität, S. 54-76. Münster: Waxmann.

Lehmann, G. (1990). Die Vermittlung heuristischer Strategien im Mathematikunterricht. In: Finden, Erfinden, Lernen: Zum Umgang mit Mathematik unter heuristischen Aspekten, Glatfeld (Herausgeber), Frankfurt a.M.

Alexander JORDAN, Kassel

Verändertes Lernen – verbesserte Leistungen? Zur Entwicklung der Schülerfähigkeiten bei SINUS-Transfer

Zentrales Anliegen des bundesweiten BLK-Modellversuchsprogramms SINUS-Transfer (Laufzeit: 2003-2005) war, wie schon beim vorangegangenen BLK-Modellversuchsprogramm SINUS (siehe Prenzel & Baptist 2001), eine *Steigerung der Qualität des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts in der Sekundarstufe I.* Dabei stützte man sich im hessischen Modellversuch (insbesondere im nordhessischen Set) auf Bausteine, die bereits im vorangegangenen SINUS-Duchlauf entwickelt worden waren (vgl. dazu Blum et al. 2000; zur Evaluation Jordan 2006). Ergänzt wurde dies um die Konzeption von Materialien für Jahrgangsstufen, die bisher noch nicht eingebunden waren. So war die Jahrgangsstufe 5 einer der beiden Arbeitsschwerpunkte, den jede Modellversuchsschule zu bearbeiten hatte (dazu kam ein frei wählbarer Schwerpunkt). Die Evaluation des nordhessischen Sets bei SINUS-Transfer umfasste zwei Komponenten: die *Erfassung von Lernergebnissen* und die *Dokumentation von Unterrichtsprozessen*. Über beide Komponenten soll im Folgenden unter Berücksichtigung der im Titel dieses Beitrages aufgeworfenen Fragestellung kurz berichtet werden.

1. Erfassung von Lernergebnissen

Zur Erfassung der Lernergebnisse wurden im Rahmen des Modellversuchs zwei *Leistungstests* eingesetzt (Bearbeitungsdauer jeweils 40 Minuten). Die Eingangstests wurden im Mai 2004, die Abschlusstests im April 2005 durchgeführt. Zentrales Anliegen war es, die Entwicklung des Stands mathematischer Grundbildung der Schülerinnen und Schüler (im Folgenden kurz: Schüler) über ein Schuljahr hinweg zu verfolgen. Grundansatz war dabei – wie z.B. auch bei PISA (vgl. OECD 2003) –, dass sich dieser Stand beim Lösen geeigneter (insbesondere auch kognitiv anspruchsvoller) Aufgaben zeigt. Aus Kostengründen fand dabei eine Beschränkung auf die Klassen 5 und 9 im Jahr 2004 sowie die gleichen Klassen 6 und 10 im Jahr 2005 statt. So sollten *unmittelbare* (die Klassen 5 und 6 waren ja einer der beiden Arbeitsschwerpunkte in allen Schulen), aber auch *weiterreichende* Effekte erfasst werden (die Klassen 9 und 10 stehen exemplarisch für alle nicht direkt als Schwerpunkt eingebundenen Jahrgangsstufen). Die Tests wurden von R. Bruder, TU Darmstadt (Klasse 5 und 6) sowie von A. Jordan und W. Blum, Universität Kassel (Klasse 9 und 10) entwickelt. Dabei zeigten sich vor allem in den am Ende der Sekundarstufe I betrachteten

Bildungsgängen erkennbare Leistungszuwächse. So stieg der Mittelwert in den Gymnasien über alle Schülerfähigkeitswerte hinweg um mehr als zwei Drittel einer Standardabweichung, was vergleichsweise viel ist. Besonders interessant in diesem Zusammenhang sind die *Veränderungen einzelner Klassen*. Hier haben sowohl in den Realschulen als auch in den Gymnasien Verbesserungen, aber auch Verschlechterungen stattgefunden. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, welche unterrichtlichen Bedingungen eine Steigerung der Leistung besonders fördern.

2. Dokumentation von Unterrichtsprozessen in ausgewählten Klassen

Zur Beantwortung dieser Frage wurden exemplarisch videobasierte *Unterrichtsbeobachtungen* in Modellversuchsklassen durchgeführt. Ziel dieser qualitativen Erhebungen war es herauszufinden, ob sich das unterrichtliche Handeln der Lehrer besonders erfolgreicher Klassen vom „üblichen" deutschen Unterrichtsskript (vgl. Baumert et al. 1997, S. 47ff) unterscheidet und welche Merkmale für diese *„Best-Practice-Lehrer"* charakteristisch sind. Dazu wurde jeweils eine Doppelstunde in zwei Gymnasialklassen aus dem oberen Leistungsdrittel am Ende der Jahrgangsstufe 10 videographiert und analysiert. Bei der Auswertung der erstellten Videos wurde insbesondere auf die wohlbekannten *Qualitätskriterien des Mathematikunterrichts* geachtet (nach Blum & Leiß 2005). Im Zentrum der beiden Doppelstunden stand als Unterrichtsgegenstand die Bearbeitung der folgenden *„modellversuchstypischen" mathematischen Problemstellung* aus dem DISUM-Projekt, für deren unterrichtliche Behandlung es keine Vorgaben gab:

Regenwald

Da täglich weltweit ca. 700 Quadratkilometer Regenwald abgeholzt werden und jeder Deutsche im Durchschnitt 130 Liter Bier im Jahr trinkt, hat sich eine Bierbrauerei die im Folgenden beschriebene „Regenwald-Aktion" ausgedacht:

„Die Regenwald-Aktion läuft vom 01.05. bis 31.07.2002. In diesem Zeitraum wird für jeden verkauften Kasten Bier unserer Brauerei ein Quadratmeter Regenwald in Afrika nachhaltig geschützt."

Wie ist die Wirkung dieser Aktion in Bezug auf die Regenwald-Abholzung einzuschätzen? Begründe Deine Antwort!

In den beobachteten Unterrichtsstunden konnte festgestellt werden, dass sich diese deutlich vom traditionellen Unterrichtsskript unterscheiden. So begannen beide Stunden mit einem kurzen *Impuls des Lehrers*. Nach einer Präsentation der zu behandelnden Aufgabe „Regenwald" und der Klärung grundlegender Verständnisfragen wurden anschließend *Grup-*

pen gebildet, die zügig den vom Lehrer erteilten Arbeitsauftrag ausführten. Während dieser Phase ging der Lehrer im Klassenraum umher, er ermutigte und bestärkte einzelne Schüler, ihre Ideen und Überlegungen weiter zu verfolgen, er gab aber nur minimale inhaltliche Hilfen zur Aufgabenstellung. Interessant war hierbei, dass einige Gruppen sogar gänzlich ohne Einwirkung des Lehrers auskamen. Die Schüler übernahmen offenbar Verantwortung für das eigene Lernen, der Lehrer war im Wesentlichen „nur" Moderator dieser selbstgesteuerten Lernprozesse. Die Ergebnisse dieser Arbeitsphase wurden anschließend von den Schülern auf Plakaten dokumentiert und in einer nächsten Phase den anderen Gruppen im Plenum *präsentiert*. Auch diese Phase wurde erneut nicht direkt vom Lehrer gesteuert, selbst aufkommende Fehler wurden hier größtenteils von den Schülern selbst korrigiert, und die einzelnen Lösungswege wurden kritisch miteinander diskutiert. Dabei wurde in beiden Stunden deutlich, dass die breite Lösungsvielfalt, die diese Aufgabe bietet, auch ohne direkte Hinweise der Lehrkraft ausgeschöpft werden konnte. Auffallend war zudem, dass der Lehrer erst wieder in der abschließenden *Reflexionsphase* das Unterrichtsgeschehen sichtbar steuert. Mit Fragen wie z.B. „Wie beurteilt ihr nun diese Werbeaktion?" stimulierte er Schüleräußerungen wie „Vorher fand ich diese Werbeaktion gut, aber jetzt ist mir klar geworden, dass man so etwas erst einmal kritisch prüfen muss". Darüber hinaus wurde in dieser Phase noch einmal ausführlich diskutiert, welche Bedingungen gegeben sein müssten, damit solch eine Werbeaktion wirklich etwas bewegt, wobei all dies nicht nur von uns außen stehenden Beobachtern, sondern auch von den beteiligten Schülern positiv beurteilt wurde. Hierüber soll ausführlich an anderer Stelle berichtet werden.

Literatur

Baumert, J. et al. (1997): TIMSS - Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Opladen: Leske und Budrich.

Blum, W. et al. (Hrsg.) (2000): Gute Unterrichtspraxis: Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. In: Pro Schule, Heft 3.

Blum, W. & Leiß, D. [2005]: Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"- Aufgabe. In: mathematik lehren, 128, 18-21.

Jordan, A. (2006): Mathematische Bildung von Schülern am Ende der Sekundarstufe I – Analysen und empirische Untersuchungen. Hildesheim: Franzbecker.

OECD (2003): The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. Paris: OECD Publication Service.

Prenzel, M. & Baptist, P. (2001): Das BLK-Modellversuchsprogramm "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. In: BMBF (Hrsg.): TIMSS – Impulse für Schule und Unterricht. Bonn, 59-73.

Marina Ströbele, Regina Bruder, TU Darmstadt

Evaluation des Modellversuchs Sinus-Transfer mit Schwerpunkt Mathematik in Nordhessen

Ziel der vorliegenden vertiefenden Evaluationsstudie ist es, Vorstellungen von Schülern zum Lernen von Mathematik und deren Testleistungen in Mathematik mit Vorstellungen der Lehrkräfte zum Lehren und Lernen von Mathematik in Relation zu setzen. Es wird angenommen, dass sich mit Hilfe des Fortbildungsprogramms SINUS-Transfer Veränderungen in den Lehrervorstellungen und der Unterrichtsgestaltung zeigen und diese ansatzweise auch in den Schülerleistungen erkennbar werden.

2. Ausgangslage und Evaluationskonzept der Untersuchung

An der 1.Welle des BLK-Programms „Sinus-Transfer“ (2003-2005) beteiligten sich 51 hessische Schulen (vgl. www.sinus-transfer.de). Die Lehrer/innen an Nordhessens Schulen mit Schwerpunkt Mathematik haben sich in ihrem Schulset insbesondere mit der Weiterentwicklung der Aufgabenkultur beschäftigt. Für die vertiefte Evaluation über den Fortbildungserfolg an Nordhessens Schulen sind im Schuljahr 2004/05 insgesamt 67 Lehrer/innen und 1016 Schüler/innen von 10 Schulen befragt worden.

3. Untersuchungsinstrumente

a.) Im zweiten Halbjahr Klasse 5 und zum Ende der Klasse 6 wurde jeweils ein einstündiger Mathematiktest geschrieben. Er besteht aus 12 Aufgaben, die in Zusammenarbeit mit Sinus-Lehrern entwickelt und in Gymnasien benachbarter Bundesländer pilotiert wurden. Von den 12 Aufgaben sind 7 Aufgaben so genannte „Ankeraufgaben“ aus den Bereichen „Basics“ und „Problemlösen“ und kommen sowohl im Vortest als auch im Nachtest vor. Das Ziel dieser „Ankeraufgaben“ ist es, eine Vergleichbasis über ein Schuljahr zu schaffen und gewisse Aussagen über den Lernzugewinn der Schüler/innen treffen zu können.

b.) Zum Ende von Klasse 6 wurde einmalig ein Schülerfragebogen eingesetzt zu Einstellungen der Schüler/innen zu Hausaufgaben, eigenen Fehlern, zur Selbstwirksamkeit sowie zu Vorstellungen zur Mathematik und zum Unterricht.

c.) Eine Lehrerbefragung fand am Beginn und zum Ende der Fortbildung statt. Die Mathematiklehrkräfte wurden zu ihren Vorstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik und ihrem Mathematikbild (Einstellungen zu Lehrerfortbildungen, Aufgabenauswahl, Unterrichtsziele und –Inhalte, Zusammenarbeit und Sicht auf Unterricht und die Rolle als Lehrkraft) befragt.

4. Untersuchungsergebnisse der Schülertests, der Schülerbefragung und Lehrerbefragungen

Am Vortest zur Leistungsmessung der Schüler/innen nahmen insgesamt 1115 Schüler/innen (868 Gesamtschule, 247 Gymnasium) und am Nachtest 979 (738 Gesamtschule, 241 Gymnasium) von 10 hessischen Schulen teil (8 Gesamtschulen und 2 Gymnasien). Zu erwarten war, dass die Schüler/innen am Ende von Klasse 6 mehr Ankeraufgaben lösen können als in Klasse 5 und gegebenenfalls auch andere Lösungswege einsetzen. Die Leistungszuwächse bei den Ankeraufgaben über ein Schuljahr sind im Mittel jedoch nur minimal, etwa 2%. Das liegt deutlich unter den Erwartungen, weil auch ohne Intervention bereits mit einem zeitlich bedingten Lernzuwachs von mehr als 5% zu rechnen wäre, wie aus anderen Studien bekannt ist. Wenn man sich das Zustandekommen dieses Ergebnisses genauer anschaut, kann man feststellen: Bei drei Aufgaben sind Verschlechterungen aufgetreten, während sich bei anderen auch deutliche Verbesserungen zeigen und zwar abhängig von den Unterrichtsthemen, die in Klasse 6 behandelt werden. Details vgl. www.math-learning.com. Dies ist zum einen dadurch erklärbar, dass die Schüler gewisse Grundvorstellungen aus der Grundschule mitbringen, diese aber nicht weiter verfolgt und stabilisiert werden und zum anderen muss davon ausgegangen werden, dass Grundkönnen zu wenig wiederholt und vertieft wird auch unabhängig vom aktuellen Unterrichtsthema. Dass gilt z.B. für die Aufgabe „Runden“:

Mädchen können bei im Mittel geringeren Anfangsleistungen im Vergleich zu den Jungen ihre Leistungen etwas deutlicher steigern, erreichen jedoch am Ende der Klasse 6 im Mittel noch nicht das Anfangsleistungsniveau der Jungen aus Klasse 5. An der Schülerbefragung nahmen 1016 Schüler/innen teil (154 Gymnasium (58 Jungen, 96 Mädchen) und 862 Gesamtschulen (447 Jungen, 415 Mädchen)). Die Befragung wurde nur einmalig durchgeführt, weshalb keine Aussagen hinsichtlich Trends getroffen werden können. Die Einstellung der Schüler/innen zur Mathematik tendiert in eine positive Richtung (Skalenmittelwert 1,68 (stimmt genau= 3 bis stimmt gar nicht=1)). Wobei nur ein Drittel der Schüler/innen aussagen, dass sie Mathematik für interessant halten, aber die Mehrheit der Schüler/innen knobelt gerne und findet es interessant, eigene Lösungswege zu suchen. Die Schüler/innen schätzen die gestellten Aufgaben im Mathematikunterricht eher positiv ein. 63% der Schüler/innen sagen aus, dass sie die gestellten Aufgaben im Unterricht für nicht zu anspruchsvoll halten. Vor allem Textaufgaben erscheinen der Mehrzahl der Schüler/innen nicht zu schwer. Diese Aussagen deuten auf einen möglichen Effekt der Sinus-Transfer Fortbildung hin. Positiv ist die Einstellung der Schüler/innen auch zu ihrem Umgang mit eigenen Fehlern Der überwiegende Teil der Schüler/innen stimmt den Aussagen zu, dass Fehler weiterhelfen und zeigen was man besser machen kann. Die Antworten aus

der offenen Frage „Was könntest Du bei Dir verändern damit Du in Mathematik mehr lernst?“ zeigen auch deutlich, dass die Schüler durchaus den „Fehler“ bei sich selbst suchen. Auffällig ist, dass deutlich mehr Jungen als Mädchen nichts an ihrem Lernstil verändern möchten. Dagegen wünschen sich mehr Mädchen als Jungen Unterstützung von außen (von Lehrern, Eltern und Nachhilfe).
An der Lehrerbefragung beteiligten sich an der Vorbefragung 55 und an der Nachbefragung 21 Lehrer/innen aus 7 nordhessischen Schulen. Eine vergleichende Analyse ist leider nur für 9 Lehrer/innen möglich, die sowohl an Vor- und Nachbefragung teilgenommen haben. Die Evaluation hat ergeben, dass es eine positive Entwicklung in der Wahrnehmung von Schule und Kollegium bei den Lehrer/innen gegeben hat vor allem bezüglich des Diskussionsverhaltens über die Unterrichtsqualität. Auch stieg die Anzahl der Lehrer/innen, die nach ihrer Wahrnehmung mehr nach neuesten didaktischen Erkenntnissen unterrichten. Jedoch gab es keine signifikanten Änderungen im Bereich „fachlicher Zusammenarbeit“(Item (8.7): „Ich denke, in der Schule sollten die Lehrer/innen mehr und besser zusammenarbeiten“). Die Bereitschaft dazu ist jedoch vorhanden (über 70%). Um eine Eigendynamik zu entwickeln, wie es das Ziel von Sinus-Transfer ist, ist allerdings eine langfristige Zusammenarbeit der Lehrer/innen notwendig. Der Bedarf nach Fortbildungen zum Thema „Neue Aufgabenkultur“ ist signifikant zurückgegangen, ohne dass der Bedarf jedoch ausreichend gedeckt worden ist. Bei der Nachbefragung sind die drei meist genannten Themengebiete: “Umgehen mit Problemschülern“, Problemlösen lernen“ und „anwendungsorientierter Mathematikunterricht“. Die individuellen Schwerpunktsetzungen zu den Unterrichtszielen und Inhalten haben sich von der Vor- zur Nachuntersuchung nicht signifikant verändert. Die drei häufigsten genannten Unterrichtsziele sind: Lernmethoden erlernen, Anwendung von Mathematik und mathematische Grundlagen beherrschen und korrekt anwenden können. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es bei den hier befragten Lehrkräften nur partielle Einflüsse durch Sinus-Transfer auf die Vorstellungen von Mathematikunterricht gegeben hat, dass sich jedoch die globale Einstellung nicht signifikant verändert hat.

5. Zusammenfassung und Folgerungen

Die Analysen lassen den Schluss zu, dass es gewisse Leistungsverbesserungen der Schüler/innen gibt, aber der Effekt nicht so stark ist wie erhofft. Die Probleme bei den „Ankeraufgaben“ können nur durch regelmäßige (intelligente) Wiederholung von Grundkönnen (z.B. Kopfübungen), überwunden werden. Veränderungen in den Vorstellungen und Kompetenzen der Lehrkräfte für eine neue Unterrichtskultur erfordern eine nachhaltige und inhaltliche Zusammenarbeit z.B. mit klaren Zielvereinbarungen und einer kritischen Ergebnisreflexion.

Stephan, HUSSMANN, Dortmund; Timo LEUDERS, Freiburg

Mathematik treiben, authentisch und diskret - eine Perspektive für die Lehrerausbildung

Schule soll Lernende befähigen, mathematisches Wissen in verschiedenen Situationen flexibel einzusetzen. Dazu müssen sie grundlegende Konzepte verstanden haben, Routineverfahren in bekannten Situationen anwenden aber auch Probleme, zu deren Bearbeitung kein Routineverfahren zur Verfügung steht, erfolgreich bearbeiten können. Hierfür braucht es Lehrpersonen, die diese Kompetenzen vermitteln und fördern können. Das können sie aber nur – und das ist eine Banalität – wenn sie selbst solche Kompetenzen erworben und entsprechende Lernprozesse erlebt haben.

In Veranstaltungen des Lehrerstudiums wird oft bekannter Schulstoff von einem höheren Standpunkt aus vertieft vermittelt. Wenn es schlecht läuft, werden nur Standarddefinitionen und -verfahren reproduziert oder die mit Diplomstudierenden gemeinsam gehörte Vorlesung wird auswendig gelernt. Wenn es gut läuft, werden die grundlegenden Ideen des jeweiligen Gebietes elementar und von einem höheren Standpunkt durchdrungen. Ein solcher Blick- bzw. Standortwechsel ist jedoch meist ein Glücksfall.

Die Einführung in ein *neues* Themengebiet hingegen kann den Studierenden die Möglichkeit bieten, unvoreingenommen und selbsttätig einen neuen Teil der Mathematik zu erkunden. Wenn dieses Gebiet zudem herausfordernde, interessante und leicht zugängliche Fragestellungen anbietet, deren Bearbeitung einen nicht nur tief in das Wesen der Mathematik schauen lässt, sondern auch die Entwicklung der oben genannten Kompetenzen am eigenen Leib erfahrbar macht, so befinden sich die zukünftigen Lehrer und Lehrerinnen auf einem guten Weg, ihr Fach und seine Eigenheiten von innen zu durchdringen und als Lehrperson vorzuleben.

Mit der diskreten Mathematik eröffnet sich ein solches „unverbrauchtes“ Gebiet: “Discrete mathematics offers a new start for students. For the student who has been unsuccessful with mathematics, it offers the possibility for success. For the talented student who has lost interest in mathematics, it offers the possibility of challenge. Discrete mathematics provides an opportunity to focus on how mathematics is taught, on giving teachers new ways of looking at mathematics and new ways of making it accessible to their students. From this perspective, teaching discrete mathematics in the schools is not an end in itself, but a tool for reforming mathematics education” (Rosenstein 1997).

Die besondere Kraft der diskreten Mathematik lässt sich durch folgende Aspekte darstellen:

- Die Fragestellungen sind häufig leicht zugänglich
- Sie haben einen hohen Aufforderungscharakter, lösen aktive Problemlöseprozesse aus und lassen sich auf jedem Niveau bearbeiten
- Die Nähe von Modell und Realität ist groß, so dass Modellbildungsprozesse selbstständig und einsichtsvoll durchgeführt werden können
- Die mathematischen Begriffe entspringen dem handelnden Umgang mit realen Objekten
- Der formale Aufbau erfolgt erst nach umfassendem Ausloten möglicher Begriffsbildungen, also genetisch.

Um diese Qualitäten zu entfalten, muss man die Fragestellungen der diskreten Mathematik in Form von Lernumgebungen präsentieren, in denen die Lernenden die Probleme selbstständig bearbeiten können und die Lernprozesse im Sinne einer sozial-konstruktivistischen Lerntheorie begleitet werden. Solche Lernumgebungen zeichnen sich durch Zugänglichkeit der Fragestellungen, durch begriffsgenetisches Lernen, durch Orientierung an fundamentalen Ideen und durch die Anregung von mathematischen Prozessen wie Argumentieren, Problemlösen, Modellieren und Begriffsbilden aus.

In den USA beispielsweise ist die diskrete Mathematik seit 1989 Teil der Standards. Erfahrungsberichte über die Rolle in der Hochschul- und Schulausbildung wie der folgende, sind keine Seltenheit.

“Participants reported changes in their classrooms, in their students, and in themselves. Their successes taught us that discrete mathematics was not just another piece of the curriculum. Many participants reported success with a variety of students at a variety of levels, demonstrated a new enthusiasm for teaching in new ways.” (Rosenstein, 1997)

Dieses Plädoyer für die diskrete Mathematik macht deutlich, dass Fachdidaktik und Fachwissenschaft in der Lehrerausbildung (und nicht nur dort) eng miteinander verwoben sein müssen. Natürlich lassen sich – analog zur diskreten Mathematik – auch für andere Fachgebiete gute Gründe für deren Berücksichtigung finden. Eine Legitimation für solche curricularen Entscheidungen sollte sich aus einer Vorstellung über Ziele von Lehrerausbildung, die heutzutage die Form von Standards annehmen, speisen.

Diskrete Mathematik aus Sicht von Standards für die Lehrerbildung

Während Standards für den bildungswissenschaftlichen Teil der Lehrerbildung (das sind die erziehungswissenschaftlichen und schulpraktischen Anteile) bereits vorliegen (KMK 2004), ist die Entwicklung von Standards für

den fachdidaktischen und fachwissenschaftlichen Teil insbesondere der ersten Phase noch nicht auf einem entsprechenden Beschlussstand. Die Gesellschaft für Fachdidaktik als Dachverband der fachdidaktischen Gesellschaften hat ein „Kerncurriculum Fachdidaktik“ vorgelegt (GFD 2004), das unabhängig vom Fach Lehrerkompetenzen umschreibt, die in einem fachdidaktischen Studienanteil erworben werden. Die Diskussion und Verabschiedung von fachdidaktischen und fachwissenschaftlichen Standards, getragen von einem breiten Konsens der Fachwissenschaften und Fachdidaktiken an den Hochschulen, steht noch aus. Dieser Prozess wird sicherlich erschwert durch die noch nicht ausgehandelte Rolle der fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Disziplinen in der Lehrerbildung an den Hochschulen sowie durch die Profilierung der fachdidaktischen Disziplinen als Wissenschaft (vgl. Tenorth/Terhart 2004). Die gemeinsame Spezifizierung von fachlichen und didaktischen Standards für jedes einzelne Fach ist damit umso zentraler für eine erfolgreiche Reform der Lehrerbildung.

Grundzüge solcher Standards deutet die gemeinsame Denkschrift der GDM und DMV (2001) an. Dort wird beispielsweise gefordert: „Bei der fachwissenschaftlichen Ausbildung kommt es für künftige Lehrerinnen und Lehrer zunächst einmal darauf an, dass sie über ausgedehnte Fachkenntnisse verfügen, die das Niveau und den Umfang der Lehrplaninhalte deutlich übersteigen müssen. Nur dann sind sie in der Lage, auf Schülerfragen und -ideen zu reagieren und aus der Situation sich ergebende, weiterführende Fragen adäquat zu beantworten.“ Diese Forderung muss aber im Lichte eines ganzheitlichen Bildes von Mathematik gesehen werden. Die vertieften Kenntnisse müssen sich auch auf die Qualität mathematischer **Prozesse**, wie etwa das **Modellieren**, **Problemlösen** oder **Argumentieren** wie sie in neueren Standards für die Schule aufgeführt werden, und auf die Spezifika mathematischer Begriffsbildung beziehen. Zur Fachsystematik gehört also auch eine Vertrautheit mit den espistemischen Prozessen der Mathematik.

Studierende sollen in den fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Veranstaltungen von Anfang an aktiv forschend tätig sein, mathematische Erkenntnisprozesse erleben und reflektieren und dabei insbesondere ihre eigenen Lernprozesse erforschen. Nur so hat die Lehrerbildung Einfluss auf die spätere Praxis, wenn die praktizierten (nicht die gelehrten) Lernarrangements gelebtes Modell sind und für die Studierenden episodisches Erinnerungspotential besitzen. Auf diese Weise findet jede Wissensaneignung durchweg unter einer reflektierten Perspektive statt. Inhaltlich kommt eine so verstandene Situierung der Lehrerbildung dem Prinzip der Lehre einer (Elementar)mathematik vom höheren Standpunkt aus gleich.

Zum Grundverständnis einer solchen akademischen Lehre gehören Prinzipien wie die folgenden: Lernen im Mathematikunterricht ist nur graduell aber nicht prinzipiell verschieden von mathematischem Erkenntnisgewinn. Auch Schüler sind nicht Anwender mathematischer Expertise sondern erschaffen diese im Lernprozess stets selbst. Künftige Lehrer können und sollten diese Perspektive des forschenden Studierens einnehmen.

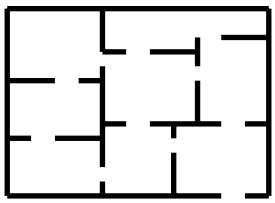
Diskrete Mathematik lernen – Mathematik erleben: Zwei Veranstaltungskonzepte in der Lehrerausbildung

Die beiden vorangehenden Abschnitte münden in die (empirisch durchaus nicht belegte) These: Themen der diskreten Mathematik sind in besonderem Maße für die beschriebene Verzahnung fachdidaktischer und fachwissenschaftlicher Ausbildung geeignet. Hierfür sollen zwei kurze Einblicke aus Veranstaltungskonzepten stehen:

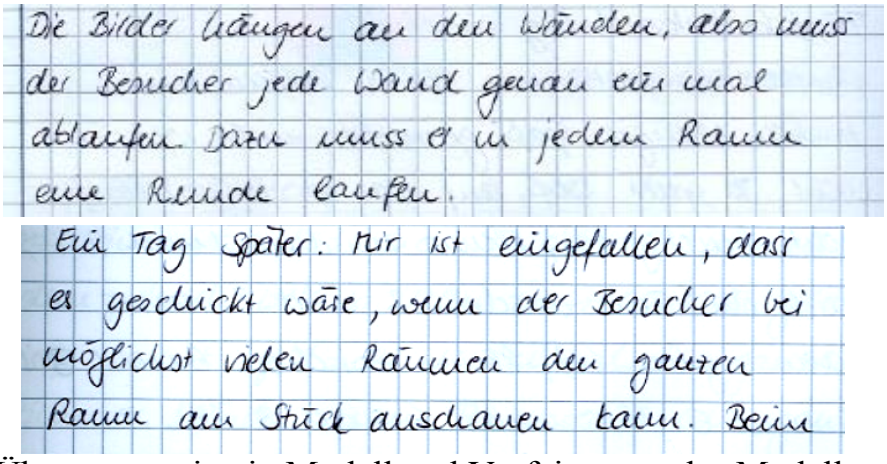
Problemlöseseminar

Die Teilnehmer eines Problemlöseseminars müssen selbstständig ihnen unbekannte Probleme bearbeiten. Es finden keine Vorträge statt, wohl aber Phasen des Austauschs (Du-Phase, Wir-Phase) (vgl. Berger 2004). Erwartetes Produkt ist ein individuelles Forschungsheft im Umfang von 100 Seiten. Eine der Aufgaben lautete:

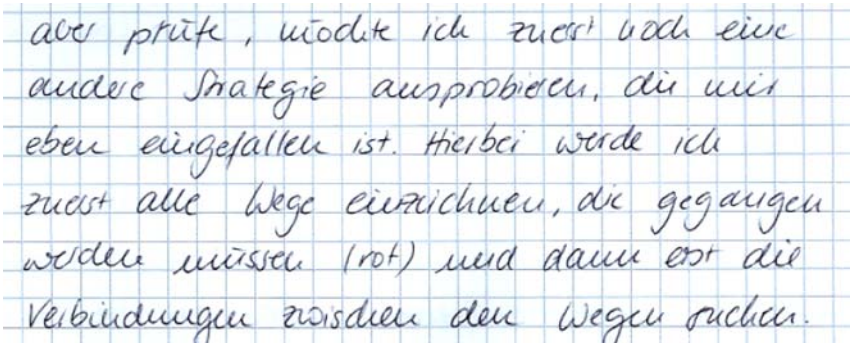
Sie sollen für ein (eingeschossiges) Museum eine geführte Besichtigung durch alle Säle planen. Dabei sollen die Besucher möglichst an allen Bildern vorbeigehen, ohne ein Bild mehrfach zu passieren. Wie gehen Sie bei der Planung vor? Finden Sie eine möglichst allgemeine Methode zur Rundgangsplanung.



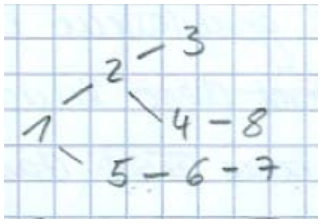
In den Bearbeitungen der Studierenden finden sich dann durchweg Modellierungsüberlegungen, Problemlösestragien und -reflexionen und Begriffsbildungen statt.

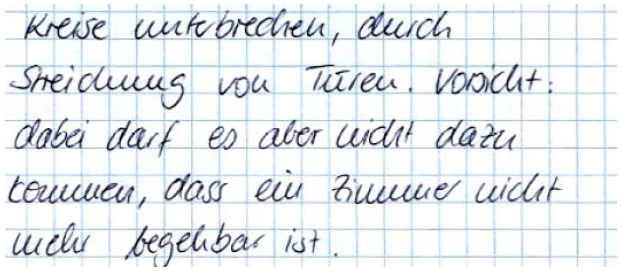


Übersetzung in ein Modell und Verfeinerung des Modells

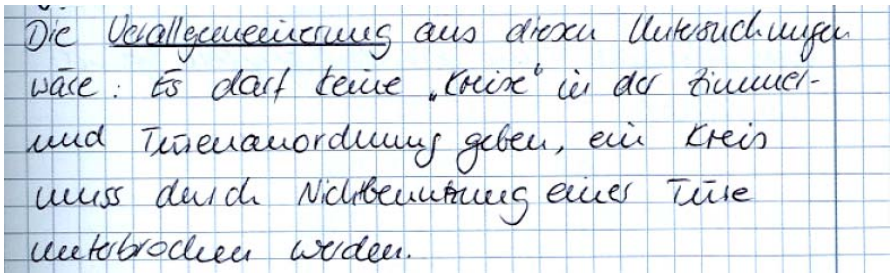


Strategiewechsel



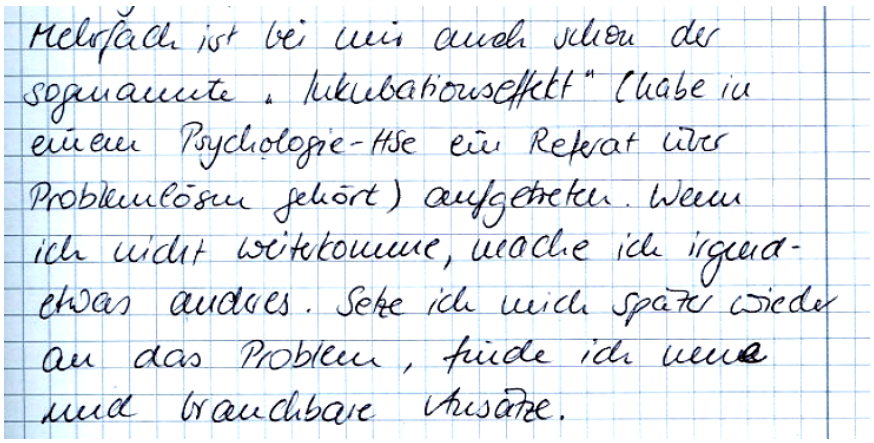


Implizite und explizite Bildung mathematischer Begriffe (dualer Graph, Kreis), Problemlösung in Modell



Verallgemeinerung

Die Studierenden erreichen ein hohes Niveau der Reflexion und haben zudem ein intensives Erlebnis aktiven Mathematiktreibens. Die Inhalte und Prozesse sind anschlussfähig an fachwissenschaftliche Vertiefungen und fachdidaktische Reflexionen.



Vorlesung/Übung Diskrete Mathematik

Am Beispiel des ‚Begriffsbildens' soll ein erprobtes und in mehreren Schritten modifiziertes Vorlesungskonzept vorgestellt werden. Der Titel dieser Veranstaltung lautet, „Diskrete Mathematik - Graphentheorie und kombinatorische Optimierung", womit allerdings nur das Spektrum der behandelten *Inhalte* umrissen wird.

Anders als in Hochschulen besteht für schulische Lernprozesse weitgehend Konsens darüber, dass Lernen nicht allein vom richtigen Erklären und Weitergeben abhängt, sondern dass Wissen von jedem einzelnen Subjekt aktiv aufgebaut werden muss. Auf Freudenthal geht die Idee zurück, für das Lernen von Mathematik Stufen der Abstraktion zu formulieren, die bei praktischen Erfahrungen beginnen und Stufe für Stufe zu theoretischen Abstraktion dieser Erfahrungen aufsteigen. Auf der Basis einer konstruktivistischen Lerntheorie und empirischen Untersuchungen im schulischen Kontext (Hußmann 2001) wurde eine Veranstaltung konzipiert, die den Begriffsbildungsprozess wesentlich in die Hand der Studierenden legt.

Zu Beginn erhielten die Studierenden so genannte Intentionale Probleme (ebd.), auf deren Basis sie die zur Lösung notwendige mathematische Theorie entwickeln sollten. Diese wurden in Forschungsheften festgehalten, wobei auch mathematische Strukturvorgaben wie z.B. Definition, Satz genutzt werden konnten. Beispiele für derartige Problemstellungen sind Fragen nach optimalen Touren für Postboten oder das schon genannte Museumsproblem (vgl. auch Hußmann/Lutz-Westphal 2006). Die Veranstaltung war dadurch gekennzeichnet, dass neben langen Phasen selbstständigen Arbeitens Zwischenergebnisse präsentiert und diskutiert wurden. Im letzten Drittel der Veranstaltung wurde auf Grundlage der Arbeitsprozesse die „fertige Mathematik" durch den Dozenten präsentiert.

Die Forschungshefte zeigten, dass die Studierenden ausgehend von einzelnen Beispielen und Verfahren, Konzepte entwickelten, die sie auf andere Situationen übertragen und anwenden konnten. Sie zeigten, dass sie eigene Fehler erkennen und korrigieren konnten. Bei der Formalisierung der von ihnen entwickelten Mathematik traten jedoch Schwierigkeiten auf. Nur einige Studierende zeigten sich in der Lage, die mathematische Sprache derart zu verwenden, dass sie die Argumente und Strukturen klar und präzise darlegen konnten. So verwendeten sie Definitionen und Sätze aus der Literatur, die sie bruchstückhaft mit ihren eignen Erkenntnissen verknüpften. Dieser Eindruck bestätigte sich noch in späteren Lernstandserhebungen, in denen die mathematischen Prozesse sehr erfolgreich rekonstruiert werden konnten, die formale Beschreibung jedoch im Bereich des Zufälligen und Auswendiggelernten verblieb. Insofern kann konstatiert werden, dass ein

tieferes Verständnis zwar erlangt wurde, Formalisierungen jedoch nur in Ansätzen durchgeführt werden konnten.

Aus diesem Grund erhielt die Veranstaltung beim zweiten Durchgang ein verändertes Kleid. Statt den Studierenden zu Beginn alle Fragestellungen als Gesamtpaket zu geben und nur eine Präsentationsphase ans Ende der Veranstaltung zu platzieren, erhielten die Studierenden inhaltlich systematisierte Fragestellungen, die über einen gewissen Zeitraum eigenständig bearbeitet wurden. Begleitend stand den Studierenden ein Skript zur Verfügung, das ebenfalls in Teilgebiete gegliedert war. Diese Skriptteile gab es am Ende jedes Abschnittes, mit dem Auftrag, die dort dargestellte Mathematik mit ihren eigenen Darstellungen in Einklang zu bringen. Aber auch in diesem Fall zeigten Prüfungen, dass prozessuale Aspekte der Mathematik den Leitfaden für die Rekonstruktion des Gelernten lieferten. Zwar wurde der formale Teil vielfach verstanden reproduziert, jedoch waren nur in einigen Fällen Verknüpfungen zwischen Prozess und formaler Darstellung erkennbar. Als Möglichkeit zum Erwerb eines Leistungsnachweises bestand in dieser Veranstaltung die Möglichkeit, eine Ausarbeitung eines eigenen Kapitels zur diskreten Mathematik abzugeben. Die dort entwickelten Problemsituationen und deren Analyse zeigten, dass die Begriffsentwicklung (z.B. durch Gray/Tall (1994) bzw. Sfard (1994) beschrieben) auf der Ebene des Prozesses bzw. der Verdichtung stehen blieben.

Dies führte dazu, in einem dritten Anlauf, genau diese fachdidaktischen Aspekte zum Inhalt der Veranstaltung zu machen, und zwar im Vergleich von Begriffsbildungsprozessen in der Schulmathematik und in der diskreten Mathematik. Dieser Vergleich von Bekanntem im Blickfeld des höheren Standortes und dem Neuem aus dem ‚Denken im Prozess' heraus, machte die Notwendigkeit der Entwicklung von ‚neuen' mathematischen Objekten und Konzepten transparent und verständlich. Damit war der

201: Wir haben ein Verfahren gefunden, dass egal wo man anfängt,
202: immer den maximalen Fluss liefert. Das heißt, wir haben eine Prozedur
203: in einen Prozess überführt.
204: Der Begriff „der maximale Fluss" ist ein Prozept, denn es ist ein
205: ein Konzept, mit gewissen Eigenschaften und ein Prozess, mit dem
206: sich der maximale Fluss bestimmen lässt.

Schritt zu einer entsprechenden Formalisierung nahezu zwingend. Der in der Abbildung dargestellte Ausschnitt eines Schülerheftes zu einem Problem, bei dem der maximale Fluss in einem Netzwerk bestimmt werden sollte (vgl. Hußmann/Lutz-Westphal 2006), macht diese Reflektion sichtbar. Für die Veranstaltung bedeutete dies, dass die Fachdidaktik in einer Fachveranstaltung zur diskreten Mathematik gleichberechtigt Einzug erhalten hat, auf Kosten einiger Themen, aber mit dem Gewinn eines tieferen Ver-

ständnisses der diskreten Mathematik einerseits und in die Funktionsweise von Begriffsbildungsprozessen andererseits.

Fazit

Als Konsequenzen aus den vorstehend geschilderten allgemeinen Überlegungen und konkreten Lehrerfahrungen lassen sich folgende Anforderungen an Lerngelegenheiten für das fachliche Lernen im Lehramtsstudium formulieren: Fachdidaktische und fachwissenschaftliche Veranstaltungen

- müssen hinsichtlich des zukünftigen Berufskontextes situiert sein, d.h. sich auf beruflich relevante Aspekte des Faches beziehen,
- müssen als Lernepisoden Modellcharakter auch für schulisches Lernen besitzen Lernprozesse theoretisch reflektieren, auch und gerade in den fachwissenschaftlichen Anteilen!

Benötigt werden handlungsrelevante und bedeutungsvolle Situationen. Dies kann verwirklicht werden in einer konsequenten Verschmelzung von fachsystematischen und fachdidaktischen Veranstaltungen.

Literatur

Barzel, B./ Hußmann, S./ Leuders, T. (2004). Bildungsstandards und Kernlehrpläne in Nordrhein-Westfalen und Baden-Württemberg Der Mathematisch Naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) 57/3. 275-286

Berger, P. (2005). Änderung professioneller Einstellungen durch forschendes Studieren. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2004. Franzbecker.

BLK (1997). Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Bonn: Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung.

GFD (2004). Gesellschaft für Fachdidaktik. Kerncurriculum Fachdidaktik vom 09.11.2004 Geladen von www.fachdidaktik.net am 30.80.05

Gray, E./Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 26, 2, 115–141.

Hußmann, S. (2001). Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen. Franzbecker

Hußmann, S./Lutz-Westphal, B. (2006). Kombinatorische Optimierung lehren und lernen. Vieweg.

NCTM (2000). Principles and Standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tenorth, H.E. /Terhard E. (2004): Standards für die Lehrerbildung. www.kmk.org/doc/beschl/standards_lehrerbildung.pdf (23.03.06)

Rosenstein, J.G. (1997). Discrete mathematics in the schools: An opportunity to revitalize school mathematics. In J.G. Rosenstein, D. Franzblau, F. Roberts (Eds.), Discrete mathematics in the schools. (Vol. 36). American Mathematical Society and National Council of Teachers of Mathematics.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions:Reflections on processes and objects as differentsides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 22, 1–36.

Brigitte LUTZ-WESTPHAL, Berlin[1]

Typisch diskret - Was macht diskretes Arbeiten aus?

Diskrete Mathematik in der Schule: heute und früher

An vielen Stellen im Unterricht befinden sich Elemente der diskreten Mathematik, allerdings wird die spezielle Charakteristik diskreten Arbeitens nur selten thematisiert. In den neuen Lehrplänen von Hamburg (seit 2005) und Berlin (ab 2006) befinden sich in der Oberstufe bzw. Mittelstufe Wahl-(pflicht)module zur Graphentheorie und kombinatorischen Optimierung. Doch die Idee, diese Themen in den Mathematikunterricht zu integrieren, ist nicht neu.

Bigalke beschrieb bereits 1974 das hohe didaktische Potenzial dieses Stoffes: die immense Anwendungsfreudigkeit, die große Anschaulichkeit und die weitgestreute Problemfreudigkeit auf jedem beliebigen Niveau (siehe (1)). Eine ähnliche Sichtweise hatte auch Floer (siehe (2)). Andere Autoren betonten eher die Nähe der Graphentheorie als Zweig der kombinatorischen Topologie zur Mengenlehre und versuchten die Graphentheorie damit im Rahmen der sogenannten „Strukturmathematik“ in den Unterricht einzugliedern

Im Rahmen der propädeutischen Geometrie in der Grundschule entdeckte Heinrich Winter schon 1971 Graphentheorie und kombinatorische Optimierung (die damals noch nicht diesen Namen trug) für den Unterricht (siehe (6)). Einige dieser Ideen fanden damals Eingang in den Grundschulunterricht. In den weiterführenden Schulen konnten sich die Themen nicht durchsetzen: „Graphentheoretische Fragestellungen haben seit einigen Jahren Eingang in die neuere Schulbuchliteratur gefunden. Die letzten zwei, drei Jahre verstärkten diese Tendenz nicht.“ (siehe (4)). Gründe sind u. a. eine Abneigung gegen „moderne Mathematik“ nach dem Scheitern der Ideen der Rahmenrichtlinien von 1986 und daraufhin eine Rückbesinnung auf bewährte Inhalte, aber auch dass die Graphetheorie damals noch keiner eigenen Fachrichtung zugeordnet werden konnte und somit keinen klaren Platz innerhalb der Curricula finden konnte.

Erst zu Beginn des neuen Jahrtausends wuchs das Interesse an Graphentheorie und kombinatorischer Optimierung in Deutschland wieder, wie einige Publikationen und Projekte bezeugen, u. a. das von der Volkswagenstiftung finanzierte MATHEON-Projekt „Diskrete Mathematik für die

[1] gefördert von der Volkswagenstiftung

Schule“ (Grötschel, (7)) und das MATHEON-Projekt „Visualisierung von Algorithmen“ (Kortenkamp, (8)). Das wiedererwachte Interesse ist durch durch die rasante Entwicklung des Fachgebietes und seiner Anwendungen, aber auch durch die Kompetenzorientierung in der Schulmathematik und die damit verbundene Suche nach kompetenzfördernden Inhalten begründet.

Typisch diskret

Was ist nun typisch diskret? Diskrete Objekte sind oft schwer auf einen Blick zu erfassen, sind häufig zunächst amorph erscheinende Gebilde. Man kann ihre Elemente aber zählen, ordnen oder strukturieren und das sind Tätigkeiten, die wir im Alltag mit den Dingen, die uns umgeben ständig tun. Diskrete Grundtätigkeiten kennen wir aus dem Alltag.

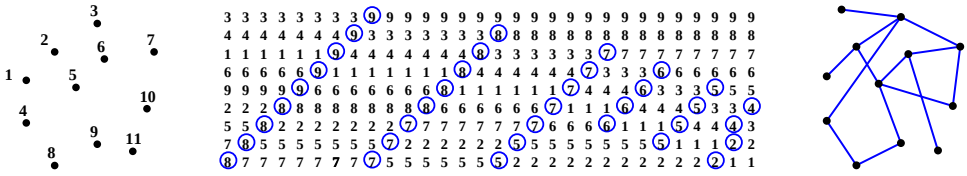


Abb. 1: Diskrete Grundtätigkeiten: zählen, ordnen, strukturieren/in Beziehung setzen.

Diese hier beispielhaft angeführten diskreten Grundtätigkeiten werden nun zu neuen Methoden verknüpft, Geschicktes Zählen durch Anordnen beispielsweise, was direkt zur Beweismethode „Beweisen durch Weiterzählen“, der vollständigen Induktion führt. Dort wird der sonst nicht näher betrachtete Schritt des Weiterzählens genau analysiert. Ein weiteres Beispiel sind Kombinationen von Ziffern, die zu Codierungs- und Decodierungsmethoden führen.

Im Englischen wird für Diskrete Mathematik gelegentlich auch der Begriff „Decision Mathematics“ verwendet. Dieser Begriff hebt eine weitere wichtige diskrete Grundtätigkeit hervor: Entscheidungen treffen. Bei der Modellierung mit Graphen findet man diesen Aspekt, etwa bei der Modellierung eines Labyrinths. Eine typische erste Lösung sieht so aus, dass an jeder Knickstelle des Weges im Labyrinth ein Knoten gezeichnet wird, um dann später festzustellen, dass ein Knoten nur dann gebraucht wird, wenn es eine Entscheidung zu treffen gibt.

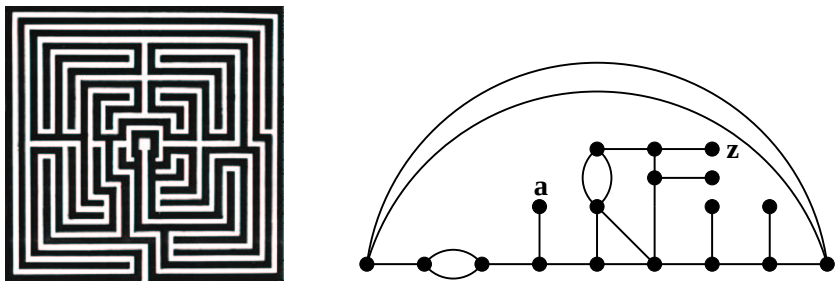


Abb. 3: Modellierung eines Labyrinths. Knoten markieren Entscheidungsmöglichkeiten.

Graphen besitzen eine große Anschaulichkeit und einen sehr hohen Aufforderungscharakter. Ein Grund dafür ist der leichte Übergang zwischen enaktiver, ikonischer und symbolischer Darstellungsebene (vgl. dazu auch Floer a. a. O.). Dieser schnelle und leichte Übergang wird von Schülerinnen und Schülern insbesondere bei der Entwicklung von Graphenalgorithmen ausgiebig genutzt. Mit der Software „Visage“ können Graphen und ihre Adjazenzmatrizen gleichzeitig dargestellt werden (siehe (3)).

Ein weiteres hervorzuhebendes Charakteristikum diskreten Arbeitens ist, dass oft die Einzelschritte (Grundtätigkeiten) sichtbar und dadurch leicht nachvollziehbar bleiben. „Es gibt keine Formel“ äußerte sich ein Schüler erstaunt, während er das chinesische Postbotenproblem erarbeitete. Sowohl bei der Konstruktion von Objekten wie etwa aufspannenden Bäumen, als auch beim Beweisen von Aussagen, wie etwa der Anzahl der Kanten eines Baumes mit *n* Knoten, bleibt das Vorgehen algorithmisch. es kann nicht im Nachhinein zu einer geschlossenen Form bzw. Formel zusammengefasst werden. Für die leichte Fasslichkeit von diskreten Methoden ist dies vermutlich einer der Hauptgründe.

Literatur/Links

(1) H.-G. Bigalke: Graphentheorie im Mathematikunterricht?
Der Mathematikunterricht 20 (1974), Nr. 4, S. 5-10
(2) J. Floer: Optimierung von Netzwerken - kürzeste Wege und größte Flüsse,
Praxis der Mathematik 19 (1977), Nr. 1, S. 1-6, 40-44
(3) A. Geschke, U. Kortenkamp, B. Lutz-Westphal, D. Materlik:
Visage - Visualization of Algorithms in Discrete Mathematics,
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 37 (2005), Nr. 5, S. 395-401
(4) K.-D. Klose: Netze und Landkarten, Der MU 24 (1978), Nr. 3, S. 53-99
(5) B. Lutz-Westphal: Versuch einer Charakterisierung diskreten Arbeitens,
Preprint (2006)
(6) H. Winter: Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule,
Der Mathematikunterricht 17 (1971), Nr. 5, S. 40-66
(7) http://www.math.tu-berlin.de/ westphal/projekt
(8) http://www.cinderella.de/visage

Gabriele KAISER (Moderatorin), Hamburg

Mathematische Modellierung in der Schule

Ziel der moderierten Sektion zur mathematischen Modellierung in der Schule ist die Darstellung des aktuellen Stands der einschlägigen Diskussion, auf nationaler und internationaler Ebene. Dabei werden offene Problemfelder benennt, wie das Fehlen einer einheitlichen Begrifflichkeit bzw. ein unterschiedliches Verständnis zentraler Aspekte, die der Entwicklung einer Theorie zum mathematischen Modellieren in der Schule entgegenstehen. Des Weiteren werden neuere Entwicklungen bzw. Diskussionsstränge dargestellt wie die Aufnahme kognitionspsychologischer Analysen kognitiver Prozesse beim Modellieren. Insgesamt will die moderierte Sektion deutlich machen, dass sich die Diskussion zur mathematischen Modellierung in der Schule in den letzten Jahren deutlich weiterentwickelt und neue Akzente gesetzt hat.

Im ersten theoretisch orientierten Beitrag von Rita Borromeo Ferri und Gabriele Kaiser wird anknüpfend an den aktuellen nationalen und internationalen Diskussionstand zum Modellieren analysiert, welche verschiedenen theoretischen Positionen zum mathematischen Modellieren in der Schule in der internationalen Literatur vertreten werden. Dabei wird deutlich, dass sich verschiedene Richtungen der Diskussion unterscheiden lassen, die recht unterschiedliche Positionen zu den Zielen der Behandlung von Modellierungsbeispielen in der Schule und ihrem theoretischen Hintergrund einnehmen. Vertiefend wird daran anschließend ein Vorschlag für eine Gruppierung der Auffassungen zu den Modellierungskreisläufen, die in der Literatur zum Modellieren existieren, entwickelt. Mit diesen beiden theoriebezogenen Ansätzen, die Begrifflichkeiten, aber auch Intentionen klären, soll ein Beitrag zur Entwicklung einer Theorie des Modellierens geleistet werden.

Im zweiten Teil der Sektion wird eine Richtung in der Modellierungsdiskussion, die so genannte Metaebene des kognitiven Modellierens, im Detail vorgestellt. Die beiden Projekte DISUM (Blum/ Messner/ Pekrun) und KOM² (Borromeo Ferri/ Kaiser) ergänzen sich in ihren theoretischen und empirischen Analysen hinsichtlich eines kognitionspsychologisch betrachteten Modellierungskreislaufes. Die Ergebnisse aus der Empirie beider Projekte sollen insbesondere den Nutzen des „Modellierungskreislaufes unter einer kognitiven Perspektive“ für Lehrende, Lernende und Forschende verdeutlichen.

Im dritten Teil geht es konkret um die Umsetzung von Modellierung in der Schule. Dabei werden im Schulunterricht betreut von Lehramtsstudierenden Probleme bearbeitet, die recht komplex sind und eher projektartig bearbeitet werden müssen. Damit kann dieses Verständnis von Modellierung der Richtung der so genannten realistischen Modellierung zugeordnet werden. In dem Beitrag wird eine begriffliche Klärung des Konstrukts Modellierungskompetenzen versucht. Anschließend wird ein Projekt beschrieben, das Modellierungskompetenzen in der Schule fördern will. Abschließend wird ein Test vorgestellt, der versucht, Modellierungskompetenzen zu messen.

Insgesamt ist festzustellen, dass Modellierung erst seit kurzer Zeit ein fester Bestandteil deutscher Lehrpläne ist. Andere Länder, wie Schweden, Dänemark oder Großbritannien, haben Modellierung als eigenständigen Bereich schon länger in ihren Curricula verankert. Für deutsche Lehrende und Lernende bedeutet dies nun, sich in einen neuen Bereich der Mathematik hinein zu denken und damit umzugehen. Das hier beschriebene Projekt „Modellierung in der Schule“ kann daher als geeignete Möglichkeit angesehen werden, sich dieser Thematik von Lehrer- und Schülerseite in hinreichender Breite zu nähern.

Rita BORROMEO FERRI, Gabriele KAISER, Hamburg

Perspektiven zur Modellierung im Mathematikunterricht – Analysen aktueller Ansätze

1 Richtungen in der Modellierungsdiskussion

Die Existenz unterschiedlicher Richtungen innerhalb der nationalen und internationalen Modellierungsdiskussion hat bereits Kaiser (1995) verdeutlicht. In der Arbeitsgruppe „Applications and Modelling“ auf der vierten Konferenz der ERME (European Society for Research in Mathematics Education) 2005 in Spanien wurde ersichtlich, dass auch in der aktuellen Diskussion verschiedene Perspektiven auf Modellierung existieren. Darüber hinaus wurde deutlich, dass in der internationalen Debatte zwar gleiche Begrifflichkeiten verwendet werden, diese jedoch unterschiedlich aufgefasst werden. Auf der Basis dieser Diskussionen soll im Folgenden ein Vorschlag für eine (normative) Klassifikation dargestellt werden, welche insbesondere auf die mit Realitätsbezügen und Modellierung verbundenen Ziele fokussiert. Folgende Perspektiven der Diskussion werden unterschieden: Realistisches oder angewandtes Modellieren, Pädagogisches Modellieren, Kontextbezogenes Modellieren, Epistemologisches Modellieren und zusätzlich als Metaperspektive das Kognitive Modellieren.

Beim **realistischen** oder **angewandten Modellieren** stehen pragmatisch-utilitaristische Ziele im Vordergrund. Dabei geht es um die Lösung realer und authentischer Probleme, die kaum vereinfacht sind, und deren Bearbeitung zu einem besseren Verständnis der Realität beitragen soll. Mit der Behandlung solcher Beispiele sollen auch Modellierungskompetenzen gefördert werden. Der theoretische Hintergrund dieser Richtung gründet sich auf den angelsächsischen Pragmatismus und der Nähe zur angewandten Mathematik. Als Positionen bzw. Anhänger dieser Richtung können beispielhaft Galbraith, Haines, Houston, Kaiser und Pollak genannt werden.

Das **pädagogische Modellieren** umfasst sowohl didaktisches als auch begriffliches Modellieren. Dabei stehen pädagogische und stoffbezogene Ziele im Vordergrund, d.h. Strukturierung von Lernprozessen und deren Förderung sowie Strukturierung von Lehrplänen (**didaktisches Modellieren**) und Förderung von Begriffsentwicklung und –verständnis (**begriffliches Modellieren**). Im Gegensatz zu den verwendeten Aufgaben der ersten Richtung werden hier die Probleme „pädagogisch aufbereitet“. Didaktische Theorien und Lerntheorien bilden den theoretischen Hintergrund dieser Richtung. Dieser Richtung können Blum, Blomhoj, Maaß und Niss zugeordnet werden.

Das **kontextbezogene Modellieren** umfasst stoffbezogene und psychologische Ziele, wie die Strukturierung von Lernprozessen oder die Analyse von Lösungsprozessen einschlägiger Beispiele. Bei dieser Auffassung von Modellieren stehen mentale Prozesse im Vordergrund, wie z.B. Abstrahieren oder Generalisieren. Als Beispiele werden dazu häufig so genannte „Textaufgaben“ verwendet. Im Hintergrund dieser Richtung steht die amerikanische Problem Solving Debatte oder psychologische Laborexperimente. Vor allem Doerr, Lesh und Sriraman sind als Vertreter dieser Richtung anzusehen.
Das **epistemologische** oder **theoretische Modellieren** verfolgt wissenschaftsorientierte Ziele wie die Förderung von Theorieentwicklung. Verwendete Probleme innerhalb dieser Richtung sind oft „Textaufgaben“, künstliche oder innermathematische Beispiele. Chevallards ‘Anthropological Theory of Didactics’ bildet die Hintergrundtheorie dieser Auffassungen. Insbesondere Positionen aus dem romanischsprachigen Raum wie beispielsweise Bosch, Dorier oder Garcia können dieser Richtung zugeordnet werden.
Als eine Metaperspektive ist das sog. **kognitive Modellieren** anzusehen. Auch hier sind verschiedene Perspektiven zu unterscheiden, wie kognitionspsychologische Analysen kognitiver Prozesse beim Modellieren (Blum/Leiss, Borromeo Ferri) oder Förderung mathematischer Denkprozesse durch Verwendung von Modellen als mentale Bilder oder als physikalische Repräsentanten (Skemp). Die Kognitionspsychologie bildet den theoretischen Hintergrund. Diese Richtung wird deshalb als Metaebene bezeichnet, da sie auch „verträglich“ mit den anderen Perspektiven ist.
Diese Unterscheidungen halten wir für wichtig, da sie einen Beitrag zum Verständnis der Modellierungsdiskussion liefert und erste Schritte zu einer Theorieentwicklung ermöglicht.

2 Kreisläufe in der Modellierungsdiskussion

In der Literatur zum Modellieren findet man eine Vielzahl von Kreisläufen, die beim Modellieren durchlaufen werden, die jedoch bisher hinsichtlich einer Klassifikation noch nicht reflektiert wurden Im Folgenden werden vier Gruppen vorgeschlagen, bei dem der Fokus auf der Unterscheidung zwischen den einzelnen durchlaufenen Stationen und Phasen liegt, konkret, inwieweit in den Kreisläufen zwischen Realer Situation (RS), Situationsmodell (SM), Realem Modell (RM) und Mathematischen Modell (MM) unterschieden wird (siehe Borromeo Ferri, im Druck). Die Phasen Interpretieren und Validieren werden zum Teil separiert oder gemischt in vielen Kreisläufen dargestellt. Dieser Aspekt wird bei der nachfolgenden Gruppierung jedoch nicht weiter aufgegriffen.

Gruppe 1: ***Unterscheidung von Situationsmodell (SM) und Realem Modell*** *(RM):* In dieser Gruppe wird das Situationsmodell (SM) vom Realem Modell (RM) unterschieden. Diese relativ neue Unterscheidung findet sich insbesondere in Forschungen zur Analyse kognitiver Prozessen von Individuen beim Modellieren. Diese neue Kreislaufdarstellung wurde von Blum & Leiss entwickelt, die diese Unterscheidung von Situationsmodell und Realem Modell aus der psychologischen Textlinguistik übernahmen und für die Analyse komplexer Modellierungsaufgaben adaptierten (für Details siehe nachfolgenden Beitrag von Borromeo Ferri, Leiß & Blum). Das Situationsmodell, das ursprünglich meist in Verbindung mit so genannten Word problems verwendet wurde, hat in diesem Kreislauf einen neuen Stellenwert erhalten.

Gruppe 2: ***Gemischter Typ von Situationsmodell und Realem Modell***

Es gibt eine Fülle von Forschungen im Bereich der Textaufgaben, die der Frage nachgehen, ob zum Beispiel die Verwendung eines Situationsmodells hinderlich oder förderlich für den Lösungsprozess etc. (u.a. von Kintsch & Greeno, DeCorte & Verschaffel) Explizit wird dafür aber kein Kreislaufmodell entwickelt. Es wird in der einschlägigen Literatur betont, dass Word problems bereits ein Reales Modell repräsentieren, diese Probleme also bereits schon vereinfacht sind. Das Situationsmodell wird also beim Individuum gebildet und gleichzeitig besteht bereits das Realmodell als Problem. Somit fallen Situationsmodell und Realmodell in einer Phase zusammen.

Gruppe 3: ***Keine Unterscheidung in SM und RM****. RM wird verstanden und bezeichnet als RM.*

In dieser Gruppe wird nicht in Situationsmodell und Realmodell unterschieden. Das Realmodell wird als dieses verstanden und auch so bezeichnet. Blum und Kaiser haben in den 80er und 90ziger Jahren des 20. Jahrhunderts ein dementsprechendes Modell entwickelt.

Gruppe 4: ***Von Realer Situation direkt zum Mathematischen Modell***

Von der gegebenen Realen Situation wird direkt zum Mathematischen Modell gegangen ohne weitere Unterscheidung. Das Vorgehen hängt stark mit den verwendeten Aufgaben in diesem Kontext ab, die komplex und realitätsnah sind. Mit dieser Art Kreislauf arbeiten Pollak, Ortlieb und Schupp.

Literatur

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. Erscheint in Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38, 2.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In: G. Graumann et al. (Hrsg.), Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Bd. 2. Bad Salzdetfurth, Verlag Franzbecker, S. 66-84.

Rita BORROMEO FERRI, Hamburg; Dominik LEISS, Kassel; Werner BLUM, Kassel

Der Modellierungskreislauf unter kognitionspsychologischer Perspektive

Die Projekte DISUM an der Universität Kassel und KOM² an der Universität Hamburg führen in enger Kooperation kognitionspsychologische Analysen kognitiver Prozesse durch, die beim Modellieren ablaufen.

1 Die Projekte DISUM und KOM²

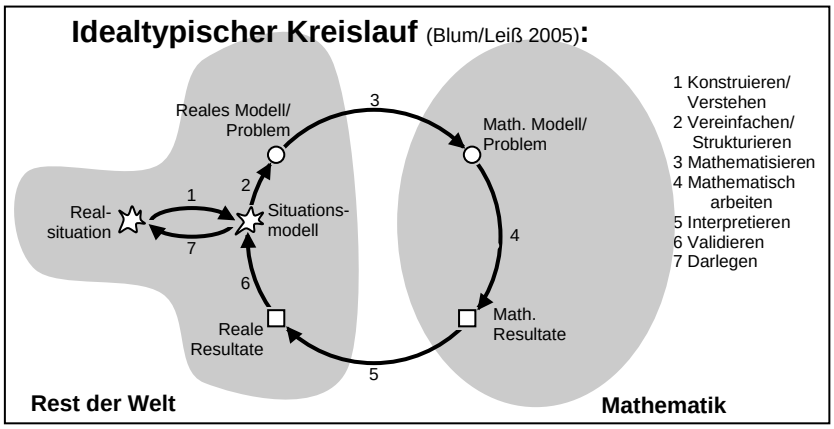
DISUM bedeutet „**D**idaktische **I**nterventionsformen für einen **s**elbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten **U**nterricht in **M**athematik“ (W. Blum/ R. Messner/ R. Pekrun/ D. Leiß/ S. Schukajlow). Das Projekt hat 2002 begonnen und wird seit 2005 im Rahmen der Kasseler Forschergruppe zur empirischen Bildungsforschung von der DFG gefördert. DISUM untersucht u.a. folgende Fragestellungen: 1) Welches Aktivitätspotential haben anspruchsvolle Modellierungsaufgaben, und wie gehen Schüler/innen und Lehrer/innen mit solchen Aufgaben um (Schwerpunkt Kl. 9)? 2) Welche Wirkungen hat gezieltes, selbständigkeitsorientiertes Lehrer-Coaching (Studien im Herbst 2006 und Herbst 2007)? 3) Wie können auf dieser Basis Mathematikunterricht und Mathematiklehrerbildung verbessert werden?

Die Abkürzung KOM² steht für „**Ko**gnitionspsychologische Analysen von **M**odellierungsprozessen im **M**athematikunterricht“ (R. Borromeo Ferri/ G. Kaiser). Erste Vorstudien für dieses Projekt fanden bereits 2004 statt. Seit 2005 wird KOM² als Habilitationsprojekt im Rahmen des Graduiertenkollegs „Bildungsgangforschung“ an der Universität Hamburg gefördert. Folgende erkenntnisleitende Fragestellungen werden in dem Projekt bearbeitet (Schwerpunkt Kl. 10): 1) Welchen Einfluss haben mathematische Denkstile von Lernenden und Lehrenden auf Modellierungsprozesse? 2) Welchen Einfluss haben die Denkstile auf die Schüler-Schüler- und die Lehrer-Schüler-Interaktionen im Unterricht? 3) Kann die in der didaktischen Literatur beschriebene differenzierte Unterteilung des Modellierungskreislaufs in den Vorgehensweisen der Lernenden rekonstruiert werden?

2 Der Modellierungskreislauf

Zentral für die kognitionspsychologische Analyse kognitiver Prozesse beim Modellieren ist eine entsprechende Auffassung vom Modellierungskreislauf. Das in der folgenden Grafik dargestellte Kreislaufmodell wurde von Blum & Leiss (2005) in dieser Form entwickelt, knüpft jedoch an folgende

Traditionen an: Zum einen an die psychologisch orientierte Diskussion zu Textaufgaben (u.a.: Kintsch & Greeno, deCorte & Verschaffel, Reusser) und zum anderen an die pragmatisch orientierte Diskussion zum Realmodellieren (u.a.: Pollak, Burkhardt, Burghes). Es soll betont werden, dass insbesondere Schritt 1 und Schritt 6 als ideosynkratische Konstruktionen zu verstehen sind. Tatsächliche Modellierungsprozesse laufen nicht so linear ab, wie dieser Kreislauf sie idealtypisch darstellt.



Borromeo Ferri (2005) verdeutlicht in Ergebnissen aus KOM², dass „individuelle Modellierungsverläufe“ rekonstruiert werden können, die genau diese „Nicht-Linearität“ des Individuums beim Modellieren aufzeigen.

3 Schüler/innen und Modellierungsaufgaben

In DISUM wurden Laborstudien mit Schülerpaaren aller Kompetenzstufen durchgeführt, sowohl mit als auch ohne Lehrer. Ein Ergebnis dabei war unter anderem, dass alle Schritte im Modellierungskreislauf potentielle kognitive Hürden darstellen, die jedoch unterschiedlich in Abhängigkeit vom Individuum und von der Aufgabe sind (siehe Beitrag von Schukajlow in diesem Band).

In KOM² konnten bei bisher 25 Lernenden, die in unterschiedlichen Klassen und jeweils in Fünfergruppen im Mathematikunterricht zusammenarbeiteten, individuelle Modellierungsverläufe rekonstruiert werden. Diese unterschieden sich auch aufgrund der unterschiedlichen mathematischen Denkstile der Individuen. Einen nicht minder bedeutsamen Einfluss darauf, wie innerhalb des Modellierungsprozesses argumentiert wurde und damit zusammenhängend, wie die einzelnen Phasen vom Beobachter rekonstruiert werden konnten, hatten naturgemäß die Struktur und die Komplexität der Aufgabenstellungen.

4 Lehrer/innen und Modellierungsaufgaben

Im Rahmen von DISUM wurde eine „Best-Practice-Studie“ mit erfahrenen SINUS-Lehrkräften (Schwerpunkt Klasse 9/10) durchgeführt. Die Beurteilung von Unterricht erfolgte dabei nach Qualitätskriterien, wie fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung, kognitive Schüleraktivierung sowie effek-

tive und schülerorientierte Unterrichtsführung. Durch die Wahl von SINUS-Lehrkräften konnte von einer überdurchschnittlichen Unterrichtsgestaltung ausgegangen werden, die sich u.a. darin zeigte, dass Gelegenheiten zum Argumentieren und Modellieren geschaffen, geistige Schüleraktivitäten aktiviert, selbständige Arbeit gefördert und eine fehlertolerante und beurteilungsfreie Arbeitsatmosphäre angeboten wurden.
Ergebnisse aus DISUM zeigen u.a. exemplarisch, wie Lehrer/innen durch ihre vertiefte Kenntnis des Modellierungskreislaufes konstruktiv mit Schülerfehlern, vor allem in der Validierungsphase, umgehen können. Die Schüler/innen werden dabei zur selbständigen Fehlerkorrektur angeregt und erlangen somit auch strategische Erkenntnisse der Aufgabe.
Am KOM²-Projekt nahmen interessierte Gymnasiallehrer(innen) teil. Durch ein fokussiertes Interview mit den Lehrpersonen wurde zunächst ihr mathematischer Denkstil rekonstruiert. Hinzu kamen Videoaufnahmen des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts, durch die analysiert wurde, wie und ob sich der mathematische Denkstil bei Aktionen und Reaktionen der Lehrperson zeigt und welchen Einfluss dieses Verhalten auf Phasen des Modellierungsprozesses hat. Beim Vergleich der Lehrpersonen mit unterschiedlichen mathematischen Denkstilen konnten unter anderem verschiedene Schwerpunkte beim Validieren rekonstruiert werden. Visuelle Denker tendierten zu einer realitätsnahen Validierung, bei der die Verknüpfung zur realen Situation ständig hervorgehoben wurde. Analytische Denker hingegen legten den Schwerpunkt auf eine nachträgliche Formalisierung der Aufgabe, die sie kaum mit der Realität in Verbindung brachten.

5 Zum Nutzen dieses Kreislaufmodells

Dieses Kreislaufmodell ist für Lernende ein hilfreiches metakognitives Werkzeug beim Aufgabenlösen. Ein handhabbares Modell, wie es in DISUM verwendet wurde, könnte sein: 1. Aufgabe verstehen, 2. Modell erstellen, 3. Mathematik benutzen und 4. Lösung erklären. Dieses ist eingebettet in das DISUM-Lernstrategie-Set, welches Ziele/ Volition/ Organisation/ Strategie/ Evaluation umfasst. Für Lehrende ist der Kreislauf ein unentbehrliches Hilfsmittel für Diagnosen und Interventionen. Den Nutzen für Forschende sehen wir vor allem bei der Beschreibung von Lehr-Lern- und Denkprozessen in aufgabengesteuerten Lernumgebungen.

LiteraturBlum, W. & Leiß, D. (2005). „Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe“. In: mathematik lehren, Heft 128, S. 18-21.

Borromeo Ferri, R. (im Druck, 2006). Individual modelling routes of pupils – Analysis of modelling problems in mathematical lessons from a cognitive perspective. In: C.R. Haines et al. (eds.) Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood Publishing.

Gabriele KAISER, Björn SCHWARZ; Hamburg

Modellierungskompetenzen – Entwicklung im Unterricht und ihre Messung

Die Notwendigkeit der Förderung von Modellierungskompetenzen wird in der aktuellen Diskussion um den Mathematikunterricht immer wieder betont. Allerdings gibt es keine einheitlichen Vorstellungen dazu, welche Kompetenzen darunter zu fassen sind und wie diese zu fördern sind. Im angelsächsischen Raum gibt es an den ehemaligen Polytechnical Universities eine intensive Diskussion dazu, an die im Folgenden angeknüpft wird.

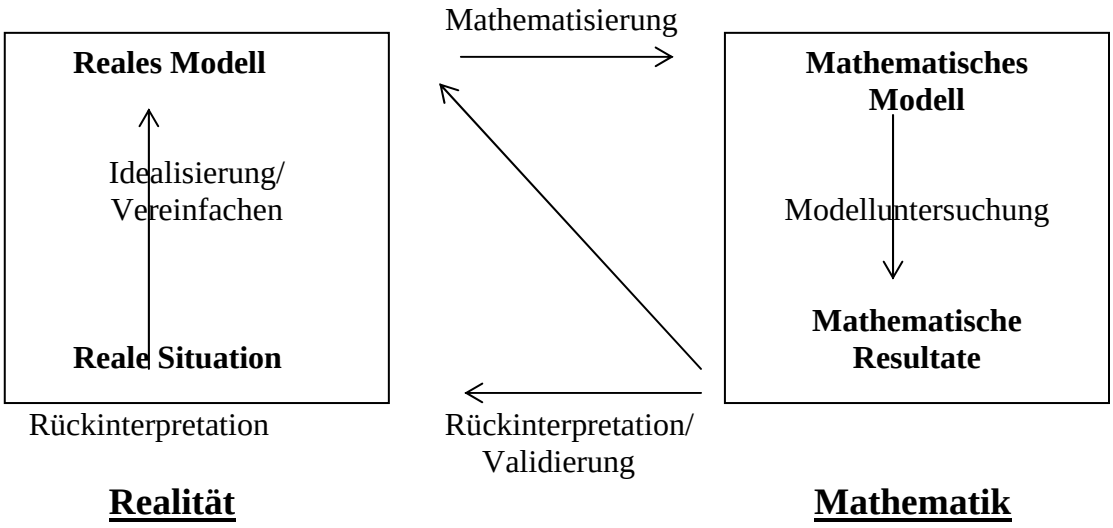
1. Rahmen für Modellierungskompetenzen

Über Modellierungskompetenzen wird im internationalen Raum eine intensive Diskussion geführt, z.B. Houston & Neill, Haines & Crouch, Izard oder auch Maaß. Es besteht weitgehend Konsens, dass global Modellierungskompetenzen Fähigkeiten und die Bereitschaft beinhalten, mathematikhaltige Probleme aus Realität durch mathematische Modellierung zu bearbeiten.
Im Detail werden darunter u.a. folgende Kompetenzen verstanden:

- Kompetenz reale Probleme durch selbst entwickelte mathematische Beschreibungen (Modell) zu bearbeiten;
- Kompetenz über Modellierungsprozess zu reflektieren durch Aktivierung von Meta-Wissen;
- Einsicht in die Beziehungen zwischen Mathematik und Realität, insbesondere in Subjektivität von Modellierung;
- Soziale Kompetenzen wie Kompetenz zur Gruppenarbeit oder Kommunikationskompetenzen

Legt man die in folgender Abbildung dargestellte Auffassung eines Modellierungskreislaufes zugrunde, lässt sich das Konstrukt Modellierungskompetenz durch folgende Teilkompetenzen präzisieren:

- Vereinfachen des Problems und Konzentration auf bearbeitbare Fragen;
- Identifikation zentraler Variabler und ihrer Beziehungen;
- Formulierung von Annahmen und Beschreibung des Problems;
- Konstruktion und Auswahl adäquater mathematischer Beschreibungen des Problems und Entwicklung von Lösungen innerhalb des Modells;
- Interpretation der Lösungen innerhalb des realen Problemkontexts und Evaluation der Angemessenheit der Lösungen



2. Beschreibung von Modellierungsunterricht an Schulen

In einem Projekt an der Universität Hamburg am Fachbereich Mathematik unter Beteiligung der Mathematikdidaktik und verschiedenen Hamburger Schulen werden seit 2000 Modellierungsprojekte im Mathematikunterricht von Klassen der gymnasialen Oberstufe durchgeführt. In einem sich über ein Schuljahr erstreckendem Projekt bearbeiten Schüler/innen komplexe Modellierungsbeispiele, wobei sie von Studierenden des Lehramts Mathematik unterstützt werden. In einem universitären Begleitseminar werden mit den Lehramtsstudierenden die Erfahrungen und Probleme diskutiert. Zentral ist dabei die in Kleingruppen stattfindende Modellierungsarbeit der Schüler/innen, die von den Lehramtsstudierenden nur unterstützt wird, wobei schnelle Interventionen nicht erwünscht sind. Vielmehr sollen die Schüler/innen selbst Lösungen für die ihnen gestellten Probleme entwickeln und dabei die Erfahrung der Unsicherheit und Ratlosigkeit machen, die zentral für Modellierungsaktivitäten ist.

Bei den von Industriemathematiker/innen vorgeschlagenen Problemen handelt es sich um authentische Beispiele, die nur wenig vereinfacht sind und für die oft keine Lösungen bekannt sind. Dabei wird lediglich eine problemhaltige Situation beschrieben, die Schüler/innen sollen dann selbst eine für sie bearbeitbare Fragestellung entwickeln. Folgende Fragestellungen wurden u.a. bisher bearbeitet:

- Fangquoten in der Fischereiwissenschaft
- Bestmögliche Stationierung von Rettungshubschraubern in Südtirol
- Strahlentherapieplanung bei Krebspatienten
- Identifikation von Fingerabdrücken
- Preisgestaltung von Air Berlin

3. Test von Modellierungskompetenzen

In der in Abschnitt 1 erwähnten angelsächsischen Diskussion wurde ein Modellierungstest für Universitätsstudierende im Bereich angewandter Mathematik entwickelt. Der Test intendiert zu messen, inwieweit durch Modellierungskurse Modellierungskompetenzen gefördert wurden. Dieser Test ist als Paper-Pencil-Test mit Multiple-Choice-Items konzipiert, wobei jede Teilmodellierungskompetenz durch ein Item gemessen wird.

Dieser Test wurde im letzten Modellierungszyklus mit den Schüler/innen durchgeführt: Insgesamt nahmen an dem Test 57 Schüler/innen aus Jgst. 11 und 12 teil, knapp zwei Drittel der Schüler/innen stammten aus Grundkursen. Ebenfalls zwei Drittel der Beteiligten war männlichen Geschlechts. Zwei Paralleltests wurden zu Beginn des Projekts und in der Projektmitte durchgeführt, aus organisatorischen Gründen kann der Test zu Projektende nicht berücksichtigt werden

Die beteiligten Schüler/innen erzielten bereits zu Beginn der Studie bemerkenswert hohe Ergebnisse verglichen mit den Universitätsstudierenden. Der Posttest erbrachte eine deutliche Steigerung der Leistungen der Schüler/innen. Es zeigten sich große Unterschiede in den Leistungen bei den einzelnen Teilkompetenzen: So hatten die Schüler/innen insbesondere große Probleme bei der Klärung des Ziels und der Selektion eines angemessenen mathematischen Modells, währenddessen sie bei der Entwicklung vereinfachender Annahmen, der Formulierung des Problems, der Entwicklung zentraler Variabler und Parameter, der Formulierung mathematischer Aussagen und dem Rückbezug auf das reale Probleme gute Leistungen erbrachten und ihre Leistungen steigern konnten. Insgesamt zeigt sich allerdings, dass der Test aufgrund seines Fokus auf Teilkompetenzen, die entlang der Phasen des Modellierungskreislaufes beschrieben werden, globale Kompetenzen, die auf Metakognition zielen, nicht erfassen kann.

Insgesamt wird mit dieser kleinen Fallstudie deutlich, dass auch umfassende Modellierungskompetenzen bei Schüler/innen durch entsprechende Unterrichtsangebote gefördert werden können.

Literatur:

Kaiser, G. (im Druck, 2006). Mathematical modelling at schools – How to promote modelling competencies. In: C.R. Haines et al. (eds.) Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood Publishing.

Friedhelm KÄPNICK, Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Problembearbeitungsstile mathematisch begabter Grundschulkinder

In den letzten Jahren ist eine zunehmende Akzeptanz und Relevanz bzgl. der Förderung begabter Kinder in der breiten Öffentlichkeit zu beobachten. Diese Entwicklung belebte auch diesbezügliche Forschungsaktivitäten. In der *Moderierten Sektion* stellen wir einige unserer aktuellen Untersuchungen zum Themenfeld „Mathematisch begabte Grundschulkinder“ vor.

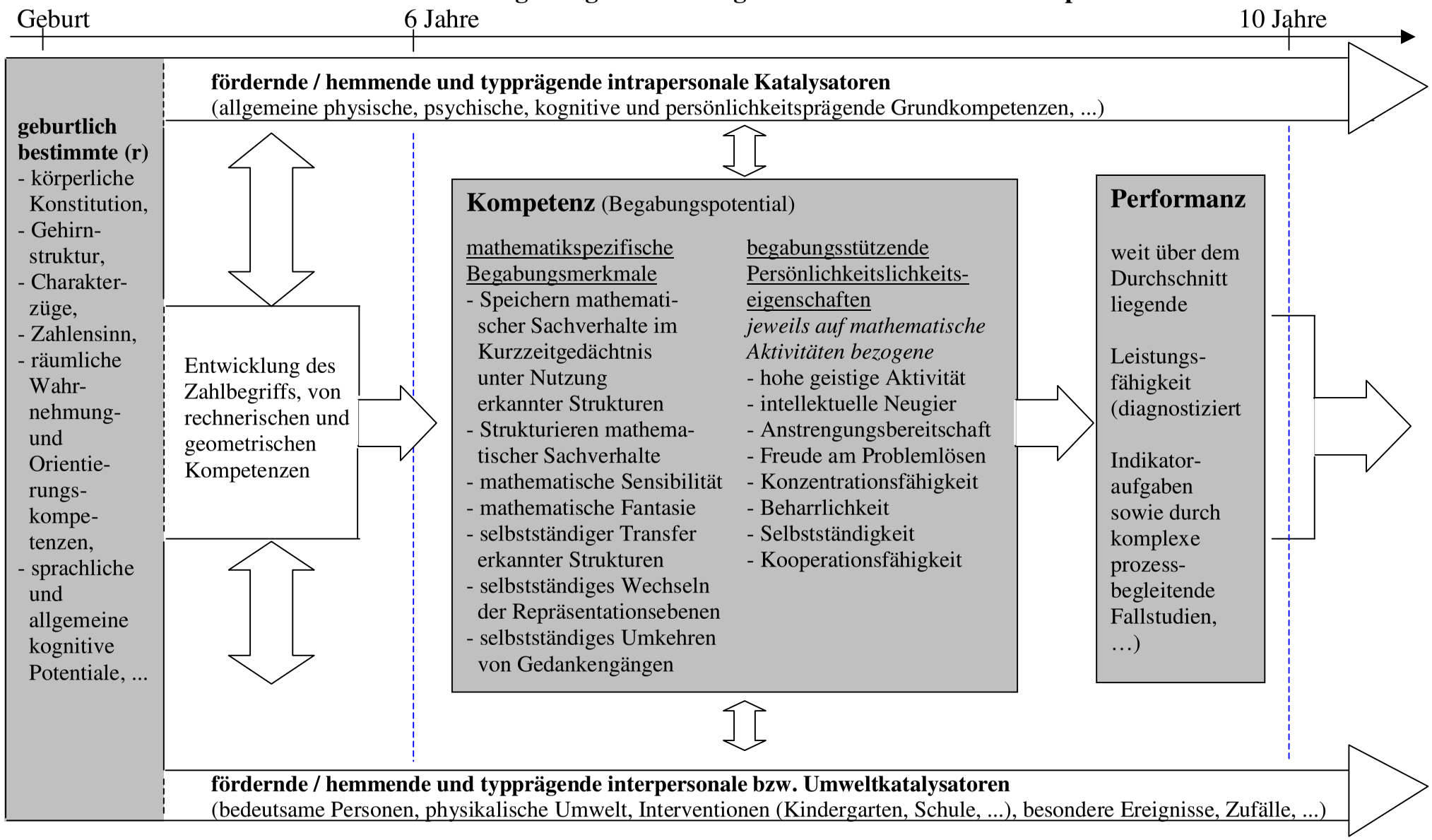
Als erstes kann man die Neustrukturierung eines allgemeinen Modells mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter nennen, das Käpnick und Fuchs infolge der Weiterentwicklung verschiedener Theorieansätze zu Begabungsmodellen und einer hiermit eingehenden stetigen Auseindersetzung mit eigenen Positionen aus dem bisherigen Merkmalssystem von Käpnick (1998) entwickelten (vgl. nachfolgende Seite). Forschungsmethodologische Basis hierfür war die klassische Variante der Modellbildung aus den quantifizierenden Sozialwissenschaften.

Inhaltliche Hauptaspekte der Weiterentwicklung waren

- eine stärkere Berücksichtigung des Ansatzes von Gagné, der in Übereinstimmung mit unseren Überzeugungen in seinem Modell den generellen Prozesscharakter von Begabungsentwicklung betont,
- eine Einrahmung unseres Modells durch fördernde und typprägende intrapersonale und interpersonale Katalysatoren, die in Modellen (bzw. deren Weiterentwicklungen) von Renzulli, Mönks oder in Untersuchungen von Betts, Winner u. a. deutlich herausgestellt werden,
- neuere Erkenntnisse der Hirnforschung und der Neuropsychologie zu vorgeburtlichen bzw. zu angeborenen physischen, psychischen und kognitiven Potentialen und deren Bedeutung für die gesamte individuelle Entwicklung eines Menschen,
- jüngere mathematikdidaktische Untersuchungsergebnisse zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen im Kindergartenalter.

Ein zweiter Entwicklungstrend betrifft eine zunehmend differenziertere Sicht auf unterschiedliche Begabungsausprägungen und Entwicklungsverläufe bei mathematisch begabten Grundschulkindern. Hierzu stellt Fuchs in ihrem Beitrag Ergebnisse von Untersuchungen zu verschiedenen Vorgehensweisen dieser Kinder beim Problemlösen vor und gibt Schlussfolgerungen für die Schulpraxis an. Käpnick widmet sich in seinem Beitrag der Bedeutung von Intuitionen beim Problemlösen kleiner „Matheasse“ und stellt erste Hypothesen zur Bedeutung, zur individuellen Ausprägung sowie zum didaktischen Umgang mit intuitiven Problemlösephasen auf.

Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter von Käpnick&Fuchs



Mandy FUCHS, Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen

Derzeit gibt es eine kaum zu überschauende Fülle verschiedener Theorieansätze zur Kennzeichnung des Begabungsbegriffes. Meine eigenen theoretischen Grundpositionen, die sich durch eingehende Auseinandersetzungen mit dem Forschungsgegenstand ergaben, lassen sich wie folgt charakterisieren: Der Begabungsbegriff ist gekennzeichnet durch

- einen komplexen interdisziplinären Charakter,
- eine ganzheitliche Sicht auf die Persönlichkeit,
- die Bereichsspezifik mathematischer Begabung,
- die dynamische Komponente der Begabungsentwicklung,
- die Möglichkeit und zugleich Notwendigkeit einer frühen Diagnostik und sinnvollen Förderung begabter Kinder und
- die Existenz unterschiedlicher Begabungsausprägungen.

Hinsichtlich des letztgenannten Aspekts gibt es aber noch große theoretische Defizite. Zum Beispiel ist offen, welche verschiedenen Vorgehensweisen mathematisch begabte Grundschüler beim Problemlösen bevorzugen, wie konstant Kinder diese schon anwenden und inwiefern sich ihre Vorgehensweisen beim Problemlösen von denen der „normal“ bzw. unterdurchschnittlich entwickelten Kindern unterscheiden. Diese Defizite sind angesichts ihrer fundamentalen Bedeutung für eine individuelle Förderung mathematisch begabter Grundschulkinder und ebenso aller Kinder dieser Altersstufe von erheblicher Relevanz.

Unter der **Vorgehensweise beim Problemlösen** verstehe ich in Anlehnung an KÄPNICK (vgl. KÄPNICK 1998, S. 250) die Art und Weise, wie ein Kind

- ein Problem erfasst (Informationsaufnahme und Analyse des Problems),
- das Problem zu lösen versucht (Entwicklung von Lösungsansätzen und strategien, bevorzugte Handlungsebenen beim Problemlösen, spezifischer Denk-, Lern- und Arbeitsstil beim Problembearbeiten),
- die Lösung der Problemaufgabe darstellt und wie es diese kontrolliert.

Dabei beschränke ich die Vorgehensweise beim Problemlösen nicht auf kognitive Fähigkeiten, sondern berücksichtige auch allgemeine Persönlichkeitseigenschaften und emotionale Aspekte des Problemlösers.

Ausgehend von der benannten Situation bestand somit ein **Hauptziel** der Untersuchungen **im begründeten Bestimmen verschiedener Vorgehensweisen von Dritt- und Viertklässlern mit einer potentiellen mathematischen Begabung beim Problemlösen**.

Im Gesamtergebnis der empirischen Untersuchungen kann entsprechend dieser Hauptzielstellung als **erstes** eingeschätzt werden, dass mathematisch begabte Grundschüler beim Problemlösen verschiedene Vorgehensweisen anwenden. So konnten aufgrund der quantitativen Untersuchungen die 62 Probanden folgenden Vorgehensweisen zugeordnet werden:

- Abwechselndes Überlegen und Probieren - Suchen nach Lösungsmustern 39
- Mischtyp 16
- Intuitives Vortasten 5
- Systemhaftes Vorgehen 1
- Hartnäckiges Probieren 1

Zusammenfassend kann also geschlussfolgert werden, dass

- die Vorgehensweise *„Abwechselndes Überlegen und probieren – Suchen nach Lösungsmustern“* bei diesen Kindern am häufigsten auftritt,
- vergleichsweise eher seltener vermutlich das *„Systemhafte Vorgehen“* und das *„Hartnäckige Probieren“* vorkommen,
- das *„Intuitive Vortasten“* bei mathematisch begabten Grundschulkindern offenbar vielfach eine besondere Rolle spielt, wobei sich das Erfassen intuitiver Problemlösephasen als besonders schwierig herausstellte,
- nicht alle Kinder nur einem Problemlösestil zugeordnet werden können, weil sie verschiedene Vorgehensweisen beim Lösen von Problemaufgaben nutzen, sie bilden somit die Gruppe der *„Mischtypen“*.

Aufgrund der qualitativen Untersuchungen konnten die prägenden Merkmale der verschiedenen Vorgehensweisen präzisiert werden. So verfolgt z. B. ein Kind, was vorwiegend *systemhaft* vorgeht, ein sachbetontes Problemlösen nach bestimmten Ordnungsprinzipien. Es erkennt sehr schnell mathematische Strukturen und sucht stets unter ganzheitlicher Sicht nach Lösungsmustern. Dabei entwickelt es einseitige Lösungsansätze und denkt in eine Richtung. Ein solches Kind verfügt über eine enorm hohe mathematische Sensibilität und vermutlich über eine anerzogene Einsicht zur vollständigen Lösungsdarstellung und zur

Kontrolle bei erkannter Notwendigkeit. Diese Kinder sind oft ruhig und zurückhaltend sowie ausgeglichen und emotional stabil. Sie zeigen jedoch einen hohen Selbstanspruch.

Zweitens unterstützen die empirischen Untersuchungen innerhalb der durchgeführten Längsschnittstudien die Annahme, dass die bevorzugten Vorgehensweisen schon relativ konstant sind und sich innerhalb der Grundschulzeit teilweise sogar tendenziell verfestigen. Bei einigen Kindern stellen sich vermutlich aber auch „Übungseffekte“ ein, die im Zusammenhang mit den im Förderprojekt regelmäßig durchgeführten Lösungsdiskussionen zu angewendeten Strategien stehen.

Drittens konnten im Ergebnis der qualitativen und quantitativen Untersuchungen Schlussfolgerungen für die Förderung mathematisch potentiell begabter Grundschulkinder gezogen werden. So lassen sich drei allgemeine Orientierungen für die Förderung dieser Kinder innerhalb des Schulunterrichts und in Förderprojekten begründen:

- ein **prinzipielles Ermöglichen und Akzeptieren verschiedener Vorgehensweisen** beim Bearbeiten mathematischer Problemaufgaben als ein Aspekt der durchgängigen individuellen und differenzierten Förderung,

- ein **konstruktives Nutzen der Verschiedenartigkeit von Problemlösestilen** für ein wechselseitig bereicherndes gemeinsames Lernen aller Kinder,

- ein notwendiges **prozessorientiertes Diagnostizieren** der subjektiv bevorzugten Problemlösestile, um Besonderheiten des Lernens jedes Kindes verstehen und es dementsprechend individuell fördern zu können.

Eine schulpraktische Relevanz des Untersuchungsthemas bestand also darin, aus den neuen Erkenntnissen zu spezifischen Vorgehensweisen und Denkprozessen von Kindern beim Problemlösen praktische Orientierungshilfen für Lehrerinnen und Lehrer abzuleiten. Somit war die Zielstellung meiner Untersuchung sowohl für die Begabungsforschung bzgl. des Themenkomplexes „Mathematisch begabte Grundschulkinder“ als auch für die Förderung kleiner „Matheasse“ im schulischen Mathematikunterricht von besonderer Bedeutung.

Friedhelm KÄPNICK, Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Intuitives Erfassen, Vortasten und Lösen – ein besonderer Problembearbeitungsstil mathematisch begabter Grundschulkinder

Als Einstieg: Ein kleines Fallbeispiel

Welche durch 7 teilbare Zahl lässt beim Teilen durch 2, 3, 4, 5 und 6 den Rest 1? Gibt es mehrere solcher Zahlen?

Als wir die Aufgabe des indischen Mathematikers Bhaskara (um 600 n. Chr.) in einer Förderstunde mathematisch begabten Viertklässlern stellten, meldete sich Simon nach etwa 10 s und gab freudestrahlend 721 als richtige Lösungszahl an. Auf unsere Frage, wie er so schnell die Lösungszahl ermitteln konnte, schaute er uns überrascht an. Eine Erklärung wusste er nicht. Er meinte nur unsicher: „*Ich kann es nicht erklären. Die Zahl war auf einem Mal da!*“

In einem sensibel geführten Gespräch gelang es uns dann, Simons sprunghafte Gedankengänge zu erkennen, die ihm hierbei selbst erst bewusst wurden. Simon erahnte nach dem Lesen der Aufgabe blitzschnell einen Zusammenhang mit der Zahl 21, da 21 ein Vielfaches von 7 ist und beim Teilen durch 2, 4, und 5 den Rest 1 lässt. Somit erfüllt 21 bereits einen Teil der geforderten Zahleigenschaften. Dann probierte Simon im Kopf sprunghaft weiter, indem er zu 21 zuerst 70 und dann 700 addierte.

Simons Lösung verdeutlicht, dass er die wesentlichen Zahlbeziehungen intuitiv erahnte und auf diese Weise in faszinierend kurzer Zeit eine (übrigens nicht die einzige) Lösung erbrachte. Der Junge konnte zudem seine sprunghaften Lösungsschritte nicht erklären.

Hauptgründe für häufige kindliche Intuitionen beim Problemlösen

Nach unseren Fallstudien spielt offenbar bei allen mathematisch begabten Kindern Intuition beim Lösen anspruchsvoller Problemaufgaben eine Rolle. Hauptgründe könnten hierfür sein:

a) die besondere Sensibilität dieser Kinder für Mathematik (für Zahlen, Rechenbeziehungen, Muster, …),
b) eine noch weitestgehend fehlende Routine und die noch recht beschränkten mathematischen Kompetenzen von Grundschulkindern (Intuition spielt üblicherweise immer dann eine Rolle, wenn „bewusste Klarheit“ noch fehlt.),
c) das mehr oder weniger für Kinder typische spontane, offene und noch nicht „stilisierte“ Denken bzw. Herangehen an Problemaufgaben,
d) die Einordnung von Intuition als wesentlicher Aspekt mathematisch-produktiven Tätigseins.

Als exemplarische Belege für den zuletzt genannten Aspekt mögen folgende Selbstreflektionen bekannter Mathematiker und Forscher dienen:

Reflexion von C. F. Gauß (1777-1855) über das Finden eines Beweises:
„Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen – aber nicht mit meinem mühsamen Suchen, sondern bloß durch die Gnade Gottes, möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst; ich selbst wäre nicht imstande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte – und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen." (zitiert nach B. L. v. d. Waerden: Einfall und Überlegung. – Birkhäuser, 1973. - S. 3)

A. Einsteins Erkenntnisstil:
„Wenn Einsteins Denken aufbricht, sind Formeln und Wörter weit weg. Am Anfang finden sich bei ihm Bilder und Anschauungen – in der speziellen Relativitätstheorie zum Beispiel der vorrückende Zeiger einer Turmuhr und die damit verknüpfte Wahrnehmung der Zeit … seine Einbildungskraft sucht dort, wo die Bilder Schönheit erkennen lassen." (aus: E. P. Fischer: Einstein – Ein Genie und sein überfordertes Publikum. – Springer-Verlag, 1996. – S. IX)

<u>Erste „Arbeitsdefinition" zum Begriff „mathematische Intuition"</u>
Ausgehend von verschiedenen Ansätzen zum Intuitionsbegriff verstehe ich unter „mathematischer Intuition" in erster Annäherung
- einen vielfach auftretenden und wichtigen Aspekt mathematischen Problemlösens,
- der auf dem jeweiligen Vorwissen und auf den allgemeinen kognitiven Kompetenzen (z.B. dem „flüssigen" Denken) des Problemlösers basiert,
- der zugleich durch ganzheitlich-komplexes, sinnlich-emotionales Erfassen eines mathematischen Sachverhalts gekennzeichnet ist,
- der nicht ausschließlich an Sprache, sondern auch an subjektiv konstruierte komplexe „Bild- und Symbolwelten" gebunden ist,
- der in allen Problemlösephasen auftreten und den jeweiligen Stil wie auch die Lösungsqualität mitbestimmen kann, und zwar
  - als sinnlich-emotionales ganzheitlich-komplexes Erfassen einer Problemsituation,
  - als plötzliche, mitunter vage Eingebung einer Lösungsidee,
  - als bruchstückhafte oder diffuse Darstellung, Erklärung bzw. Begründung einer Problemlösung.

Unter den mathematisch begabten Grundschulkindern gibt es Kinder, bei denen Intuition vergleichsweise eine größere Rolle spielt. Hierbei lassen sich nach unseren bisherigen Erkenntnissen wiederum zwei Typen unterscheiden.

<u>a) Typ „Mark":</u>
- sehr temperament- und fantasievoll,
- denkt blitzschnell, sehr spontan und sprunghaft,

- denkt weniger in Sprache, sondern vielmehr im Un- und Unterbewussten in Bildern und Symbolen, wodurch er viel schneller viel mehr Sachverhalte „verarbeiten“ kann,
- hat eine „pure spontane“ Freude am Finden einer (oft originellen) Lösungsidee, zugleich aber wenig Motivation zum korrekten Beschreiben, Begründen und Darstellen von Lösungswegen (was aufgrund der „chaotischen“ Denkweise auch sehr erschwert und z. T. für ihn nicht reflektierbar, eigentlich gegen seine „Natur des Denkens“ ist,
- äußert oft bei Erklärungen nur: „*Das sieht man doch!*“, „*Ich habe es gleich gesehen.*“, …
- hat oft chaotische Heftführung,
- Qualität der Lösungen sehr schwankend (von „genial“ bis „nichts“)

b) Typ „Jan“:
- hat in bestimmten speziellen Bereichen Defizite (z.B. bzgl. sprachlicher Kompetenzen oder des räumlichen Vorstellungsvermögens),
- nutzt Intuition und hat solche Vorgehensweisen auf natürliche Weise entwickelt, um seine Defizite auszugleichen,
- hat zugleich bzw. auf diese Weise eine sehr hohe Sensibilität für Zahlen, Zahlbeziehungen u. Ä. entwickelt,
- denkt auch sehr spontan, ist sehr eifrig beim Problemlösen, kann aber im Unterschied zum Typ „Mark“ beim Beschreiben oder Begründen von Lösungswegen vergleichsweise gründlicher und gewissenhafter sein,
- Qualität der Lösungen nicht so extrem schwankend wie beim Typ „Mark“.

Intuitive Lösungsansätze sind sicher nicht leicht zu erkennen und zu verstehen, sie sollten u. E. deshalb aber nicht als geringwertig beurteilt werden. Da Intuitionen vielfach mathematische Problemlöseprozesse von begabten (und sehr wahrscheinlich auch von weniger begabten) Kindern mitbestimmen, dieser Aspekt aber bisher i. A. wenig beachtet wird, erscheint es notwendig, Orientierungshilfen (Musterbeispiele für das Erkennen von Intuitionen, Empfehlungen zum Umgang mit Intuitionen) für Förderprojekte und für den täglichen Mathematikunterricht zu erarbeiten.

Gert KADUNZ, Klagenfurt

Zum Schreiben von Mathematik

Betrachtungen zum Schreiben über Mathematik finden sich in zahlreichen mathematikdidaktischen Publikationen. Eines der aktuellen Beispiele stellt das Oktoberheft 2005 der *Praxis der Mathematik in der Schule* dar. In ihrem Einleitungsbeitrag beschreiben Sebastian Kuntze und Susanne Prediger (Kuntze/Prediger, 2005) Unterrichtsumgebungen, welche Schreibanlässe zum Schreiben über Mathematik anbieten. Ein solches Schreiben kann, um mit Hermann Maier (Maier, 1999) zu sprechen, als eine textliche Eigenproduktion bezeichnet werden. Mit ihnen, so Maier, werden Schüler angeregt, „sich der Inhalte in besonderer Weise bewusst zu werden, sie zu analysieren und verstehend zu durchdringen“ (Maier, 1999, S. 13). Ähnlich lauten die Einschätzungen zum Verfassen von Texten über Mathematik bei Niederdrenk-Felgner (1999). Auch die mathematikdidaktische Literatur des angelsächsischen Raumes bietet Beispiele für eine solche Sicht auf Schreiben. Ich verweise exemplarisch auf Candia Morgans Arbeit zu diesem Thema.(Morgan, 1998).

In einer Art von Gegenüberstellung oder besser gesprochen als komplementäre Ergänzung zu diesem Schreiben über Mathematik konzentriere ich mich auf das Schreiben von Mathematik, also auf das schriftliche Geschehen von Mathematik in statu nascendi. Der Tätigkeit des „materiellen“ Schreibens im Sinne der Herstellung von mathematischer Schrift gilt mein Augenmerk. Ein Unternehmen, das sich um Schrift bemüht, kann von unterschiedlichen Positionen aus begonnen werden. Eine davon ist die Sicht auf das Geschrieben von der Semiotik her. Damit meine ich die Theorie der Zeichen, welche C.S. Peirce folgt. Peirce’ Überlegungen zum Schreibthema sind in dieser Hinsicht in der mathematikdidaktischen Literatur unter dem Titel des „Diagramms“ und des „diagrammatischen Denkens“ ausführlich behandelt worden. Ich verweise beispielhaft auf die entsprechenden Arbeiten von Willi Dörfler und Michael Hoffmann (Dörfler, 2004; Hoffmann, 2005). Eine andere Sicht auf Schrift würden bildtheoretische Ansätze ermöglichen, die unter dem Stichwort „Visualisierung von Mathematik“ zu finden sind (Kadunz, 2003).

Die Position, die ich für meine Einschätzung vom „mathematischem Schreiben“ – im Sinne der Herstellung von sichtbaren Schriftzeichen – hier einnehme, ist eine medientheoretische Sicht, bei der ich mich wesentlich auf Sybille Krämer (Krämer, 2003) beziehe. Ihre Überlegungen gründen einerseits in Gedanken von Linguisten wie beispielsweise Florian Coulmas oder Roy Harris (Coulmas, 1985; Harris, 2001). Beide untersuchten das

Verhältnis von geschriebener und gesprochener Sprache. Andererseits bezieht sich diese medientheoretische Position auch auf epistemologische Ansätze, wie sie Hans-Jörg Rheinberger (Rheinberger, 2005) oder Gaston Bachelard (Bachelard, 1994) formuliert haben.

Was sind nun Krämers Sichtweisen auf Schrift bzw. auf das Verhältnis von Schrift und Sprache und wie lassen sich diese für die Mathematikdidaktik verwenden? Zum ausführlichen Nachvollzug der Verwendung für die Mathematikdidaktik verweise ich auf Kadunz, 2006. Hier mag eine schlaglichtartige Darstellung genügen.

Zum Ersten ist hier festzuhalten, dass für Krämer wie auch für Coulmas oder Harris Schrift mehr ist, als nur materiell und visuell festgehaltene Sprache. Das graphisch-visuelle der Schrift ist nicht nur eine Begleiterscheinung, sondern ist mit der damit einhergehenden Zweidimensionalität konstitutiv für bestimmte Verwendungsweisen von Schrift. Diese Zweidimensionalität ermöglicht buchstäblich die Sichtbarmachung von Aspekten unseres Denkens, die in der gesprochenen Sprache kein Äquivalent besitzen. Blicken wir beispielsweise auf geschriebene Inhaltsverzeichnisse, so ergeben sich für uns aus den tabulatorischen Einrückungen oder den unterschiedlichen Schriftgrößen Orientierungsmarkierungen, welche in der gesprochenen Sprache in dieser Über-*sicht*-lichkeit nicht ausgedrückt werden können. Die Groß- und Kleinschreibung unterstützt auf ihre Weise die differenzierte Darstellung eines Sachverhaltes. Die gesprochene Sprache muss darauf verzichten. Das Einfügen von Fußnoten in einen Text erlaubt gleichsam das Abschweifen von einer Argumentationslinie, ohne den Leser dazu zu zwingen. Man kann Fußnoten auch nachträglich lesen. Dies ist beim Hören einer gesprochenen Rede nicht möglich.

Neben der Schrift, die einer gesprochenen Sprache zugeordnet ist, finden wir beim Betreiben von Mathematik eine besondere Schrift. Diese Schrift der Mathematik zeichnet sich vor allem dadurch aus, dass mit ihr Operationen durchgeführt werden können. Daher nennt Krämer sie eine operative Schrift. Eine solche operative Schrift, die man auch mit Mitteln der Peirceschen Semiotik und dem dort definierten diagrammatischen Denken (Hoffmann, 2005) eingehend untersuchen kann, eröffnet durch die Möglichkeit der Durchführung von Operationen (regelgeleitetes Umformen) neue Sichtweisen auf das Geschriebene. Darüber hinaus vermutet Krämer im Anschluss an Hans-Jörg Rheinberger (Rheinberger, 2005, S. 9ff), dass Schrift Dinge unseres Denkens – epistemische Dinge, wie Rheinberger es nennt – sichtbar macht. Ich gehe hier, gerade unter Berücksichtigung des eben erwähnten diagrammatischen Denkens, noch einen Schritt darüber hinaus. Schrift kann, indem sie aufgeschrieben wird,

Dinge des Denkens nicht nur sichtbar machen, sondern diese auch erzeugen. Insofern entstehen Dinge des Denkens, an die wir vorher nicht gedacht haben. Ein Beispiel soll dies erläutern.
Manfred Katzenberger, Lehrer für die Unterrichtsfächer Mathematik und Darstellende Geometrie an einem österreichischen Gymnasium unternahm mit Lernenden aus den Schulstufen 7 bis 9 im Frühjahr 2005 eine Reihe von Unterrichtsversuchen. Er hat mir aus seinen umfangreichen Ergebnissen die im Folgenden verwendeten Daten zur Verfügung gestellt.

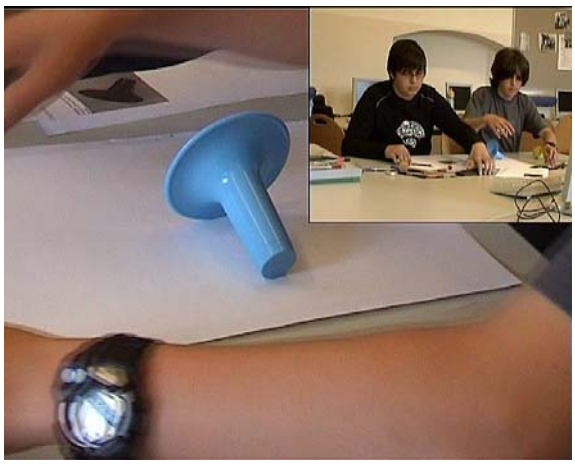


Abbildung 1

Zwei Lernenden der 8. Schulstufe wurde die Aufgabe gestellt, die Bewegung eines vorgegebenen Drehkörpers zu beschreiben. Abbildung 1 zeigt diesen Körper. Die Aktivitäten der Lernenden wurden mit zwei Videokameras aufgezeichnet. Zwei recht unterschiedliche Lösungswege, welche die Lernenden einschlugen, können aus den Videodaten abgelesen werden. In einem ersten Durchgang konzentrierten sich die Probanden zuerst auf Aktivitäten mit dem Drehkörper selbst. Dabei wurde auf einem Stapel Papier eine Spur der Rollbewegung buchstäblich durch mechanischen Druck erzeugt. Diese Spur wurde als sicht- und fühlbare Schrift in Folge vermessen und daraus eine geometrische Konstruktion gewonnen. Dies lieferte die erste Lösung. Darauf möchte ich hier nicht weiter eingehen.

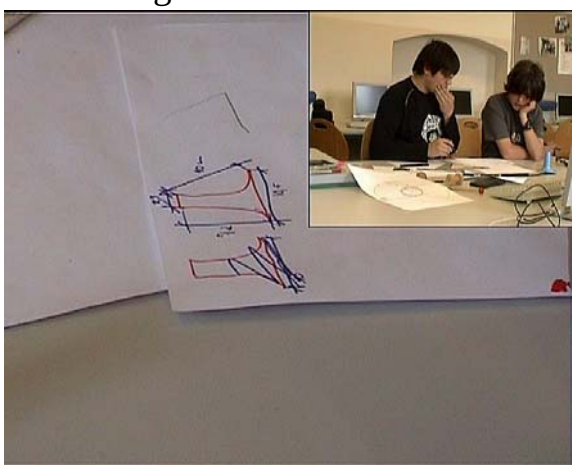


Abbildung 2

Der zweite Lösungsansatz war zu Beginn durch die Verwendung von Messwerkzeugen (Messband, Schiebelehre) geprägt. Die damit gefundenen Daten verwendete einer der Lernenden, ich nenne ihn hier A, um eine bemaßte Aufrissskizze des Drehkörpers zu konstruieren. Abbildung 2 zeigt diese Konstruktion. Im Verlaufe der Diskussionen um diese Zeichnung stellte der zweite Lernende, B genannt, ihr eine mit dünnen Bleistiftstrichen markierte Bleistiftzeichnung zur Seite. Diese ist in Abbildung 2 zu erkennen. Die gleichzeitige

Sichtbarkeit beider Zeichnungen, der bemaßten Skizze und der Bleistiftzeichnung, veranlassten A letztlich zur Verwendung des Strahlensatzes. Dieser wurde aus der Konstruktion abgelesen und in eine algebraische Darstellung gebracht. Die dann folgenden elementaren Umformungen bildeten den letzten Abschnitt des zweiten Lösungsweges.
Stellt man diese Tätigkeiten in aller Kürze der oben vorgestellten Sicht auf Schrift gegenüber, so könnte man – sofern das Datenmaterial ausführlicher vorgestellt ist (vgl. Kadunz, 2006) – vermuten, dass das Aufgeschriebene für die Lernenden eine wesentliche Quelle für neue Ideen zur Lösungsfindung war. Dabei scheint es so zu sein, dass durch das Aufschreiben etwas für den Sehsinn entstand, das den Aktivitäten der Lernenden Orientierung gab. Zugespitzt formuliert ging das Geschriebene in diesen Fällen dem Gedachten und damit dem Gesprochenen voraus.

Literatur:

Bachelard, G. (1994). *Der neue wissenschaftliche Geist*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Coulmas, F. (1985). Reden ist Silber, Schreiben ist Gold. *Zeitschrift für Literaturwissenschaft und Linguistik, 59*, 94-112.

Dörfler, W. (2004), Diagrams as Means and Objects in Mathematical Reasoning, in H-G. Weigand (Hrsg.), *Developments in Mathematics Education in German - Speaking Countries. Selected Papers form the Annual Conference on Didactics of Mathematics 2001*, Hildesheim: Franzbecker.

Harris, R. (2001). *Rethinking writing*. London, New York: Continuum.

Hoffmann, M. (2005), *Erkenntnisentwicklung*. Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann

Krämer, S. (2003). >Schriftbildlichkeit< oder: Über eine (fast) vergessene Dimension der Schrift. In S. Krämer & H. Bredekamp (Hrsg.), *Bild, Schrift, Zahl* (157-176). München: Wilhelm Fink.

Kadunz, G. (2003). *Visualisierung: Die Verwendung von Bildern beim Lernen von Mathematik*. München: Profil Verlag.

Kadunz, G. (2006). Schrift, Zahl und Zeichen. In E. Schneider (Hrsg.), *Tagungsband der Didaktiksektion der ÖMG/DMV Tagung 2005 in Klagenfurt* (im Druck). München: Profil.

Kuntze, S., & Prediger, S. (2005). Ich schreibe, also denk' ich. Über Mathematik schreiben. *Praxis der Mathematik in der Schule, 47*(5).

Maier, H. (2000). Schreiben im Mathematikunterricht. *mathematik lehren, 99* (April), 10-13.

Morgan, C. (1998). *Writing Mathematically: The Discourse of Investigation.* London: Falmer Press.

Niederdrenk-Felgner, Cornelia (2000), Algebra oder Abrakadabra? *mathematik lehren* 99 (4):4-9.

Rheinberger, H.-J. (2005). *Iterationen.* Berlin: Merve Verlag.

Willi DÖRFLER, Klagenfurt

Keine Angst – Mathematik ist nicht (nur) abstrakt

Jede Didaktik und Methodik des Mathematikunterrichts geht aus von einer bestimmten, wenn auch oft unreflektierten Sicht auf Mathematik, also von einer Philosophie der Mathematik und ihrer Gegenstände, sowie allgemeiner von einer Epistemologie mathematischer Tätigkeiten. Ein weit verbreitetes stereotypes Bild von Mathematik, das unterschwellig in Schul- und Lehrbüchern, in Texten und Diskursen wirkt, ist folgendes: Mathematik ist eine mentale Tätigkeit, deren Gegenstände abstrakte nicht-sinnliche Objekte (wie etwa Zahlen, Funktionen, Formen) sind. Man könnte diese „Folklore“ als einen naiven Verschnitt von Platonismus und Intuitionismus bezeichnen. Und didaktische Methoden haben das Ziel, den Lernenden den Zugang zu diesen abstrakten Objekten zu ermöglichen, was als deren Rekonstruktion als mentale Objekte angesehen wird. Meine These ist, dass diese Sicht (in vielerlei Varianten) entmutigend bis abschreckend auf die Lernenden wirkt, die sich mit unerreichbaren Zielen konfrontiert sehen und daher in mechanische Rechenverfahren flüchten. Letztere sind ja zumindest mit wahrnehmbaren Rechenzeichen durchzuführen, wenn man diese auch nicht versteht.

Indikatoren und gleichzeitig Konsequenzen aus einer solchen Sichtweise sind u.a. folgende Aspekte, die weithin im Mathematikunterricht feststellbar sind:

Darstellungen (Visualisierungen, Diagramme) haben den primären Zweck, die abstrakten Objekte einzuführen; sie sind also bloße Mittel, ein Durchgangsstadium zur Verinnerlichung in Form mentaler Konstrukte.

Darstellungen werden kaum selbst zum relevanten Lerngegenstand oder etwas, das in sich schon interessant ist, untersucht werden kann, wichtige Eigenschaften hat, etc.

Darstellungen illustrieren „nur“ die eigentlichen mathematischen Objekte. Daher: unterscheide genau zwischen number und numeral, zwischen Funktion und Graph, zwischen Figur und Zeichnung/Bild.

Anhand der Darstellungen sollen die Eigenschaften der abstrakten Objekte gelernt werden.

Darstellungen unterstützen bloß die wesentliche mentale Tätigkeit oder dienen dazu, diese und ihre Ergebnisse auszudrücken. Dazu gehört auch die Sicht, dass Ideen das Primäre sind (in the mind) und erst sekundär durch Darstellungen mitgeteilt werden: „die Idee der Zahl“ (oder „Funktion“) bestimmt ihre Visualisierungen und Diagramme. Aber Lernende müssen

zwangsweise den umgekehrten Weg gehen: von den Darstellungen zur Idee und zum abstrakten Objekt.

Wenige Schüler/innen können die Darstellungen und Diagramme produktiv verwenden und mit ihnen kreativ operieren, weil sie zu keiner intensiven Erfahrung und Beschäftigung damit angehalten sind (außer der Abarbeitung von Algorithmen). Darstellungen sind eben im Mathematikunterricht nur Darstellungen von etwas Anderem, das dann als viel wichtiger als sie selbst aufgefasst wird. Dieses „Andere“ bekommen aber die Lernenden nie zu Gesicht, daher empfinden sie Unverständnis, Versagen, Frustration, Ärger und Wut, und viel Angst (mathophobia)) vor diesem abstrakten Unfassbaren.

Die kognitionspsychologisch orientierte Didaktik untersucht die Konstruktion interner Darstellungen vermittels externer durch die Lernenden, sodass letzteren auch dort vorwiegend ein vermittelnder Charakter zugeschrieben wird.

Die von mir vorgeschlagene Alternative hat als eine Wurzel die Konzepte des Diagramms und des diagrammatischen Denkens/Schließens nach Peirce, siehe dazu Dörfler (2004, 2005). Vor diesem Hintergrund ist produktives Lernen von Mathematik die progressive Teilnahme an einer Praxis des Umgangs mit (mathematischen) Diagrammen aller Art, die dadurch ins Zentrum des Mathematikunterrichts rücken, zum wesentlichsten Thema und Gegenstand aller Lernaktivitäten werden. Die Diagramme (auch Formeln) sind dann nicht mehr bloß Darstellungen und methodisches Mittel, sondern ihre Konstruktion, Analyse, Verwendung, Veränderung und Interpretation machen sie zu autonomen Gegenständen und Mitteln des Denkens und damit auch zu den bestimmenden Gegenständen des Mathematikunterrichts. Das trifft sich eng mit vielen Vorschlägen, die in Arbeiten zur Stoffdidaktik vorgelegt wurden. Beispiele könnten sein: number sense als intime Vertrautheit mit den numerals und anderen Darstellungen (figurierte Zahlen, Zahlentafeln, magische Quadrate, Rechenvorteile, Teilerregeln, Umwandlungen, verschiedene Zählmethoden); Funktionsbegriff als Praxis des Umgangs mit den sog. Darstellungen (auch im Rahmen des Operativen Prinzips: Was geschieht, wenn?), besonders auch mit Hilfe von CAS (wir untersuchen nicht Eigenschaften von Funktionen per se, sondern wir erforschen Diagramme und ihre Beziehungen auf der Basis festgelegter Operationen und ihrer Regeln). Neben der Untersuchung fertiger (Standard)Diagramme ist auch der Entwurf von Diagrammen etwa im Rahmen von Mathematisierungen eine wichtige Erfahrung für Schüler/innen.

Die zentrale Stellung von Diagrammen im Sinne von Peirce belegt ein Blick in jedes Mathematik-Buch. Daher werden nur zwei einfache Beispiele angeführt, an denen die unten angeführten Aspekte deutlich werden.

1. Erkläre warum (z.B.) 1111x1111=1234321. Ein Diagramm dafür basiert auf dem üblichen Multiplikationsverfahren:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

2. $\sum_{i,j=1}^{4} \min(i,j) = 1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^4$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Diese Matrix wird schichtenweise „zerlegt“ in 4x4-Matrix, 3x3-Matrix, 2x2-Matrix und 1x1-Matrix aus jeweils nur der Zahl 1.

In beiden Fällen sind vielfältige weitere diagrammatische Experimente denkbar.

Folgende Aspekte treten bei einer diagrammatischen Sicht auf Mathematik und Mathematikunterricht in den Vordergrund:

Schreiben, Lesen, Beobachten, Experimentieren, Transformieren, Erfinden und Verwenden von/mit Diagrammen (als geschriebene und gezeichnete) sind die wichtigsten Tätigkeiten.

Entdeckungen (an Diagrammen) können gemacht werden und führen zu mathematischen Sätzen.

Arbeiten mit Diagrammen ist kommunizierbar, beobachtbar, erklärbar, imitierbar, ist (auch) empirisch-materiell und beruht oft auf Mustererkennung.

Diagramme, ihre Eigenschaften und Operationsregeln müssen genau gelernt und auch gemerkt werden (hohe Anforderung!).

Diagramme sind oft komplex und müssen nach ihrer Struktur, Form, ihrem Typ verwendet werden (ist schwierig, erfordert Erfahrung und Konzentration).

Im Mathematikunterricht muss ausführlich über die Diagramme gesprochen werden, eine Sprache zur Kommunikation der Erfahrungen mit den Diagrammen muss in der Klasse entwickelt werden.

Diagramme basieren auf materiellen Inskriptionen. Das Abstrakte ist dann eine Sicht auf diese, wenn z.B. Allgemeinheit oder Allgemeingültigkeit zugeschrieben werden (das konkrete Diagramm als „Fall von ...“). Damit wird Abstraktheit als eine Form der Interpretation von Diagrammen verstehbar und so entmystifiziert (sie ist nun a posteriori und nicht a priori).

Die Fokussierung auf die Diagramme (also die Zeichen, Symbole, Inskriptionen, Formeln, Grafen, etc.) ist keine Betonung des Mechanisch-Algorithmischen, sondern erfordert Kreativität, Fantasie, Ausdauer, Konzentration und Gedächtnis.

Lernen von Mathematik gewinnt so (auch) einen handwerklichen Charakter: Geschick und Erfahrung in der Handhabung von Diagrammen als Werkzeuge und Werkstücke (im Sinne von Aristoteles: mehr techné statt episteme).

Ganz allgemein beruht dieser Zugang auf einer Sicht von Mathematik nicht primär als Sprache sondern als ideografische Schrift, auch im Sinne von Rotman (1993), der von der untrennbaren Einheit „scribbling/thinking“ spricht: „Thinking in mathematics is always through, by means of, in relation to the manipulation of inscriptions“ (S. 7). Oder mit den Worten von Peirce: „By diagrammatic reasoning, I mean reasoning which constructs a diagram according to a precept expressed in general terms, performs experiments upon this diagram, notes their results, assures itself that similar experiments performed upon any diagram constructed according to the same precept would have the same results, and expresses this in general terms. This was a discovery of no little importance, showing, as it does, that all knowledge without exception comes from observation (Peirce NEM IV, 47 f.).”

Literatur

Dörfler, W. (2004): Mathematical Reasoning and Observing Transformations of Diagrams. – In: Mathematics and Language (Hg. Ch. Bergsten and B. Grevholm), Proc. MADIF 4, S. 7-19. – Linköping: SMDC.

Dörfler, W. (2005): Diagrammatic Thinking: Affordances and Constraints. – In: M. Hoffmann et al. (Hg.) Activity and Sign - Grounding Mathematics Education. S. 57 – 66. – Springer: New York.

Rotman, B. (1993): Ad infinitum. The Ghost in Turing’s Machine. Stanford Press.

Peirce, CH.S. (1976): The New Elements of Mathematics (NEM), vol. IV (Hg. C. Eisele), Mouton, Den Haag.

Martin HENSEL, Siegburg

Am Anfang war die Triade von Peirce...

Um den Vortrag besser einordnen zu können, sollen einige Bemerkungen zum Kontext vorangeschickt werden. Aus der Erfahrung in der Erwachsenenbildung erwuchs die Einsicht, dass Erklärungsversuche mit sprachlichen Mitteln bei mathematischen Themen oft nicht sehr erfolgreich sind. Woran liegt das?

Erwachsene, die sich nie intensiv für Mathematik interessiert haben, leben auf einer Sprachinsel, die sie mit ihrem ,,gesunden Menschenverstand" verteidigen. Dieses Verhalten kann mit Hilfe der Linguistik erklärt werden. Es kann aber auch erklärt werden, dass durch dieses Verhalten häufig Lernfortschritte verhindert werden, denn der ,,gesunde Menschenverstand" ist kein objektiver Konsens, sondern eine hochgradig subjektive Meinungsinstanz, die bei vielen Erwachsenen in den Fortbildungskursen recht unreflektiert benutzt wird.

Nun gilt aber für den Lehrer i. Allg. die Regel, dass er ,,den Schüler dort abholen soll, wo er steht". Er muss sich also auf die Sprachinseln der Kursteilnehmer begeben. Das kann sehr abenteuerlich sein, da nach der oben gemachten Bemerkung die Topographie dieser Inseln recht zerklüftet sein kann. Auch wenn nur eine Insel vorhanden wäre, bedeutet das noch nicht, dass dadurch das Problem gelöst sei. Denn die sprachliche Darstellung eines Sachverhalts muss mit einem verhältnismäßig großen emotionalen Aufwand betrieben werden. In anderer Form hat dies der Sprachphilosoph Cassirer folgendermaßen ausgedrückt:

> *Das Bewußtseinselement verhält sich zum Bewußtseinsganzen nicht wie ein extensiver Teil zum Ganzen, sondern wie ein Differential zu seinem Integral.* [ECW 11, 38]

Durch dieses Zitat wird der lokale Charakter der sprachlichen Möglichkeiten deutlich. Demgegenüber sind die mathematischen Themen oft durch globale Zusammenhänge gegeben und gehen dann über die Darstellungsmöglichkeiten der Linguistik hinaus. Wie kann man nun mit ,,lokalen" Mitteln von der Sprachinsel zum ,,globalen" Denken des mathematischen und naturwissenschaftlichen Kontinents gelangen?

Leider ist es so, dass viele Lehrer und Didaktiker nie den ,,Sprung über

die Meerenge" wagen. Sie fürchten wie Ikarus ins Meer zu stürzen. Sie reduzieren die Mathematik lieber auf die Möglichkeiten der Sprachinsel. Will man sich damit nicht zufrieden geben, so muss man eine Expedition von der Insel zum Kontinent wagen? Es bietet sich zunächst eine philosophische Exkursion mit Hilfe der Semiotik an. C. S. Peirce hat durch die Entwicklung seines Triadenkonzepts auf Zeichenniveau eine Möglichkeit vorgestellt, mit der im Folgenden eine ,,Überfahrt" versucht werden soll. Da die Triaden lokal dynamisch beschrieben werden, ist der ,,Start von der Insel" möglich (vgl. [JZ] 14: *,,Da er [Peirce] annimmt, dass unser Erkenntnisprozess den Evolutionsprozess abbildet, hält er Relationen [Triaden] für ontologisch grundlegender als Individuen und wählt sie deshalb als Ausgangspunkt."*).

Die Philosophie dieses Vortrags ist nun die, dass die Triade mit Hilfe des Konzeptes sehr kleiner Drehungen zu einem mathematisch und physikalisch interpretierbaren Operator spezialisiert wird. Durch ständige Iteration dieses Triaden-Operators entsteht eine Fülle von ,,Eindrücken". Diese verdichten sich und bilden ein Muster. Zur besseren Imagination stelle man sich einen Vogel beim Nestbau vor. Dadurch hat man den oben beschworenen Evolutionsprozess sehr wörtlich auf ein Lebewesen übertragen. Ebenso kann man ein Kleinkind beobachten, dass ein ,,Urknäuel" mit dem Zeichenstift malt, eine Schar Wespen, die eine filigrane Kugel aus Zellstoff zusammenkleben oder einen Menschen wie er sich eine gemütliche ,,Wohnhöhle" einrichte. Zum Schluss frage ich nach den globalen Strukturen, die durch die Operationen möglich sind.

Wir überspringen jetzt die Probleme und Gefahren der ,,Überfahrt". Wir sind an der Küste des Kontinents gelandet. Unsere $Triade(Objekt, Zeichen, Interpretant)$ ist folgendermaßen ausgestattet: Als $Objekt$ betrachten wir einen beliebigen Ortsvektor $\vec{r}$, als $Zeichen$ benutzen wir den symbolischen Vektor $d\vec{\Omega}$ und der $Interpretant$ ist der Vektor

$$\vec{R} = \vec{r} + d\vec{\Omega} \times \vec{r} \qquad ,$$

der mit Hilfe des Kreuzproduktes konstruiert wird (vgl. [HG] 137ff). In Koordinatendarstellung ergibt sich folgender Matrix-Operator:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 1 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nach der Landung an den Gestaden des neuen Kontinents darf man nach der Gesamtheit aller Drehungen fragen, die durch den Matrix-Operator erzeugt werden können. Als Antwort bekommen wir: Es ist die kontinuierliche Drehgruppe $SO(3)$. Sie ist in einem 9-dimensionalen ,,Strukturberg" eingelagert. Wenn man die Gruppenstruktur unterdrückt, kann man die Elemente der $SO(3)$ in einen 3-dimensionalen Projektiven Raum $\mathbf{P}(\mathbf{3}, \mathbb{R})$ über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ einlagern. Doch direkt sichtbar wird dieser Raum nicht, da die Konstruktion mindestens eine Sphäre im 4-dimensionalen Raum erfordert. Diese Hypersphäre wird mit $\mathbf{S^3}$ bezeichnet. Anschaulich wird dieses Gebilde nur durch spezielle Projektionen. Zum Beispiel kann $\mathbf{S^3}$ in eine dichte Packung aus 120 Dodekaedern zerlegt werden und wie eine Traube aus 120 Seifenblasen (vgl. [JMS]) zusammenhängend projiziert werden.

Mit diesem Ergebnis kommt für uns die Ernüchterung. Wir können also die 4-te Dimension nur dynamisch simulieren, z.B. als Film. Eine andere Möglichkeit finden wir z. B. auch beim manuellen Schreiben oder durch körperliche Bewegungen. Besonders das Radfahren ist ein direktes Abbild des Matrix-Operators: Die Drehachse des Vorderrades wird z.B. durch seitliches Kippen nach links zur Erde gedrückt. Durch die Rotation des Rades wird die Achse nach hinten abgelenkt und die Fahrtrichtungsänderung führt zu einer Linkskurve.

Eine weitere Möglichkeit ergibt sich durch das Studium analoger endlicher Modelle. Mathematisch gibt es viele endliche Modelle des 3-dimensionalen projektiven Raumes. Der Kleinste ist $\mathbf{P}(\mathbf{3}, \mathbb{F}_\mathbf{2})$. Doch hier holt uns ein altes Dilemma ein: Niemand weiß, welche der vielen Möglichkeiten wirklich wichtig ist.

[ECW] ErnstCassirer. Gesammelte Werke. Hamburger Ausgabe. Hg. v. B. Recki, Hamburg 1998

[JZ] Julia Zink. Kontinuum und Konstitution der Wirklichkeit. Dissertation. München 2004.

[HG] Herbert Goldstein. Klassische Mechanik. Frankfurt am Main 1963.

[JMS] John M. Sullivan. http://torus.math.uiuc.edu/jms/Images/b119.jpeg

Barbara SCHMIDT-THIEME (Ludwigsburg)

Unmathematisches Argumentieren im Mathematikunterricht

Die KMK formulierte in ihren Empfehlungen neben den inhaltlichen Kompetenzen eine Reihe von „allgemeinen mathematischen Kompetenzen“, darunter den Kompetenzbereich „Argumentieren und Beweisen“. In der internationalen Mathematikdidaktik existiert eine Vielzahl von Untersuchungen zum Beweisen im Mathematikunterricht, in welchem Zusammenhang vielfach das Stichwort „Argumentieren“ fällt: es scheint sich dabei um eine spezielle Form, ein „mathematisches“ Argumentieren zu handeln. Diese Sicht auf Art und Funktion des Argumentierens unterscheidet sich jedoch grundlegend von denen in anderen wissenschaftlichen Disziplinen, was folgende Äußerung eines Argumentationstheoretikers widerspiegelt: „Dann sieht die Mathematikdidaktik Argumentieren also als eine Art defizitären Beweisens?“ Im Folgenden werden nach einem kurzen Überblick über Aspekte des Argumentierens aus mathematikdidaktischer Sicht Blicklichter darauf aus der Sicht anderer Disziplinen geworfen und abschließend von dieser erweiterten Basis aus zurück auf den Mathematikunterricht geblickt.

1. Argumentieren als Vorform des Beweisens

Argumentieren wird in mathematikdidaktischen Arbeiten meist in engem Zusammenhang mit Begründen und Beweisen gesehen. Da Beweis und Beweisen sicherlich zentral für die Mathematik sind, ist es unbestreitbar, dass Schülerinnen und Schüler an Beweise und die Kunst des Beweisens im Mathematikunterricht herangeführt werden müssen. Hierbei fällt dem Argumentieren klar die didaktische Funktion der Vorstufe für einen abstrakteren, formaleren Beweis zu. Diese Sicht des Argumentierens ist also formal-logizistischer Art, da es um die Feststellung einer Wahrheit durch formal-logische Schlüsse geht (s. dazu etwa Hefendehl-Hebecker 2003, 94/5: „Infragestellen, Überprüfen und Begründen vollziehen sich auf dem Wege der Argumentation.“).

Neben der Sicherung des Wahrheitsanspruchs vermitteln Beweise und Argumentationen auch Einsicht in Sachverhalte. Die Frage „*Warum* ist diese Aussage wahr?“ fordert Systematisieren und Vernetzen. Vor/Übungen für schriftlich-formale Beweise unter Einbezug von Handlungen oder der Anschauung unterstreichen diesen lerntheoretischen Aspekt des Argumentierens.

Eine Funktion möchte man mathematischem Argumentieren und Beweisen auch über den Mathematikunterricht hinaus zusprechen in der Annahme, dass die hierbei geübte Rationalität auch auf alltägliches Handeln Einfluss

hat. Untersuchungen aus der Argumentationstheorie (Lueken 2005) und Feststellungen aus der Deutschdidaktik (Quasthoff 2003) können dies nicht unbedingt stützen.

Der Prozess des Argumentierens bildet den Untersuchungsgegenstand in Arbeiten mit Ansätzen aus der Interaktionstheorie. Krummheuer (1991) versteht unter Argumentation generell jede Kommunikation im Unterricht, in der die Beteiligten kooperatives Handeln zu ermöglichen versuchen. Es sind Aushandlungsprozesse mit dem Ziel der Erstellung eines Arbeitskonsens und liefern damit Erklärungsmöglichkeit für das Zustandekommen von Lernen im Schulunterricht. Das Zustandekommen einer Argumentation, soziale Regelmäßigkeiten des Argumentationsprozesses sowie Ziele und Funktionen von Argumentationen im Mathematikunterricht untersucht Schwarzkopf (2000). Unter einer Argumentation wird ein Kommunikationsprozess verstanden, in dem die Beteiligten einen Begründungsbedarf explizit anzeigen und zu befriedigen versuchen. Schwarzkopf stellt u. a. fest: „In der Mathematik sind nur Argumente von Interesse, durch die eine Konklusion zweifelsfrei belegt wird. In einem Unterrichtsfach, das weniger mathematikspezifisch ausgerichtet ist, hätte die Argumentation anders verlaufen können. Dort würde man möglicherweise auf unmathematische Modalitäten reagieren, indem man verschiedene Argumente und deren Ausnahmebedingungen gegeneinander abwägt“ (443).

2. Argumentieren zur Entwicklung von Orientierungen

Grundsätzlich gesehen ist Argumentation als Fähigkeit, als Kunst verankert in die Tradition der septem artes liberales. Sie findet sich als Logik/Dialektik im Trivium neben der Grammatik und der Rhetorik und diente in der logizistischen Tradition der Suche nach Wahrheit oder Norm. Damit ergeben sich Abgrenzungsschwierigkeiten zum Erklären oder Beweisen. Erweitert man den Fokus jedoch auf argumentierende Rede in der alltäglichen Praxis, so wird eine Betrachtung nicht nur ihrer logischen, sondern auch ihrer semantischen und pragmatischen Formeigenschaften nötig (Lueken 2000). Aus drei Disziplinen seien daher ausgewählte Überlegungen als Denkanstöße zu einer Neuinterpretation von Formen und Funktionen des Argumentierens im Mathematikunterricht vorgestellt.

2.1 Argumentieren in der Philosophie und Rhetorik

Aufgrund der fundamentalen Relativierung von Gewissheit im 20.Jh. (Relativitätstheorie, Unentscheidbarkeit der Logik) sieht Wohlrapp 2005 das Ringen um einen Konsens in strittigen Fragen als letztes verbliebenes Mittel rationalen Handelns. An die Stelle der Wahrheit tritt somit das Konzept der *argumentativen Gültigkeit*.

Lueken 2000 unterscheidet drei Paradigmen der Argumentation: a) die logische Folgerung; b) die forensische Entscheidung z.B. in der Rechtsspre-

chung, in welcher anstelle logisch-formaler Schlussweisen geregelte Entscheidungsverfahren Argumentationen zugrunde liegen; c) den offenen Dialog, in dem die *Regeln selbst zur Disposition* stehen können. Letzteres entspricht realen Argumentationsprozessen in der Lebenspraxis.

Kopperschmidt 1989 beschreibt Argumentation als *rationale* Form der *Verständigung*, d.h. der Übereinkunft zweier Personen. Für eine Argumentationsanalyse bedarf es der Untersuchungen der Voraussetzungen, Verfahren und Struktur einer Argumentation. Als Vorauusetzung betont er die Notwendigkeit einer Existenz einer *res controversia/strittigen Angelegenheit*; dabei geht es in der Regel nicht um eine Aussage an sich, sondern um die für sie gemachten Geltungsansprüche.

2.2 Argumentation in der Linguistik

Die Linguistik beschäftigt sich mit Argumentationen im Rahmen der (pragmatischen) Textlinguistik. Sie unterscheidet grob zwischen drei *Textformen/Vertextungsmustern*: Narration, Deskription (Eigenschaften von Objekten) und Argumentation (Gültigkeit von Propositionen). Ihre Aufgabe ist die Beschreibung der Funktion und Struktur dieser Muster, wobei in neuerer Zeit der Fokus vermehrt vom Produkt auf den eigentlichen Prozess des Argumentierens verschoben wird, d.h. die Bestimmung der *nicht/sprachlichen Mittel von Handelnden* in Auseinandersetzungssituationen (Vogt 2005).

2.3 Argumentation in der Deutschdidaktik

Unterrichtseinheiten zur Argumentation finden sich in allen Schulbüchern, doch handelt es sich um Einführungen in das deduktiv rationale Argumentieren. Erfahrungen zeigen jedoch, dass die dort gelernten Muster selten auf reale Situationen übertragen werden. Das liegt zum einen an dem generellen Problem der Sprachdidaktik, inwieweit arrangierte Situationen tatsächlich eine Verbesserung der alltäglichen Praxis bewirken können (Quasthoff 2003), zum anderen, dass die erweiterte Sicht von Argumentation als interaktive, alltagsweltliche Handlung die Entwicklung eines *Kompetenzrahmens Argumentation* im Deutschunterricht erfordert (Spiegel 2005).

3 Offenes Argumentieren im Mathematikunterricht

Der mathematische Unterrichtsalltag zeigt Möglichkeiten wie Notwendigkeiten, die mathemati(kdidakti)sch eingeengte Sicht auf Argumentieren im Sinne der eben beschriebenen Weisen zu erweitern: neben dem mathematischen Argumentieren als Vorform des Beweisens existiert und sollte gefördert werden ein unmathematisches/offenes Argumentieren zur Entwicklung von Orientierungen, d. h. ein Argumentieren als verständigungsorientiertes Handeln.

Unmathematisches/offenes Argumentieren zur Entwicklung von Orientierungen setzt eine strittige Angelegenheit in der Mathematik als Thema voraus. Diese muss nicht unbedingt „außermathematischer“ Art sein wie die Modellierungsargumentation bei Büchter/Leuders 2005 (Modellauswahl, Interpretation von Ergebnissen). Diskutiert werden kann über Rechenstrategien, über gelungene Erklärprozesse oder die Gültigkeit von Beweisen, über Vor- und Nachteile verschiedener Repräsentationen oder Symbolsysteme für unterschiedliche mathematische Handlungen.

Unmathematisches/offenes Argumentieren als verständigungsorientiertes Handeln steht für einen dialogischen Forschungsprozess. Dieser kann z. B. iniziiert werden in Gruppenarbeit oder Strategie-, Rechenkonferenzen. Somit hat diese Form des Argumentierens sicherlich einen Nutzen über den Mathematikunterricht hinaus als authentisches Beispiels für im Deutschunterricht erarbeitete Muster. Voraussetzung allerdings ist die Schaffung einer weiteren, offenen Argumentationskultur im Mathematikunterricht.

Literatur

Büchter, Andreas, Timo Leuders: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern, Leistung überprüfen. Cornelson Scriptor 2005.

Hefendehl-Hebeker, Lisa, Stephan Hußmann: Beweisen – Argumentieren. In: T. Leuders, (Hrsg.): Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufen I und II, Cornelsen 2003, 93-106.

Kopperschmidt, Josef: Methodik der Argumentationsanalyse. Frommann-Holzboog: Stuttgart 1989.

Krummheuer, Götz: Lernen mit Format. Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie. Diskutiert an Beispielen mathematischen Unterrichts. Dt. Studien-Verlag: Weinheim 1991.

Lueken, Geert-Lueke: Paradigmen einer Philosophie des Argumentierens. In: G.-L. Lueken (Hrsg.): Formen der Argumentation. Leipziger Universitätsverlag 2000, 13-51.

Lueken, Geert-Lueke: Fördert formale Logik argumentative Kompetenz? Über Sinn und Unsinn von Logik-Kursen. Vortrag auf Symposion „Argumentieren in Schule und Hochschule“ 2005.

Quasthoff, Uta: Entwicklung mündlicher Fähigkeiten. In: U. Bredel u. a. (Hrsg.): Didaktik der deutschen Sprache. Band 1. Schöningh 2003, 107-120.

Schwarzkopf, Ralph: Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien. Franzbecker 2000.

Spiegel, Carmen: Streit. Eine linguistische Untersuchung verbaler Interaktionen in alltäglichen Zusammenhängen. Narr 1995.

Vogt, Rüdiger: Argumentieren multimodal oder zweidimensional. Linguistische Perspektiven. Vortrag auf Symposion „Argumentieren in Schule und Hochschule“ 2005.

Wohlrapp, Harald: Was ist und zu welchem Ende sollte Argumentationsforschung betrieben werden? Vortrag auf Symposion „Argumentieren in Schule und Hochschule“ 2005.

Rose VOGEL, Ludwigsburg

Mathematische Sprachentwicklung – eine erste Annäherung

Das Nachdenken über mathematische Sprachentwicklung setzt voraus, dass sich mathematische Sprache als eigene Sprachwelt identifizieren lässt. Dies geschieht meist in der Form, dass mathematische Sprache als Fachsprache beschrieben wird. Fachsprache in dem Sinne, dass sie eine Varietät des Deutschen ist (vgl. Gärtner 2000, S. 209). Fachsprachen entwickeln sich im Prozess der „konkreten wie geistigen Erschließung der Welt im Rahmen eines Fachgebietes“ (Fluck 1992, S. 1). Sie bilden die Grundlage dafür, sich in der jeweiligen Fachdisziplin adäquat auszudrücken, Sachverhalte zu beschreiben, mit Personen dieser Fachdisziplin sich über einen ausgewählten Sachverhalt angemessen auszutauschen und die Sache voranzutreiben und weiterzuentwickeln. Fachsprachen sind gekennzeichnet durch ihre jeweilige Spezifität in den Bereichen der Phonetik, der Morphologie, der Syntax und der Textsorten (vgl. Gärtner 2000, S. 209).

Fachsprachen begegnen den Schülerinnen und Schülern in schulischen Kontexten jeden Tag. Deshalb ist es wichtig, darüber nachzudenken, in welcher Art und Weise diese Begegnung sinnvoll gestaltet sein kann. Das Hineinfinden in die Sprachwelt einer Fachdisziplin vollzieht sich im Kontext der Auseinandersetzung mit dieser Denkwelt. Anknüpfungspunkte bietet die Sprachwelt der Lernenden, die sich in der Beschäftigung mit der Sache in Richtung Fachsprache verändert (vgl. Ruf & Gallin 1998). Hinzukommt, dass im Unterricht die Begegnung mit der Fachdisziplin meist indirekten Charakter aufweist. Die Lehrperson vermittelt zwischen Welt und Lernenden. Sie wählt aus, sie bereitet auf, sie gestaltet die Weltbegegnung. Auch bezogen auf die jeweilige Sprachwelt zeigt sich dies. Die Unterrichtssprache in den Fächern kann m. E. nicht als Fachsprache der jeweiligen Disziplin bezeichnet werden. Hier kommt vielmehr die Sprachbegegnung zwischen singulärer und regulärer Welt (vgl. Ruf & Gallin 1998) zum Ausdruck. Der Mathematikunterricht ist der Ort der Begegnung mit Mathematik und damit der Ort der mathematischen Sprachentwicklung.

Welche Aspekte sind für die mathematische Sprachentwicklung im Hinblick auf die Gestaltung von mathematischen Lehr- und Lernprozessen von Bedeutung? Neben den Fachbegriffen, den mathematischen Symbolen und der Syntax der mathematischen Fachsprache ist sicherlich der Bedeutungsgehalt mathematischer Texte und deren Funktion sowohl im Kontext der Fachdisziplin wie auch des Mathematikunterrichts (vgl. Maier & Schweiger 1999) in den Blick zu nehmen.

Ausgehend von der Funktion mathematischer Sprache im Mathematikunterricht werden in aller Kürze Gesichtspunkte, die beim Lernen von Sprache von Bedeutung sind angesprochen. Sie geben eventuell Aufschluss darüber, in welcher Weise das Erlernen mathematischer Sprache unterstützt werden kann. Anlass für die am Ende der Ausführungen nur kurz erwähnte empirischen Studie ist die Frage: welche sprachlichen Kompetenzen in der gebrauchten Alltagssprache (Erstsprache) der Kinder begünstigen die mathematische Sprachentwicklung?

Funktion der Sprache im Mathematikunterricht

Sprache hat im Unterricht eine kommunikative und eine kognitive Funktion (vgl. Maier & Schweiger 1999, S. 17). So dient Sprache im Unterricht der Verständigung zwischen Lehrperson und Lernenden und unterstützt die Begegnung zwischen Lerngegenstand (Thema) und Lernenden. Die Darstellung der Aufgabenstellung, des Bearbeitungsprozesses und des Ergebnisses orientieren sich entweder an der Umgangssprache oder an der Fachsprache und weisen dadurch einen jeweils unterschiedlichen Grad der Strukturierung und der Abstraktion auf. Sprache dient hier als Beschreibungsmittel.

Eine Besonderheit der mathematischen Sprache ist der hohe Symbolgehalt. Diese Art der Symbolsprache resultiert aus dem Bestreben, „Sachverhalte und Ideen mit einem möglichst geringen Aufwand an sprachlichen Mitteln darzustellen.“ (Maier & Schweiger 1999, S. 64) Damit verbunden ist eine hohe Informationsdichte, die vom Produzenten erzeugt und vom Rezipienten entschlüsselt werden muss.

In ihrer kognitiven Funktion unterstützt Sprache den Erkenntnisgewinn (vgl. Maier & Schweiger 1999, S. 17) und damit mathematische Denkprozesse. So ermöglicht Sprache, mentale Modelle sichtbar zu machen. Der Mensch erhält dadurch die Möglichkeit, sich seiner inneren Bilder zu vergewissern, sie „zu betrachten“ und damit diese weiterzuentwickeln, zu spezifizieren, zu bestätigen oder zu verwerfen (Goldin & Shteingold 2001). Die Mathematik stellt hierfür eine Vielzahl von Zeichen- und Sprachformen zur Verfügung. Neben Texten, können Terme, Graphen, Tabellen und nicht standardisierte zeichnerische Formen den Prozess des mathematischen Denkens unterstützen. Mathematische Sprache könnte man in diesem Fall als Sprache der Repräsentationen bezeichnen.

Lernen von Sprache

Bruner (2002, 13 ff.) beschreibt im Kontext des Spracherwerbs drei Aspekte von Sprache: der sprachliche Ausdruck gehorcht bestimmten Regeln (Syntax), Sprache als Mittel etwas auszudrücken, auf etwas zu verweisen, etwas zu meinen (Semantik) und nach Bruner die „kommunikative Absicht

der Sprache“ (Pragmatik), d.h. der Sprechende kann mit der Aussage Wirkung erzielen. Diese Aspekte lassen sich m. E. auch auf das Erlernen einer Fachsprache übertragen. Weiterhin arbeitet Bruner die Bedeutung des szenischen Erlebens von Welt und darin enthalten die Perspektivübernahme für die Sprachentwicklung heraus. Dieser Aspekt wird in nordamerikanischen Studien zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten und deren Voraussetzungen aufgegriffen (O’Neill, Pearce & Pick 2004).

Empirische Studie

Die Ausführungen deuten darauf hin, dass mathematische Sprachentwicklung sehr stark verschränkt ist mit der Sprachentwicklung in der Erstsprache. Sie ist Bestandteil der Sprachentwicklung und gleichzeitig hebt sie sich davon ab, da die Kontextuierung eine andere ist. Es ist die Sprache, die im Mathematikunterricht gesprochen wird.

In einer Pilotstudie (gefördert durch die Pädagogische Hochschule Ludwigsburg), die Teil eines Forschungsprojekts der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburgs zum Zweitspracherwerb von Kindern mit Migrationshintergrund (durchgeführt von Dr. Stefan Jeuk, Fach Deutsch) ist, sollen erste Antworten auf die Frage: welche sprachlichen Kompetenzen in der gebrauchten Alltagssprache (Erstsprache) der Kinder begünstigen die mathematische Sprachentwicklung? gefunden werden. Interessant ist in diesem Zusammenhang die enge Anbindung an eine Untersuchung, die sich mit Sprachstandserhebung bei Kindern mit nichtdeutscher Herkunftssprache (Jeuk 2006) beschäftigt. Zum einen werden Einblicke in die Sprachentwicklungsforschung aus deutschdidaktischer Sicht möglich und zum anderen werden Kinder mit Migrationshintergrund in den Blick genommen.

Literatur

Fluck, H.-R. (1992). Didaktik der Fachsprachen. Tübingen: Narr.

Gärtner (Schmidt-Thieme), B. (2000). Sprich dazu! Formen der Sprechtätigkeit im Mathematikunterricht. In M. Neubrand (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 209-212). Hildesheim: Franzbecker.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999). Mathematik und Sprache. Wien: öbv & hpt.

Ruf, U. & Gallin, P. (1998). Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Bd. 2. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A.A. Cuoco & F.R. Curcio (Eds.), The Roles of Representation in School Mathematics. Reston, VA: NCTM (Yearbook 2001).

Bruner, J. (2002). Wie das Kind sprechen lernt? 2., erg. Aufl. Bern, Göttingen: Huber.

O’Neill, D.K., Pearce, M.J. & Pick, J.L. (2004). Preschool childrens’s narratives and performance on the Peabody Individualized Achievement Test – Revised: Evidence of a relation between early narrative and later mathematical ability. In: First Language 24 (2), p. 149-183.

Hans-Georg WEIGAND, Würzburg, Regina BRUDER, Maria INGELMANN, Darmstadt

Moderierte Sektion: Taschencomputer im Mathematikunterricht

Die Diskussion um die Bedeutung von Taschencomputer für den Mathematikunterricht lässt sich in verschiedene Phasen unterteilen. Die *erste Phase* beginnt 1988 mit der Einführung des auf „Personal Computern“ lauffähigen CAS „Derive“. Sofort wird die Frage „Mathematik im Umbruch?“ (HISCHER 1992) gestellt, da Schülerinnen und Schüler von ständig wiederkehrenden kalkülhaften Berechnungen entlastet werden und sich dadurch intensiver mit den – mathematisch anspruchsvolleren – Tätigkeiten des Modellierens und Interpretierens von Problemstellungen beschäftigen können. Wissen und Fertigkeiten können dadurch vom Kopf in die Technik „ausgelagert“ werden, indem Formeln und Algorithmen auf Knopfdruck zur Verfügung stehen. Es werden zahlreiche Unterrichtsvorschläge unterbreitet, aber nur wenige wissenschaftlich fundierte empirische Studien durchgeführt.

Die *zweite Phase* beginnt im Dezember 1995 mit der Einführung des ersten Taschencomputers (TC) mit einem CAS, dem TI-92. Von der Möglichkeit, dass Schülerinnen und Schüler den Computer nun an ihrem Arbeitsplatz im Klassenzimmer jederzeit verfügbar haben und somit ein „Wandertag“ zum Computerraum entfällt, werden tiefgreifende inhaltliche und methodische Veränderungen des Unterrichts erwartet. Wiederum gibt es zahlreiche Unterrichtsvorschläge, aber jetzt auch verstärkt wissenschaftlich begleitete Unterrichtsversuche (etwa SCHNEIDER 2000).

Die *dritte Phase* zu Beginn des neuen Jahrtausends geht mit der Erkenntnis einher, dass sich TC im Mathematikunterricht in Deutschland nicht oder wenig und weltweit – im Gegensatz zu Graphik-Taschenrechnern, die mittlerweile in den meisten Ländern obligatorische Hilfsmittel geworden sind – nur partiell durchgesetzt haben. Die Gründe sind vielfältig (vgl. hierzu TROUCHE 2005). U. a. lassen sich hier anführen: Umständliche Handhabung der Geräte, mangelnde Vertrautheit der Lehrerinnen und Lehrer mit den Geräten, keine Integration von TC in vorhandene Lehrpläne. Insgesamt wurde aber sicherlich die Komplexität der Integration Neuer Technologien und vor allem von Computeralgebrasystemen in den „normalen“ Unterricht unterschätzt, welche durch die wechselseitige Beziehung von Veränderungen auf verschiedenen Ebenen entsteht: der technischen, inhaltlichen und methodisch-didaktischen Ebene.

Gegenwärtig schreitet die Integration der Taschencomputer (TC) in den „normalen“ Mathematikunterricht fort. In allen Bundesländern in Deutschland werden mittlerweile zumindest Pilotprojekte zum Einsatz von TC durchgeführt. Insbesondere zum Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) im Mathematikunterricht gibt es eine breite didaktische Diskussion, zahlreiche Unterrichtsvorschläge und empirische Untersuchungen, es gibt aber – auch international – kaum Ergebnisse von langfristigen Studien.

In dieser Sektion werden drei Projekte vorgestellt und diskutiert werden. Hans-Georg Weigand (Universität Würzburg) berichtet über einen einjährigen Unterrichtsversuch zum CAS-Einsatz in der 10. Jahrgangsstufe an drei bayerischen Gymnasien, der jeweils in den Schuljahren 2003/04 und 2004/05 durchgeführt wurde und gegenwärtig als vierjähriger Unterrichtsversuch in den Klassen 10 bis 13 fortgesetzt wird. Welche Veränderungen hinsichtlich zentraler mathematischer Fähigkeiten lassen sich feststellen? Wie verändern sich Prüfungsaufgaben? Wie schätzen Schülerinnen und Schüler den CAS-Einsatz ein? Wie ändert sich die Unterrichtsmethodik?

Im zweiten Vortrag berichtet Regina Bruder (TU Darmstadt) über ein Projekt zum sinnvollen Einsatz von CAS in vier Schulen in Hessen, das im Schuljahr 2004/2005 durchgeführt von der TU Darmstadt betreut wurde. Es werden Evaluationsinstrumente und erzielte Ergebnisse vorgestellt und neben Schülerbefragungen auch die von den Lehrkräften erstellten Portfolios und entwickelte Beurteilungskriterien analysiert.

Im gleichen Schuljahr startete der fünfjährige Modellversuch CALiMERO mit 29 Klassen in Niedersachsen zur langfristigen Erprobung des Einsatzes von CAS-fähigen Taschencomputern ab Klasse 7 mit einem ganzheitlichen Unterrichtskonzept. Maria Ingelmann (TU Darmstadt) stellt das Evaluationskonzept für dieses Projekt mit den verschiedenen Instrumenten vor und berichtet über erste Ergebnisse aus den Eingangserhebungen.

Literatur:

HISCHER, H. (Hrsg.), Mathematik im Umbruch? Erörterungen zur möglichen ‘Trivialisierung’ von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software, Franzbecker, Hildesheim 1992

SCHNEIDER, E., Teacher Experiences with the Use of a CAS in a Mathematics Classroom, *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* (2000) v. 7(2) 119-141

HERGET, W. HEUGL, H., KUTZLER, B., LEHMANN, E., Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? *Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht* MNU 54 (2001), 458-464

TROUCHE, L., Instrumental Genesis, individual and Social Aspects, in: Guin, D., Ruth ven, K., Trouche, L. (Eds.), The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, Sprinter, New York 2005b, 197-230

Regina BRUDER, Darmstadt

Taschencomputer in Klasse 11- Portfolioevaluation eines Modellprojektes in Hessen

Im 2. Halbjahr des Schuljahres 2004/2005 fand in Hessen ein Modellprojekt zum sinnvollen Einsatz von Computer-Algebra-Systemen (CAS) mit dem Schwerpunkt in der gymnasialen Oberstufe statt. Das Projekt wurde von Texas Instruments unterstützt, die Evaluation wurde von der TU Darmstadt übernommen.

Zum Hintergrund, den Zielen und zur Durchführung des Projekts

In Hessen findet trotz entsprechenden Lehrplanforderungen computergestütztes Lehren und Lernen von Mathematik bislang kaum statt. 2004 wurden 260 Mathematiklehrkräfte aller Schulformen im Projekt SINUS-Transfer in Hessen u.a. auch zu ihrem Rechnereinsatz im Unterricht befragt. 80% gaben an, noch nie im Mathematikunterricht mit Dynamischer Geometriesoftware (DGS) oder CAS gearbeitet zu haben. Vor diesem Hintergrund sollte computergestütztem Mathematikunterricht zu mehr Akzeptanz in der Lehrerschaft in der Breite zu verholfen werden. Ziel des Projektes war es, übertragbare Erfahrungen und Unterrichtsmaterialien zum sinnvollen Einsatz von CAS in der Oberstufe in Hessen zu gewinnen.

Für dieses Projekt konnten sich Schulen mit bislang wenig Rechnereinsatz bewerben mit einem Konzept, wie ein Rechnereinsatz an ihrer Schule nachhaltig erfolgen kann. Ausgewählt wurden 4 Schulen mit je zwei Klassen: Eine berufliche Schule und drei Gymnasien. Es beteiligten sich fünf 11.Klassen, zwei 10.Klassen und eine Klasse 13.

Zur Unterstützung ihrer Arbeit in den 5 Monaten Projektlaufzeit erhielten die Lehrkräfte technische Fortbildung zum Rechnerhandling. Jede Klasse wurde mit CAS-fähigen Taschencomputern ausgestattet und es wurden die bereits verfügbaren publizierten Unterrichtsmaterialien zum Rechnereinsatz auf Abfrage und nach Wunsch der Lehrkräfte zur Verfügung gestellt.

Zum Abschluss des Projektes wurde von den Lehrkräften ein Unterrichtsportfolio erwartet. Damit ist eine Zusammenstellung von Dokumenten gemeint, die den Unterrichtsprozess mit seinen Intentionen und eingesetzten Materialien und Reflexionen darüber sowie einen Ausschnitt aus der Lernbiographie einzelner Schüler beschreiben bzw. dokumentieren.

Die Schüler führten zeitweilig ein Lerntagebuch und nahmen an einer Schülerbefragung zum Halbjahr und am Ende des Schuljahres teil. Die beteiligten Lehrkräfte wurden ferner gebeten, auf den entsprechenden Lehrerfortbildungstagungen von T³ über ihre Erfahrungen zu berichten.

Die Evaluationsinstrumente und der Ergebnisbericht der Studie stehen unter www.math-learning.com zum download zur Verfügung.

Ausgewählte Ergebnisse der Schülerbefragung

Ziel der Schülerbefragung war die Beobachtung der subjektiven Wahrnehmung bezüglich der Lernanforderungen und Lernmethoden durch die Lernenden und das Aufdecken möglicher Zusammenhänge mit dem Rechnereinsatz. Es konnten vier reliable Skalen gebildet werden.

Während bzgl. des *Mathematikweltbildes und der Wertschätzung von Mathematik* erwartungsgemäß in der kurzen Projektlaufzeit keine signifikanten Veränderungen auftraten, gab es in der Wahrnehmung von *Kommunikationsunterstützung und Vorgehensreflexion* im Mittel über alle 8 Klassen einen deutlichen positiven Trend. Dies kann als ein Ergebnis und Erfolg des Projektes gewertet werden. In der Skale der *Wahrnehmung der Unterrichtsgestaltung* konnte dieser Trend jedoch nicht fortgesetzt werden und bzgl. *Selbstbild und Selbsteinschätzung* ist ein schwacher negativer Trend zu beobachten. In den Lerntagebüchern der Schüler lassen sich gewisse Anhaltspunkte für diese Entwicklung finden: Einige geben an, dass sie sich nicht mehr so sicher sind, was sie denn eigentlich in Mathematik wirklich können, wenn sie mit dem Rechner arbeiten und in den Klassenarbeiten weniger erfolgreich waren als sie erwartet hatten. Interessant ist aber, dass sich die anfängliche große Skepsis gegenüber dem CAS-fähigen Taschenrechner mit befürchteten negativen Auswirkungen auf mathematisches Grundkönnen doch insgesamt zu einer breiten Zustimmung der Lernenden zu einem ausgewogenen Rechnereinsatz gewandelt hat.

Ausgewählte Ergebnisse zu den Unterrichtsportfolios

Für ein Unterrichtsprojekt zum sinnvollen CAS-Einsatz gelten grundsätzlich auch die Anforderungen, die an eine hohe Unterrichtsqualität in der didaktischen Literatur benannt werden. Da das wichtigste Werkzeug in der Hand einer Mathematiklehrkraft die Schüleraufgaben sind, welche die didaktische Qualität einer Lernumgebung beschreiben, ist es sinnvoll, den Aufgaben besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Neben der Art der jeweils realisierten Werkzeugfunktion des Rechners im Unterricht ist entscheidend, welche Lehr- und Lernziele im Projekt verfolgt werden (Zieltransparenz) und wie die Lehr- und Lernprozesse organisiert werden (Prozessbeschreibung). Mit diesen drei Kriterien: Zieltransparenz, Prozessbeschreibung und Aufgabenqualität - wurde ein handhabbarer Beurteilungsrahmen für Unterrichtsportfolios gewonnen und umgesetzt.

Es ist festzustellen, dass das mögliche Potenzial an Zielen für einen sinnvollen CAS-Einsatz noch keineswegs ausgeschöpft wurde. Reserven beste-

hen insbesondere in der expliziten Unterstützung alternativer Lösungswege, in der Visualisierung von Termumformungen und Dynamisierung von Mathematisierungen sowie im rechnergestützten Entdecken mathematischer Zusammenhänge.

In den Prozessbeschreibungen berichten die Lehrkräfte einmütig darüber, dass mit Rechnerunterstützung zentrale Inhalte besser verdeutlicht werden und Wichtiges schneller verstanden wird. Der Rechner als Hilfmittel zum Zeichnen der Bilder von Funktionenscharen wird besonders geschätzt. Die Lehrkräfte betonen, dass Eigenverantwortlichkeit und Präsentationsfähigkeit gestärkt werden und begrüßen die Kontrollmöglichkeit für Ergebnisse und Näherungen. Das erkannte Potenzial zur Förderung leistungsstarker Schüler wurde allerdings noch selten realisiert, wenn man die Wahrnehmung der Schüler den Lehreräußerungen gegenüber stellt.

Bei den eingesetzten Aufgaben handelt sich meist um Bestimmungs- oder Herleitungsaufgaben und Grundaufgaben mit geringem bis mittlerem Schwierigkeitsgrad, seltener um Umkehraufgaben oder Begründungsaufgaben. Offene Aufgabenformate waren eher nicht darunter. Der Anforderungsbereich der Aufgaben hatte seinen Schwerpunkt im Reproduzieren und Herstellen von Zusammenhängen. In wenigen Teilaufgaben ging es auch um Verallgemeinern und Reflektieren. Die besonders gut gelungenen und mit Schülerlösungen dokumentierten Aufgaben werden in einer Handreichung gesondert veröffentlicht.

Aus didaktischer Perspektive ergeben sich einige weiter zu bearbeitende Kernfragen des Rechnereinsatzes (CAS) im Unterricht, die in den Portfolios angedeutet werden:

- Welche Aufgabenformate eignen sich besonders für computergestützten Mathematikunterricht?
- Wie kann ein grundlegendes Begriffsverständnis erzielt und wachgehalten werden, wenn Rechenfunktionen an den Computer/TR delegiert werden? Was ist eigentlich noch wichtig zu wissen?
- Was soll (noch) notiert werden, wenn rechnergestützt gearbeitet wird? Wie erfolgt eine angemessene Leistungsbeurteilung im rechnergestützten Unterricht?
- Wie können Probleme lernschwacher Schüler/innen aufgefangen werden? (Fragen von Binnendifferenzierung und Individualisierung der Lernwege und Übungsphasen).

Die Suche nach Antworten auf diese Fragen erfordert künftig eine noch engere Zusammenarbeit zwischen Praktikern in der Schule und forschenden Didaktikern.

Maria INGELMANN, Darmstadt

CAliMERO – ein Modellversuch zu CAS-fähigen Taschencomputern ab Klasse 7 in Niedersachsen

Ein fünfjähriger Modellversuch CAliMERO[1], der im Schuljahr 2005/2006 an sechs niedersächsischen Gymnasien in der Klassenstufe 7 gestartet wurde, erprobt den Einsatz von Computer-Algebra-Systemen in Verbindung mit einem auf nachhaltiges Lernen gerichteten Unterrichtskonzept. Das Projekt, an dem derzeit 29 Klassen beteiligt sind, wird vom Land Niedersachsen getragen und von Texas Instruments unterstützt. Die wissenschaftliche Begleitung und Evaluation des Projekts wurde von der TU Darmstadt übernommen.

Organisation und Durchführung des Projekts

Gegenwärtig findet man im niedersächsischen Mathematikunterricht bereits landesweit den Einsatz von grafikfähigen Taschenrechnern. Viele am Projekt beteiligte Lehrkräfte haben mehrjährige Erfahrungen mit dem Einsatz von Taschencomputern.

CAliMERO wurde im Schuljahr 2005/2006 mit 29 Klassen gestartet. In den folgenden Jahren wird es bis zur Jahrgangsstufe 10 gemäß folgender Übersicht fortgesetzt.

	2005 / 2006	2006 / 2007	2007 / 2008	2008 / 2009	2009 / 2010
Klasse 7	x	x			
Klasse 8		x	x		
Klasse 9			x	x	
Klasse 10				x	x

Damit handelt es sich hier um eine der ersten Langzeitstudien zum CAS-Einsatz im Mathematikunterricht ab einer so frühen Klassenstufe. Ein besonderes Merkmal dieser Studie ist die enge Zusammenarbeit zwischen den beteiligten Lehrkräften, den Fachberatern und den Vertreterinnen der Fachdidaktik der Mathematik.

Um eine das Einsatzpotenzial von CAS-fähigen Taschencomputern aufgreifende Unterrichtskultur zu etablieren, begann das Projekt bereits ein halbes Jahr vor Schuljahresbeginn 2005/2006 mit einem gemeinsamen mehrtägigen Fortbildungsworkshop aller Beteiligten. Der Zielsetzung des Projektes entsprechende Instrumente zur Unterrichtsgestaltung und Wissenssicherung wurden vorgestellt und diskutiert, die im CAS-gestützten Unterricht eine Kompetenzentwicklung im Sinne der Bildungsstandards

[1] Computer-Algebra im Mathematikunterricht – Entdecken, Rechnen, Organisieren

fördern sollen. Das Unterrichtskonzept will das vielschichtige Potenzial der Taschencomputer zum Entdecken von Mathematik ausnutzen und es für effektive Übungsprozesse mit Verständnisförderung einsetzen. Im Laufe des Projekts finden jeweils vierteljährlich weitere mehrtägige Workshops statt, um die Kommunikation zwischen den Beteiligten zu fördern, die Unterrichtsmodule gemeinsam zu entwickeln und auszuarbeiten und über den Stand der Evaluation zu berichten. Durch die TU Darmstadt wird unter www.prolehre.de eine Internetplattform zum Erfahrungsaustausch betreut, auf der auch die entwickelten Materialien bereitgestellt werden.

Evaluationskonzept des Projekts

Der Schwerpunkt des Forschungsinteresses liegt auf den langfristig zu beobachtenden Effekten eines CAS-Einsatzes auf die Denk- und Kompetenzentwicklung und das Mathematikinteresse sowie die Vorstellungen über Mathematik der Schülerinnen und Schüler. Dabei sollen Defizite in unverzichtbarem Grundkönnen ohne Rechner möglichst verhindert werden. Mit verschiedenen Instrumenten werden im Laufe der Studie die Veränderung der Vorstellungen bezüglich Mathematik und Unterricht der beteiligten Lehrkräfte und Schüler analysiert, die Leistungsentwicklung der Schüler beobachtet und das „Rechnerlernpotenzial“ der Unterrichtsthemen und relevanten Aufgaben untersucht.

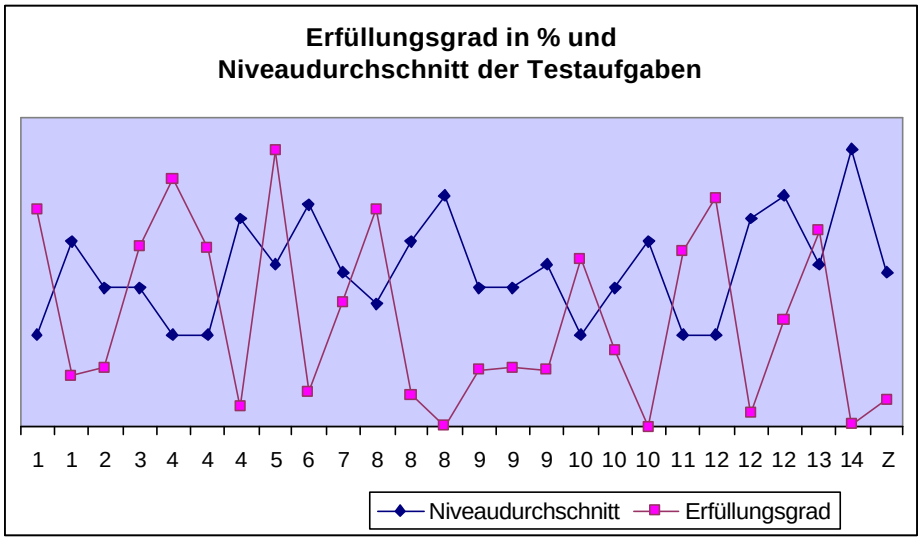
Inzwischen wurden an der TU Darmstadt die erforderlichen Evaluationsinstrumente entwickelt. Auf Lehrerseite sind dies ein Fragebogen zur Wahrnehmung von Unterricht und der Lehrerrolle, der jährlich eingesetzt wird, ein Fragebogen zur Reflexion und Weiterentwicklung der erarbeiteten Unterrichtsmodule sowie Stundenberichtsbögen für rechnergestützten Unterricht. Zusätzlich zur angelegten Monitoringfunktion geben diese teilstandardisierten Stundenberichte Anregungen zur Realisierung des Unterrichtskonzepts.

Auf Schülerseite wird zweimal jährlich ein Fragebogen eingesetzt, der unter anderem die Wahrnehmung von Mathematik und Unterricht, die Lernmotivation, den Umgang mit Fehlern und die Rechnerakzeptanz beleuchtet. Um die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler zu beobachten, wurde ein spezielles Testformat entwickelt, das in jedem Schuljahr als Pre-Post-Test eingesetzt wird.

Das Format der Leistungstests des Projekts CAliMERO

In den Tests, die als Open-Ended-Tests konzipiert wurden, wechseln sich einfachere und anspruchsvollere Aufgabenstellungen ab. In der 7. Klasse findet der Test noch komplett ohne Rechner statt, ab dem 8. Schuljahr wird durch Vergleich mit Klassen, die mit einem GTR arbeiten, der Einfluss der Rechnernutzung auch im Test untersucht.

Zu Beginn des Schuljahres 2005/2006 wurde der erste Leistungstest in den 29 beteiligten sowie 6 Vergleichsklassen über 45 Minuten geschrieben. Der Test umfasste 26 Items über alle Leitideen der KMK-Bildungsstandards. Der Ausfall des Tests bestätigt die Überlegungen, die zur Konzeption des Testformats führten. Durch Analyse der möglichen Lösungswege einer Aufgabe konnte ihr Potenzial bezüglich der von den KMK-Bildungsstandards für das Fach Mathematik formulierten Kompetenzen beschrieben werden. Nach Zuordnung zu den dort aufgezeichneten Anforderungsbereichen für die einzelnen Kompetenzen wurde der Niveaudurchschnitt der Testaufgaben als deren arithmetisches Mittel berechnet. Diese Methode ergab, dass sich etwa ein Viertel der Aufgaben im Bereich des Reproduzierens, 58 % im Bereich des Herstellens von Zusammenhängen und die restlichen Aufgaben im Anforderungsbereich Verallgemeinern und Reflektieren ansiedeln lassen. Ein Vergleich mit den empirischen Ergebnissen zeigt, dass die Methode der Berechnung des Niveaudurchschnitts relativ gut geeignet ist, um die empirische Schwierigkeit vorauszusagen.



Ein weiteres theoretisches Instrument zur Beschreibung des Anforderungsprofils der Testaufgaben ist die Untersuchung der Aufgaben nach ihrem Handlungsziel nach Bruder.

Die Überprüfung dieses Modells an den empirischen Daten zeigt, dass der Erfüllungsgrad der Aufgaben mit steigender Komplexität der Handlungsaufforderung sinkt. Ein Forschungsinteresse von CAliMERO ist auch die Entwicklung des Umgangs mit Aufgabenformaten, die zu komplexeren Handlungen auffordern.

Literatur

Bruder, R. (2003): Konstruieren – auswählen – begleiten. Über den Umgang mit Aufgaben. In: Jahresheft 2003. Seelze: Erhard Friedrich Verlag.

Hans-Georg WEIGAND, Würzburg

Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe - Evaluation eines einjährigen Schulversuchs

Es gibt mittlerweile zahlreiche empirische Untersuchungen zum CAS-Einsatz im Mathematikunterricht. Im Folgenden wird die Evaluation eines Unterrichtsversuchs zum CAS-Einsatz in der 10. Jahrgangsstufe dreier bayerischer Gymnasien dargestellt. Es werden Veränderungen bestimmter Kompetenzen durch einen Vor- und Nachtest erfasst, die Schülerinnen und Schüler werden nach ihrer Einschätzung des Unterrichts mit CAS gefragt, es wird die Art und Weise des CAS-Einsatzes – vor allem im Hinblick auf Veränderungen der Sozialformen – aufgrund von Stundenprotokollen der unterrichtenden Lehrer festgestellt und schließlich werden Veränderungen bei Prüfungsaufgaben analysiert.

1 Unterrichtsversuch

In sechs 10. Klassen (im Folgenden als CAS-Klassen bezeichnet) an drei bayerischen Gymnasien (insgesamt 137 Schülerinnen und Schüler) wurde über ein Jahr hinweg der TI Voyage 200 (im Folgenden als TC – Taschencomputer – bezeichnet) im Unterricht und in Prüfungen eingesetzt. Zwei Klassen gehörten dem neusprachlichen Zweig mit wöchentlich 3 Stunden Mathematik an, vier Klassen dem naturwissenschaftlichen Zweig, in dem wöchentlich eine zusätzliche Stunde im Rahmen des „Wahlpflichtgebietes Informatik“ zur Verfügung stand. In dieser Zusatzstunde wurden mathematische Themen behandelt (π-Berechnungen, Folgen und Reihen, Heron-Algorithmus) und mit Hilfe der Programmiersprache des TC sowie des integrierten Tabellenkalkulationsprogramms dargestellt. Die Schülerinnen und Schüler dieser Klassen hatten keine Erfahrungen mit dem CAS-Einsatz. Als Kontrollklassen wurden vier 10. Klassen an drei bayerischen Gymnasien in den Test einbezogen.

2 Testfragen

Die durchgeführte Evaluation sollte Antworten auf folgende Fragen liefern:

1. Lassen sich hinsichtlich zentraler mathematischer Fähigkeiten (Termumformungen, Interpretieren von Graphen, Lösen von Gleichungen, Arbeiten mit Tabellen, Arbeiten mit Formeln) nach einem Jahr Unterschiede zwischen den CAS- und den Kontrollklassen feststellen?

2. Lassen sich bei den Versuchsklassen unterschiedliche Auswirkungen des CAS-Einsatzes bei „guten“ und „schlechten“ Schülerinnen und Schülern[1] feststellen?
3. Wie verändern die unterrichtenden Lehrer die Prüfungsaufgaben in den CAS-Klassen?
4. Welche Einstellungen entwickeln die Schülerinnen und Schülern der Versuchsklassen zu dem neuen Werkzeug?
5. Welche Unterrichtsmethodik und Unterrichtsformen herrschen in den CAS-Klassen vor?

3 Testinstrumente

Die Fragen 1 und 2 wurden durch eine klassische Vor- und Nachtestreihe in Experimental- und Kontrollklassen beantwortet. Dabei wurden beide Tests von allen Klassen mit „Papier und Bleistift“ geschrieben, die Benutzung des Rechners war hier nicht erlaubt. Zur Beantwortung der 3. Frage wurden die Prüfungsaufgaben nachträglich durch ein externes Expertenurteil eingeschätzt. Zu der 4. Frage wurde ein Fragebogen mit Antworten im Rahmen einer 5-stufigen Rating-Skala und Fragen mit offenen verbalen Antworten entwickelt. Zur Beantwortung der 5. Frage führten die Lehrer in den CAS-Klassen Stundenprotokolle, in denen Thema der Stunde, Unterrichtszeit mit CAS-Einsatz und Art des CAS-Einsatzes festgehalten wurden.

4 Zusammenfassung der Ergebnisse[2]

Der einjährige Modellversuch hat gezeigt, dass sich der Taschencomputer gut in den regulären Unterricht der 10. Klasse integrieren und in Prüfungen verwenden ließ. Individuelles Arbeiten sowie Partner- und Gruppenarbeit traten im Mathematikunterricht verstärkt auf. Dieses Ergebnis unterstützt die Hypothese, dass der TC zu einem Katalysator für immer wieder geforderte neue Unterrichtsformen werden kann. Insbesondere bei Schülervorträgen mit Hilfe des am Overhead-Display angeschlossenen Rechners oder beim Berichten über Ergebnisse von Partner- und Gruppenarbeitsphasen zeigte sich, dass dem schriftlichen und mündlichen Beschreiben des Vorgehens und dem Interpretieren von TC-Ergebnissen – ganz im Sinne des KMK-Standards „Kommunikation“ – eine größere Bedeutung zukam.

Die Ergebnisse des Vor- und Nachtests bestätigen eine Kompetenzentwicklung in Bereichen, bei denen ein TC vorteilhaft eingesetzt werden kann: So

---

[1] Die verwendeten Leistungsbezeichnungen „gut“ und „schlecht“ beziehen sich dabei auf die Ergebnisse des Eingangstests.

[2] Bzgl. der Darstellung der Ergebnisse wird auf Weigand (2006) verwiesen.

haben die Schülerinnen und Schüler der CAS-Klassen beim Arbeiten mit Funktionsgraphen und beim Transfer zwischen Gleichung und Graph einen höheren Leistungszuwachs gegenüber den Kontrollklassen erzielt. Keine Unterschiede lassen sich beim Arbeiten mit Variablen, Termen und Tabellen feststellen. Dies zeigt insbesondere, dass kalkülhafte algebraische Fertigkeiten auch bei den CAS-Klassen nicht unterentwickelt bleiben. Das – im Rahmen des Versuchs nicht erklärbare – schlechtere Abschneiden der CAS-Klassen bei Aufgaben zum Lösen von – einfachen – Gleichungen und dem Arbeiten mit Tabellen weist darauf hin, dass alleine der Einsatz des Gerätes im Unterricht nicht automatisch zu einem besseren Verständnis der behandelten Inhalte führt.

Das häufig befürchtete Auseinanderstreben der Leistungen beim TC-Einsatz zwischen leistungsschwachen und -starken Schülerinnen und Schülern („Schereneffekt“) konnte nicht beobachtet werden, im Gegenteil, dieser Unterschied hat sich bei den CAS-Klassen verringert, was vor allem auf die Leistungszuwächse der mittleren und leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler zurückzuführen ist. Allerdings muss der gegenüber der Kontrollgruppe geringere Leistungszuwachs der – entsprechend der Ergebnisse des Vortests – „guten“ Schülerinnen und Schüler eingehender untersucht werden. Die Anlage dieses Modellversuchs lässt keine Rückschlüsse auf die Ursache für dieses Ergebnis zu.

Die in Klassenarbeiten gestellten Aufgaben unterscheiden sich nicht wesentlich von traditionellen Aufgaben, was bei diesem Modellversuch aber auch darauf zurückzuführen sein mag, dass der Rechner in der nachfolgenden 11. Jahrgangsstufe nicht eingesetzt werden darf und die Lehrer deshalb auf die Gleichwertigkeit der Klassenarbeiten mit denjenigen von „rechnerfreien Klassen“ großen Wert legten.

Durch den Rechnereinsatz in Prüfungen eröffnete sich den Schülerinnen und Schülern ein erweitertes Spektrum an Lösungsstrategien, etwa beim Gleichungslösen, und sie nutzten – nach Aussage der Lehrer – auch die vielfältigen Möglichkeiten (numerisch, algebraisch, geometrisch) zur Ergebniskontrolle ihrer Berechnungen (ob mit Papier und Bleistift oder mit dem Rechner durchgeführt). Eine systematische Untersuchung der aufgetretenen Lösungsstrategien war in diesem Versuch leider nicht möglich, das soll in dem Nachfolgeprojekt nachgeholt werden.

Literatur

Weigand, H.-G., Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe - Evaluation eines einjährigen Schulversuchs, erscheint im Journal für Mathematikdidaktik 2006

Sektionsvorträge

Reimund ALBERS, Bremen

Die Papierfaltungsfolge

Nach den schockierenden Ergebnissen der internationalen Untersuchungen TIMSS und PISA ist verstärkt untersucht worden, was SchülerInnen in der Schule lernen (sollen) und wie sie es lernen (sollen). Es besteht der allgemeine Konsens, dass der Mathematik-Unterricht neu gestaltet werden muss. Zu dieser Neugestaltung gibt es einen breit angelegten Maßnahmenkatalog, der die universitäre Mathematik-Didaktik, die Lehrerfortbildung (z.B. Projekt Sinus/ Sinus-Transfer) und die verwaltungstechnische Umorganisation von Unterricht (z.B. Einführung von Zentralabitur in vielen Bundesländern) umfasst. Zum Zusammenwirken dieser verschiedenen Felder schreibt H.-J. Burscheid in [1]: „Aus meiner Sicht erreichen Forschungsergebnisse im Wesentlichen über die jeweils jüngste Generation die Unterrichtspraxis, ...“.:

Ein wesentlicher Kanal für Innovationen ist also, was angehende LehrerInnen während der universitären Ausbildung über Mathematik lernen und wie sie es lernen: zum einen, welche didaktischen Grundlagen die StudentInnen als theoretische Lehrmeinung vermittelt bekommen, zum anderen wie sie selbst Mathematikausbildung erleben, insbesondere in den fachinhaltlichen Lehrveranstaltungen. Th.J. Cooney und H.G.Wiegel zitieren dazu in [2] die allgemeine Erkenntnis: „teachers teach as they were taught, not how they were taught to teach“ oder knapp auf Deutsch: „Taten zählen mehr als Worte“.

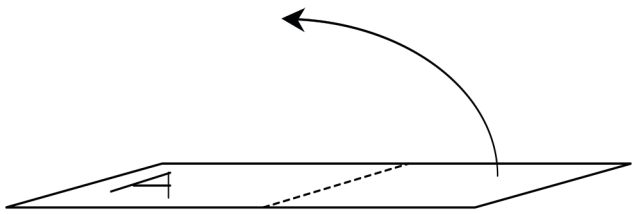
Wenn wir also die neuen LehrerInnen so ausbilden wollen, dass sie später im Unterricht „Mathematik lernen als sinnvollen konstruktiven und entdeckenden Prozess erlebbar machen“, so müssen sie dieses bei ihrem eigenen Lernen von Mathematik an der Universität erleben. (Bender u.a. in [3]). Will man dieses Vorhaben praktisch umsetzen, so hat man neben methodischen Fragen auch die inhaltliche Frage zu klären. Was ist einerseits geeignet, ein exploratives Vorgehen zu fördern, ja geradezu herauszufordern, andererseits aber auch so schulnah, dass die StudentInnen die Verwendbarkeit in der Schule erkennen können?

Für dieses Problem ist die Papierfaltfolge eine ideale Lösung.

Wie wird die Papierfaltfolge erzeugt?

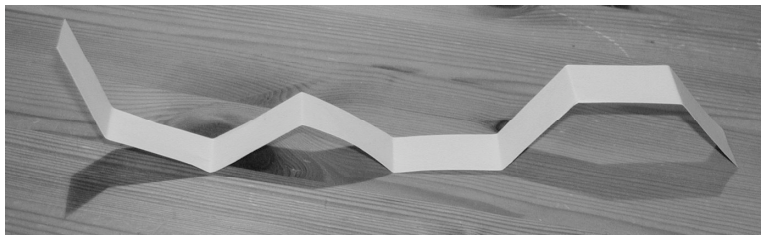
Nehmen Sie einen ca. 30cm langen (lange Seite eines DIN A 4 Blattes) und 2 cm breiten Streifen und markieren Sie ihn an der linken Seite. Falten Sie nun die rechte Hälfte des Streifens über die linke.

Klappen Sie nun den Streifen auseinander. Sie haben damit die erste Stufe einer Abfolge von mehreren kleinen Faltversuchen erreicht.



Nehmen Sie nun einen zweiten Streifen, markieren ihn wieder am linken Ende und falten ihn so wie den ersten – rechts über links. Falten Sie ihn dann ein zweites Mal, wieder rechts über links. Ziehen Sie nun die Enden des Streifens auseinander.

Analog wird nun der dritte Streifen drei Mal gefaltet. Der auseinander gezogene Papierstreifen sollte dann wie abgebildet aussehen.



Auf diese Weise kann man einen 30 cm langen Streifen bis zu fünf Mal falten. Die erste mathematische Frage, die sich geradezu aufdrängt, ist, wie viele Knicke ein Streifen nach ein-, zwei-, drei- u.s.w. maligem Falten hat.

An den gefalteten Streifen kann man deutlich erkennen, dass man zwei Sorten von Knicken unterscheiden kann: Berg- und Talknicke. Diese Begriffe sind sehr nahe liegend, allerdings muss man akzeptieren, dass hier zwischen zwei Tälern nicht unbedingt ein Berg liegen muss.

Schon mit SI-SchülerInnen kann man die Abfolge von Berg- und Talknicken analysieren. Schreiben wir ein „L“ für einen Talknick und „R“ für einen Bergknick, sind die Abfolgen von Berg- und Talknicken für die ersten 5 Streifen schnell, aber vor allem übersichtlich hingeschrieben:

erster Streifen:	`L`
zweiter Streifen:	`LLR`
dritter Streifen:	`LLRLLRR`
vierter Streifen:	`LLRLLRRLLLRRLRR`
fünfter Streifen:	`LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR`

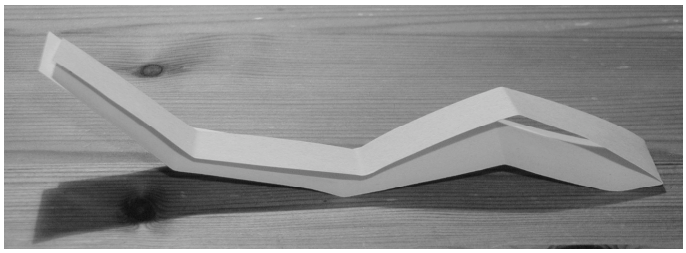
Diese übersichtliche Schreibweise hat den Vorzug, dass sie die Faltmuster strukturiert und uns so Regelmäßigkeiten erkennen lässt. So sieht man z.B. sofort, dass die LR-Knickfolge für jeden Streifen so beginnt, wie die gesamte Knickfolge des vorhergehenden Streifens.

Hat man Papierfalten so weit eingeführt, so ist die Basis für eine Forschungstätigkeit gelegt. Lernende der unterschiedlichsten Stufen sprudeln

über vor Entdeckungen und (auch falschen) Vermutungen. Ab hier ist es praktisch unvermeidbar, dass sich der weitere Lernprozess in forschenden, selbst entdeckenden Bahnen entwickelt. Ich möchte hier knapp die wesentlichen Gesetzmäßigkeiten darstellen, wohl wissend, dass solch eine Vorwegnahme dem Geist dieses Stoffes diametral entgegensteht.

1. Das Reflexionsgesetz

Man kann es erkennen, wenn man einen gefalteten Papierstreifen wieder in der Mitte zusammenfaltet.



Klappt man nun die obere Hälfte wieder nach rechts, so wird aus einem Berg- ein Talknick und umgekehrt. Weiterhin wiederholt sich die Abfolge der Knicke im ersten Teil (unten) in umgekehrter Reihenfolge im zweiten, herüber geklappten Teil. Der letzte Knick im ersten (unteren) Teil wird zum ersten Knick im zweiten Teil.

Man erhält die Knickfolge der folgenden Stufe, indem man
- die letzte Knickfolge abschreibt
- ein L anhängt
- die letzte Knickfolge reflektiert hinschreibt, d.h. die Reihenfolge umdreht und L und R austauscht.

2. Das Inflationsgesetz

Nehmen Sie einen Streifen, markieren Sie das linke Ende und falten ihn z.B. drei Mal. Dann ziehen Sie den Streifen auseinander und markieren alle vorhandenen Knicke mit einem Strich. Nun falten Sie den Streifen wieder so weit zusammen, wie er bereits gefaltet war und führen einen weiteren Faltschritt aus. Die neu entstandenen Knicke sind nicht markiert. Hier tauchen Tal- und Bergknicke regelmäßig abwechselnd auf.

Man erhält die Knickfolge der folgenden Stufe, indem man
- die letzte Knickfolge abschreibt
- vor, in die Lücken und am Ende abwechselnd L und R einfügt

3. Die Toeplitz-Konstruktion

(benannt nach Otto Toeplitz, der 1928 auf ähnliche Weise fastperiodische Funktionen konstruiert hat)
- Man schreibe die periodische Zeichenfolge LxRxLxRxLxRx... auf

- Man ersetze von Stufe zu Stufe alle x durch die Zeichen der Folge LxRxLxRxLxRx...

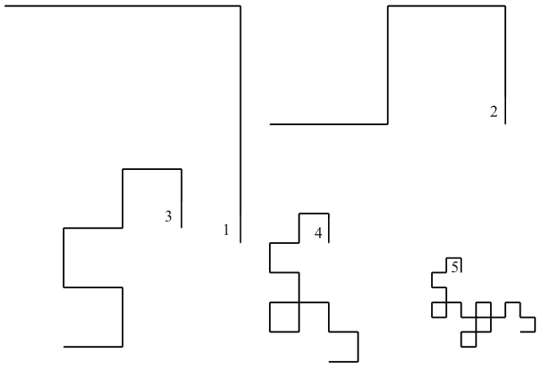
Also: `LxRxLxRxLxRxLxRx...`
`LLRxLRRxLLRxLRRx...`
`LLRLLRRxLLRRLRRx...`

Zu Beginn bis zum ersten x steht jeweils eine Stufe der Papierfaltungsfolge.

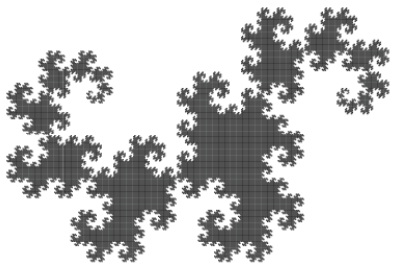
Diese drei Gesetzmäßigkeiten bilden den Kern des Themas „Papierfaltungsfolge“. Die formal exakte Formulierung dieser Gesetzmäßigkeiten mit dem Ziel, deren Äquivalenz zu beweisen, ist ein lohnendes und lehrreiches Beispiel für Schulmathematik vom höheren Standpunkt.

4. Die geometrische Interpretation

Biegt man beim Auffalten die Streifenabschnitte so weit auseinander, dass die Papiersegmente Winkel von 90° bilden, so erhält man eine Abfolge von geometrischen Mustern.



Werden die Figuren passend von Stufe zu Stufe vergrößert, so erhält man einen Grenzwert, der ein Fraktal ist, den „Highway-Dragon“



Literatur

[1] H.-J. Burscheid, Zur Entwicklung der Disziplin „Mathematikdidaktik“ in den alten Bundesländern, ZDM 2003, Vol. 35 (4)

[2] Th.J. Cooney, H.G. Wiegel, Examing the Mathematics in Mathematics Teacher Education, Second International Handbook of Mathematics Education, 2003

[3] P. Bender, D. Beyer, U. Brück-Binninger, R. Kowallek, S. Schmidt, P. Sorger, H. Wielpütz, E.Ch. Wittmann, Überlegungen zur fachmathematischen Ausbildung der angehenden Grundschullehrerinnen und -lehrer, Journal f. Mathematik-Didaktik Jhrg. 20 (1999), Heft 4

[4] H.-O. Peitgen, R. Albers, Papierfalten, Materialband 3 der Lehrerakademie Bremen, 1997 `http://www.lehrerakademie.uni-bremen.de/materialien/materialcds.html`

Gabriella Ambrus, Budapest

Analyse eines geometrischen Problems für die Klassen 7-11

Zu einer Aufgabe mehrere Lösungen bereiten bzw. die Verallgemeinerung der Aufgabe kommt oft vor. In folgendem wird eine nicht übliche Analyse eines Problems aufgezeigt. Es werden betrachtet:

- Die Beziehung zwischen der mathematischen Inhalt und mehreren möglichen Texte (Formulierung) der Aufgabe.
- Lösungswegen von verschiedenen Gebieten der Mathematik, betrachtend auch die verschiedenen Vorkenntnisse der (ungarischen) SchülerInnen in verschiedenen Jahrgängen.
- Vorkenntnissen die zu den verschiedenen Lösungswegen nötig sind und daher während der Lösung auch geübt sind.

Es wird hier nicht eingegangen wie die Lösungswege durch Veranschaulichung (Modell, DGS, …) geholfen werden können, sowie werden Erweiterungsmöglichkeiten nicht betrachtet.
Für die Analyse wurde ein Problem gewählt das beim Wettbewerb Tamás Varga in Ungarn in 1992 für SchülerInnen der 7. Klasse gestellt wurde (Text 1).

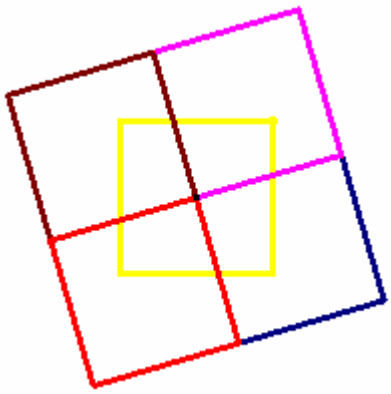
Verschiedene Formulierungen einer Aufgabenstellung

Ohne Änderung des mathematischen Inhaltes des Problems gibt es verschiedene Formulierungen des Textes. Einige mögliche Variante:
Text 1 Der Mittelpunkt eines Quadrats mit der Seitenlänge 2cm sei ein Eckpunkt eines anderen Quadrats mit der gleichen Seitenlänge.
Wie groß ist der gemeinsame Teil beider Quadrate?
Text 2 In den Mittelpunkt eines Quadrats mit der Seitenlänge a stecken wir einen Eckpunkt eines anderen Quadrates mit der Seitenlänge b. Das zweite Quadrat dreht sich um diesen Punkt. Wie groß ist die überschneidende Fläche?
Text 3a Es gibt zwei gleichgroße Quadrate aus Glas, ein gelbes und ein blaues. Das blaue Quadrat liegt mit einem Eckpunkt auf dem Mittelpunkt des gelben befestigt.
Wie groß ist die grüne Fläche?
Text 3b Es gibt zwei gleichgroße quadratförmige Filter. Ein Filter ist mit einem Eckpunkt im Mittelpunkt des anderen befestigt.
Die Filterwirkung ist besser, wenn zwei Filterschichten einander überdecken. In welcher Lage der Quadrate ist die Filterwirkung am größten?

Text 4 Im Mittelpunkt eines Quadrates dreht sich der Eckpunkt eines kongruenten anderen Quadrates.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass, nachdem das zweite Quadrat herumgewirbelt (und angehalten) wurde, die sich überlappenden Flächenteile der beiden Quadrate ein Viertel des ersten Quadrats ausmacht?

In *Text 2* ist das Problem in einer schwereren Formulierung gestellt; wegen der verschiedenen Seitenlängen muss mit Parametern gearbeitet werden, was für die SchülerInnen nicht leicht ist. *Text 1* kann als ein Spezialfall betrachtet werden. Bei den anwendungsnäheren Formulierungen wie Text 3 werden nicht nur mathematische Fachkenntnisse sondern auch Sachkenntnisse gefordert. *Text 4* gibt ein konkretes Beispiel, wie verschiedene mathematische Bereiche, hier Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer Aufgabe auftreten können.
Gleiche oder ähnliche mathematische Inhalte in verschiedenen Formulierungen können das Bild über Mathematik bei den Schülern positiv beeinflussen. Texte für das Problem können von den SchülerInnen auch selbst formuliert werden, und kann dies auch motivierend wirken.
Die folgende Lösungen sind zum Text 1 angefertigt. Aus Platzgründen können hier nur vier gezeigt werden.

Lösung1



Wegen der vierfachen Drehsymmetrie des (ersten) Quadrates ist der gemeinsame Teil ein Viertel des Quadrates, das heißt 1 cm^2.

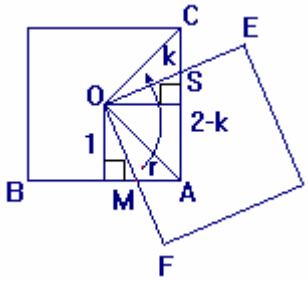
Vorkenntnisse: vierfache Drehsymmetrie des Quadrates, Erfahrungen mit Zerlegungen.

Stufe: 12 - 13 Jahre (7. Jahrgang)

In den Lösungen 2, 3, wird der Flächeninhalt des gemeinsamen Teils berechnet. Bei den rechnerischen Lösungen ist es auch möglich, durch geometrische Interpretationen von Termen die synthetische Lösung aufzuzeigen, wie dies in Lösung 2 geschieht.

Lösung 2

S ist der Schnittpunkt der Seite AC des ersten Quadrates und der Seite OE des gedrehten Quadrates, M ist der Schnittpunkt der Seite AB und der Seite OF des gedrehten Quadrates, $k = r$ wegen der Drehsymmetrie des Quadrates (oder: da die Dreiecke OCS und OAM kongruent sind, gilt „SWW“).



Die Fläche F des gemeinsamen Teils ist die Summe der Flächeninhalten von zwei Dreiecken (AOS und AOM):

$$F = \frac{(2-k)\cdot 1}{2} + \frac{k\cdot 1}{2} = \frac{2\cdot 1}{2} - \frac{k\cdot 1}{2} + \frac{k\cdot 1}{2} = 1 .$$

Die durch äquivalentes Umformen erhaltenen Terme können als Flächeninhalt von Dreiecken aufgefasst werden: $\frac{2\cdot 1}{2} = FOAC$, $\frac{k\cdot 1}{2} = FOAM$ und $\frac{k\cdot 1}{2} = FOCS$.

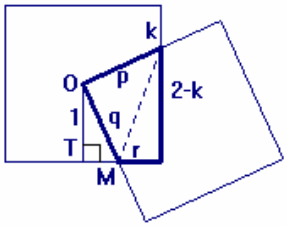
Das Vorzeichen der Terme wird als Ergänzen bzw. Wegnehmen interpretiert. Aus diesem Ergebnis ergibt sich eine Lösungsidee mit Zerlegung (in eine spezielle Lage).

Vorkenntnisse:

Kongruenz von Dreiecken, Erfahrungen mit Zerlegungen, Fläche von Dreiecken (Drehsymmetrie des Quadrates). Aufschreiben und Umformen von algebraischen Termen. *Stufe*: 12 - 13 Jahre (7. Jahrgang)

Lösung 3

Der gemeinsame Teil ist in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt.



$k = r$ und $p = q$

wegen der Drehsymmetrie des ersten Quadrates um 90 Grad.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck OMT folgt nach dem Satz des Pythagoras: $p = \sqrt{1^2 + (1-k)^2}$

Die Fläche des gemeinsamen Teils:

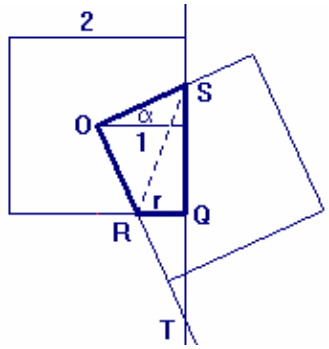
$$F = \frac{(2-k)\cdot k}{2} + \frac{p\cdot q}{2} = \frac{(2-k)\cdot k}{2} + \frac{\left(\sqrt{(1)^2 + (1-k)^2}\right)^2}{2} = \frac{2k - k^2 + 2\cdot 1 - 2k + k^2}{2} = 1$$

Vorkenntnisse:

Kongruenz von Dreiecken, Erfahrungen mit Zerlegungen, Fläche von Dreiecken (Drehsymmetrie des Quadrates), Pythagoras, algebraisches Umformen. *Stufe:* 14 - 15 Jahre (8., 9. Jahrgang)

Lösung 4

Diese Lösung mit Winkelfunktionen sieht auf den ersten Blick komplizierter aus als die vorigen Lösungen, braucht aber nur elementare Kenntnisse von Winkelfunktionen und trigonometrischen Umformungen. Dabei wird der gemeinsame Teil als Differenz von zwei Flächen berechnet.



$RQ : 1 = QT : \operatorname{ctg}\alpha$

$OS = 1/\cos\alpha$
$OT = 1/\sin\alpha$
$QT = \operatorname{ctg}\alpha - 1$

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks OST:

$$F_1 = \frac{OS \cdot OT}{2} = \frac{1}{2\cos\alpha\sin\alpha}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks RTQ:

$$F_2 = \frac{QT \cdot RQ}{2} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}(\operatorname{ctg}\alpha - 1) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{ctg}\alpha - 1) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{1}{2}\frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$F = F_1 - F_2 = \frac{1 - (1 - 2\sin\alpha\cos\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha} = 1$$

Vorkenntnisse:
Winkelfunktionen sin, cos, tg und Flächeninhalt von rechtwinkligen Dreiecken, trigonometrische Umformungen, algebraisches Umformen.
Stufe: 16 - 17 Jahre (10., 11. Jahrgang)

Warum den selben Problem in verschiedenen Schulstufen zu bearbeiten?

- Es kann gezeigt werden wie die vorhandenen Mitteln immer reicher werden – Erweiterung der Kenntnisse, dynamisches Bild über Mathematik(lernen).
- Vernetzung der Kenntnisse vielseitig.
- Verbinden von verschiedenen Gebieten der Mathematik verschiedenerweise auch beim Lösen eines Problems.
- In welcher Klasse, welche Lösung bearbeitet wird kann davon abhängen was das Ziel der Lehrer ist (was zu üben)- nicht nur die Aufgabe sondern auch das gewählte Lösungsweg bestimmt was geübt wird.
- Frühere Lösungswege verhelfen zu Weiteren z.B. Idee der Drehsymmetrie oder die Idee der Zerlegung. Damit weniger Leistungsstarke auch „zur Wort kommen können".
- Förderung der Kreativität durch „ein Problem aus mehreren Gesichtspunkten zu betrachten" d.h. Mit Hilfe von verschiedenen Vorkenntnissen oder eher algebraisch oder geometrisch oder in ganzem (Lösung mit Drehsymmetrie) oder in Details (Lösungen mit Zerlegung).
- Bei den verschiedenen Lösungswegen können viele Problemlösestrategien vorkommen.

Literatur:

Ambrus, G.: Üben in der Planung des Mathematikunterrichts, Dissertation, Salzburg, 2003

Lucas AMIRAS, Weingarten

Von den Grundlagen der Geometrie zur Sinngebung geometrischer Grundbegriffe

(Dem Vortrag liegt die Habilitationsschrift des Vortragenden zu Grunde (Amiras 2006). Deren Ergebnisse werden in einer erweiterten Version des vorliegenden Vortrages demnächst veröffentlicht.)

1. Zum Stand der Behandlung geometrischer Grundbegriffe in der Schule und Hochschule

Anknüpfend an einen früheren Beitrag (Amiras 2003) lassen sich anhand von Schulbüchern zwei Typen der Behandlung geometrischer Grundbegriffe in der Orientierungsstufe unterscheiden:

1. Es wird eine (im günstigen Fall) durch zeichnerische Handlungen geometrischer Grundobjekte oder durch konkrete Beispiele von geformten Objekten unterstützte Namengebung bzw. **Festlegung einer Terminologie** betrieben (z.B. im Fall von Strecke, Strahl und gerader Linie). Diese Objekte werden als anschaulich bekannt vorausgesetzt.

2. Es werden vielfältige konkrete Operationen (insb. Falten, Zeichnen und andere Erzeugungsverfahren) vorgeschlagen, als Basis einer durch manuelle Handlungen unterstützten Begriffsbildung. (Vgl. z.B. Gamma 5, Welt der Zahl 5) Dabei wird versucht, den Schülern **Erfahrungsbereiche** zu eröffnen, indem (durch Vergegenwärtigung oder Aktionen) auf die Praxis der Herstellung und Verwendung von Geraden und Ebenen Bezug genommen wird.

Auffällig am Vorgehen nach Typ 2 ist der folgende Umstand, hier am Beispiel der Behandlung der Geraden exemplifiziert: Geraden werden durch unterschiedliche Verfahren erzeugt bzw. realisiert. Die Frage, was für ein Merkmal an diesen empirischen Gegenständen mit dem Begriff „gerade“ bezeichnet wird, bleibt jedoch unbeantwortet. Auch Fragen nach der besseren oder hinreichenden Realisierung von Geraden kommen in diesem Zusammenhang nicht immer ins Blickfeld. Im Hinblick auf eine Stufung des Begriffslernens scheint hier zwar ein unverzichtbarer Anfang vorzuliegen (Begriff der Geraden als Phänomen); die nächste Stufe jedoch (Geradenbegriff als Träger von Eigenschaften) wird an dieser Stelle nicht mehr beschritten, jedenfalls nicht im Hinblick auf technische, relative Eigenschaften von geraden Linien zueinander (z.B. das Passen von geraden Kanten in jeder Lage aneinander). Geraden erscheinen somit als empirische Gegenstände (gegeben als Kanten, Striche auf dem Papier, gespannte Schnüre, Lichtstrahen usw.), die „anschaulich“ wohl etwas gemeinsam haben; was

das aber ist, bleibt unausgesprochen. Eigenschaften geometrischer Grundformen in den Tätigkeiten der Schüler können also mit geometrischen Begriffen nicht beschrieben werden, da der Bezug der dazu verwendeten technischen zur geometrischen Terminologie nicht ersichtlich ist.

Ein Blick auf die fachdidaktische Literatur zur Orientierungsstufe oder gar auf Hochschullehrbücher zur Geometrie bringt im übrigen auch keine befriedigende Antwort zu diesem Fragenkomplex. (Dazu Amiras 2006) Diese Schwierigkeiten verweisen ausnahmslos auf ein traditionelles, ungelöstes, grundlagentheoretisches Problem: Die Begründung bzw. Konstitution der Geometrie als Figurentheorie.

2. Protogeometrie - Grundlagen der Geometrie als Figurentheorie

In der ersten Hälfte des 20. Jhdts versucht zuerst Hugo Dingler die euklidische Elementargeometrie als Figurentheorie auf operativer Grundlage (also auf der Basis einer begrifflich-normativen Explikation technischen Handelns) zu begründen, was in Anfängen stecken bleibt. Paul Lorenzen und seine Schule setzen diese Bemühungen seit 1961 (bis etwas 1985) später im Rahmen eines umfangreicheren Programms zur den Grundlagen der Physik („**Protophysik**“) fort, zuletzt unter der Bezeichnung „**Protogeometrie**“. Seit 1978 schließt auch die Geometriedidaktik in umfangreicher Weise an diese Grundlagenbemühung an, durch die „**Operative Geometriedidaktik**“ von Peter Bender und Alfred Schreiber (vgl. Bender/Schreiber 1985), sowie Entwürfe zur Behandlung geometrischer Grundbegriffe in der Orientierungsstufe von Konrad Krainer (1982) und Dieter Volk (1984). Die Protogeometrie im Rahmen der Protophysik kommt währenddessen über Dinglers Ansätze nicht wesentlich hinaus, verbleibt relativ wirkungslos und hinterlässt seit etwa 1985 ein sehr uneinheitliches Bild.

Seit vielen Jahren versucht nun der Vortragende - nach einer kritischen Aufnahme aller bisherigen Bemühungen (Amiras 2000) - mit einem neuen Ansatz eine kritische Fortsetzung der Protogeometrie und eine Weiterentwicklung der operativen Entwürfe zur Sinngebung geometrischer Grundbegriffe in Übereinstimmung mit den Ansätzen der operativen Geometriedidaktik von Bender und Schreiber. Das Ergebnis dieser Forschungen stellt die genannte Habilitationsschrift dar.

Der neue Ansatz zur Protogeometrie führt (in kritischer Fortsetzung früherer Entwürfe) zunächst zur Explikation von **Funktionseigenschaften** geometrischer Grundformen aus der Praxis ihrer **Verwendung** und versucht sie begrifflich exakt zu fassen. Für Ebene und Gerade z.B. sind dies vor allem Formeigenschaften:

1. **Universelle Passung** (eventuell mit Überlappung) von Matrizen und Kopien (kongruenten Figuren) in jeder festen Berührlage zueinander.
2. **Glattheit** bzw. gegenseitige **Verschiebbarkeit** zueinander bei Passung.
3. **Erweiterbarkeit** (bei Überlappung) unter Beibehaltung von 1. - 2.
4. **Einschränkbarkeit**, d.h. Teilstücke der Figuren erhalten die Eigenschaften 1. - 2.

(1. und 2. formulieren sogenannte **Homogenitäten** von Geraden und Ebenen.)

In der genannten Schrift werden diese Eigenschaften mit Hilfe einer operativ verankerten Terminologie und praktischen Postulaten exakt gefasst. Der Übergang von der Protogeometrie zur geometrischen Theorie erfolgt dann im Sinne einer „Transformation“ auf der Basis methodischer Prinzipien der Theoriebildung, die in der Axiomatik der Geometrie wirksam sind. In geeigneten Axiomatisierungen lassen sich dann die protogeometrischen Eigenschaften der Grundformen in neuer Form wieder finden (insb. die Homogenität von Ebene und Gerade). Was damit gewonnen ist, ist eine bessere Motivierung der Axiomatik, sowie einige wichtige Einsichten in ihre methodischen Vorzüge, aber auch ihre Grenzen.

Neben den systematischen Beiträgen werden in der genannten Arbeit auch historisch-kritische Studien zu den Grundlagen der Geometrie angestellt. Der dritte, umfangreichste Teil ist didaktischen Studien gewidmet, wobei neben der Untersuchung vorliegender Beiträge auch neue Vorschläge gemacht und Verbindungen zu verwandten Bemühungen hergestellt werden.

3. Protogeometrie und die Sinngebung geometrischer Grundbegriffe

An früherer Stelle wurde über die Unterrichtsentwürfe von K. Krainer und D. Volk berichtet (Amiras 2005). In der genannten Habilitationsschrift werden, nach der kritischen Besprechung und Würdigung dieser Entwürfe, Lernumgebungen auf dem Hintergrund der entwickelten Protogeometrie vorgestellt, die diese Entwürfe wesentlich ergänzen bzw. weiterzuentwickeln versuchen. Die Frage ist nun, wie die Protogeometrie zur Sinngebung geometrischer Grundbegriffe konkret beiträgt. Am Beispiel der Rede von der **Form von Figuren**, auf welche protogeometrische Bestimmungen von Ebene und Gerade aufbauen, kann dies hier nur kurz erläutert werden:

Auf der Basis einer operationalen Verankerung der Rede von der Form von Figuren (Linien, Flächen) in technischen Verfahren zur Formreproduktion wird in der Protogeometrie eine **vorgeometrische Terminologie** aufgebaut. Diese dient dann zur Formbestimmung von Gerade und Ebene bzw. zur Formulierung der zuvor genannten Eigenschaften. Diese Bestimmun-

gen geometrischer Grundbegriffe und die ihnen zu Grunde liegenden Handlungen sind zugleich eine Antwort auf das eingangs herausgestellte, offene didaktische Problem ihrer Sinngebung.

In der genannten Schrift werden nun u.a. drei Lernumgebungen zur Behandlung geometrischer Grundbegriffe auf diesem Hintergrund vorgeschlagen. Exemplarisch wurde im Vortrag die Lernumgebung zur Form von Figuren vorgestellt, mit Schüleraktivitäten, die an die technischen Verfahren zur Gestaltreproduktion (Kopieren) von Figuren anschließen. Auf die darauf bezogene Rede von der „Gestalt“ oder „Form“ von Figuren können dann die Formbestimmungen von Gerade und Ebene aufbauen. Diesen Grundformen sind zwei weitere Lernumgebungen gewidmet.

4. Ausblick

Am Schluss des Vortrages wurden das Design der vom Vortragenden entworfenen **Protogeometrie-Website** und einige Beispielseiten vorgestellt. Diese Website, die auch in englisch erscheinen wird, soll das ganze Spektrum der Protogeometrie (Grundlagen, Philosophie, Geschichte, Didaktik der Geometrie) erfassen und einer breiten Öffentlichkeit vorstellen. Sie möchte als Informationsquelle und Forum für Lehrende und Lernende (Schule, Hochschule) dienen und allen Interessierten offen stehen. Es ist zu hoffen, dass damit eine bessere Verbreitung und eine Weiterentwicklung der protogeometrischen Entwürfe erfolgen kann.-

Literatur

Amiras, L., 2000: *Protogeometrica. Systematisch-kritische Untersuchungen zur protophysikalischen Geometriebegründung*, Dissertation, Uni Konstanz, Konstanz 2000

Amiras, L., 2003: „Die Behandlung geometrischer Grundbegriffe im Mathematikunterricht aus der Sicht der operativen Geometrie“, in: Henn, H.W. (Hg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003*, S. 65-68.

Amiras, L., 2005: „Protogeometrie und Geometrieunterricht“, in: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005*, Bielefeld 2005, S. 57-60.

Amiras, L., 2006: *Protogeometrie. Elemente der Grundlagen der Geometrie als Theorie räumlicher Figuren.* Habilitationsschrift. PH Weingarten. Weingarten.

Bender, P.; Schreiber, A., 1985: *Operative Genese der Geometrie.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 12. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Krainer, K.1982: *Umwelterschliessung im Geometrieunterricht*. Klagenfurt.

Volk, D., 1984: *Geometrie aus dem Handwerk. Genauer hinschauen beim Mauern und Häuserbauen*. Göttingen.

Ludwig Bauer, Universität Passau

Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht der Hauptschule. Überlegungen zum zentralen Jahrgangsstufentest 2004 für bayerische Hauptschulen (Jahrgangsstufe 8)

1. Einführung

Die im Auftrag des Kultusministeriums durchgeführten zentralen Jahrgangsstufentests für das Fach Mathematik in der Hauptschule sollen die mathematischen Kompetenzen von Schülern in Kernbereichen prüfen. Es nehmen jeweils alle Schüler eines Jahrgangs teil.

In der vorliegenden Arbeit werden Aufgaben und Schülerbearbeitungen des Jahrgangsstufentests 2004 für die 8. Jahrgangsstufe analysiert, und zwar weniger in quantitativ-statistischer als vielmehr in qualitativ-didaktischer Hinsicht. Ziel ist es, an Hand von Fallstudien Möglichkeiten für die Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht der Hauptschule aufzuzeigen, wie sie auch in der lokalen Lehrerfortbildung ins Auge gefasst werden können.

Materialien zum Test (Aufgaben, Durchführung, Korrektur, Auswertung, Ergebnisse, Legitimation, mögliche Weiterarbeit) findet man unter www.isb.bayern.de.

2. Analyse

2.1. Aufgabenbezogene Analyse: Aufgabenstellungen, Aufgabenprofil, erforderliche Kompetenzen, ausgewählte Schülerbearbeitungen, Lösungswege und Strategien der Schüler, häufige/typische Schülerfehler, mögliche Maßnahmen bzw. Konsequenzen.

2.2. Schülerbezogene Analyse: Fallstudien zu einzelnen Schülerbearbeitungen; individuelle Kompetenzprofile (Stärken, Schwächen, Fehler); individuelle Fördermaßnahmen.

2.3. Klassenbezogene Analyse: Analyse von Schülerbearbeitungen in einer Klasse; Kompetenz- bzw. Fehlerprofile; Vergleich mit der Gesamtpopulation; mögliche Maßnahmen ("Therapieplan" für einzelne Schüler, für Schülergruppen, für die Klasse).

3. Befunde (Ausgewählte Aspekte)

3.1. Korrektur: Mit den Aufgaben werden an die korrigierenden Lehrkräfte landesweit vereinheitlichte, strenge Korrekturrichtlinien mitgeliefert. Diese

Richtlinien ignorieren an einigen Stellen individuelle Zugänge und Lösungsmethoden. Dadurch fixieren sie einen statisch-produkthaften Leistungsbegriff. Wertvolle mathematische Schülerkompetenzen finden daher zum Teil keine Anerkennung. Darüber hinaus gibt es manchmal innerhalb des durch die Korrekturrichtlinien abgesteckten Rahmens problematische Korrekturentscheidungen von Lehrkräften.

3.2. Aufgabenprofil: Für die meisten Aufgaben des Tests ist eine hohe curriculare Validität gegeben. Die Aufgaben prüfen unverzichtbares Basiswissen in mathematischen Kernbereichen der Hauptschule. Das Zielspektrum der Aufgaben ist weit gesteckt. Allerdings gibt es auch wichtige, vor allem prozessbezogene Zielbereiche, die im Test kaum tangiert werden.

3.3. Anforderungsniveau bzw. Niveaustufen: Jeder Aufgabe ist eines der folgenden Anforderungsniveaus zugeordnet: Reproduktion, Reorganisation, Transfer, Problemlösen (manchmal Bündelungen nach Re/Re und Tra/Pro). Die Zuordnung erfolgt auf Grund einer didaktischen Einschätzung, nicht mit Hilfe empirisch gestützter Berechnungen. Bei der Festsetzung der Niveaustufen gibt es allerdings einige Missverständnisse bzw. Fehleinschätzungen, insbesondere auch deshalb, weil die von Schülern jeweils gewählte Lösungsmethode nicht berücksichtigt wird. Das Konstrukt der Niveaustufen ist daher fragwürdig und für eine individuelle Förderung kaum geeignet (siehe auch die entsprechende Diskussion zu PISA-Aufgaben).

3.4. Schwierigkeiten, Defizite, Fehler: Das Profil der Schwierigkeiten und Fehler der Schüler beim Bearbeiten der Aufgaben ist komplex und vielfältig, ebenso wie mögliche Ursachen. Viele Fehler sind "systematisch", d.h. sie beruhen auf einer impliziten subjektiven Logik. Ein hoher Anteil der Fehler wird durch fehlende Lernvoraussetzungen in Basisfeldern erzeugt. Häufungen von Schwierigkeiten und Fehlern gibt es in folgenden Bereichen: geometrische Begriffe bzw. Grundvorstellungen, Größenvorstellungen und Umrechnung von Größen, Grundkompetenzen zu Bruch, Prozent, Proportionalität, Gleichung.

3.5. Individualität, Heterogenität: Bezüglich der Leistungen gibt es enorme Unterschiede zwischen verschiedenen Schülern, verschiedenen Klassen, verschiedenen Schulen. Es gibt eine große Problemgruppe von leistungsschwachen Schülern (ca. 30% mit Note 5 oder 6), aber auch eine Gruppe von leistungsstarken Schülern (ca. 20% mit Note 1 oder 2).

Jahrgangsstufentest 2004 (Jgst. 8)	R-Klasse (Hauptschulabschluss)	M-Klasse (Abschluss Mittlere Reife)
Bayerischer Gesamtschnitt	3,95	2,67
Bester Schulschnitt	2,00	1,39
Schlechtester Schulschnitt	5,59	4,15

3.6. Leistungsschwache Schüler: Es gibt keine einheitliche Charakteristik leistungsschwacher Schüler. Häufige Ursachenfelder sind fachbezogenes Leistungsversagen, Leistungsverweigerung, fehlende Lernvoraussetzungen, fehlende Erfolgserlebnisse, sprachliche Defizite, langsames Lerntempo. Motivationsschwäche, Gleichgültigkeit, Verhaltensunauffälligkeit (introvertiert), Verhaltensauffälligkeit (Störungen), soziale Defizite, Defizite im häuslichen Bereich. Die Förderung der leistungsschwachen Schüler ohne Vernachlässigung des oberen Leistungsbereichs ist eine zentrale Herausforderung für Lehrer und Schulsystem.

3.7. Rechenschwäche: Es ist davon auszugehen, dass unter den leistungsschwachen Schülern der Hauptschule viele Schüler sind, die man in ihrer Grundschulzeit als rechenschwach bezeichnet. Es macht daher Sinn, Befunde zum Profil rechenschwacher Schüler mit einzubeziehen (Symptome, Risikofaktoren).

4. Mögliche Maßnahmen bzw. Konsequenzen

4.1. Maßnahmen zur Förderung leistungsschwacher Schüler (Auswahl): Reduktion von Unterrichtsstörungen; Schaffen von Erfolgserlebnissen; Motivation; Sichern von Basiswissen; Aufbau von Routinen; Kognitive Förderung (Einsicht, Verständnis); Stärkung der Eigenverantwortung; Konzentration der Aufmerksamkeit; Verinnerlichung (mentales visuelles Operieren); Orientierung an Mustern; Strukturierung des Lernprozesses; konstruktiver Umgang mit Fehlern; Öffnung von Lern- und Leistungssituationen; Differenzierung (Unterricht, Prüfungen); Vielfalt von Unterrichtsmethoden; Nutzen von Lernhilfen (Anschauung, Handlungsorientierung); Umgang mit Heterogenität …

4.2. Didaktisch-methodische Grundpositionen: Wirksame Maßnahmen für die Förderung von (leistungsschwachen) Schülern bewegen sich in einem Spannungsfeld zwischen passivistisch-behavioristischen Grundpositionen einerseits und kognitiv-konstruktivistischen Grundpositionen andererseits. Es gilt, eine sinnvolle Balance zu finden zwischen Engführung und Öffnung des Unterrichts, zwischen Routine und Einsicht, Instruktion und Konstruktion. Entscheidungen bei der Förderung müssen differenziert, d.h. themen-, situations- und personenspezifisch getroffen werden.

5. Zentrale Jahrgangsstufentests: pro – contra

5.1. pro: Sichern von Leistungsstandards; Einheitlichkeit von Anforderungen; Evaluation des Bildungssystems; Möglichkeiten für Diagnose und Förderung (Aufgaben, Schüler, Unterricht); Möglichkeit für schulinterne Qualitätsentwicklung (Lehrerfortbildung) …

5.2. contra: Tests alleine sichern noch keine Verbesserungen; Verlust an Individualität und Authentizität durch Außenevaluation; Vernachlässigung unterschiedlicher Lernvoraussetzungen und Lernbedingungen; Vernachlässigung des Lernprozesses durch Produktorientierung; Gefährdung inhaltlich-didaktischer Reformansätze; mangelnde Akzeptanz der Tests; unkritische Testgläubigkeit; Verengung auf das Getestete; ungünstiger Testzeitpunkt …

Heinrich BAUERSFELD, Bielefeld

Probleme besonders befähigter Kinder und ihrer Tutoren

Zur Lage

Seit langem beschäftigt mich die frühe mathematische Förderung dieser Kinder. Sie findet einerseits in einer Reihe von Universitätsprojekten mit Untersuchungen und Entwicklungsarbeiten statt und andererseits in etlichen Schulen pragmatisch organisiert (Bauersfeld & Kießwetter 2005). Die Universitätsprojekte arbeiten mit größeren Fördergruppen, die aus einer entwickelten Selektionsprozedur hervorgehen. In der Grundschulpraxis ist man eher auf die Empfehlung auffälliger Kinder durch Lehrerinnen oder Schulberater angewiesen. Charakteristisch für letztere ist ihre "Gemischtheit." Neben vermutlich "hochbegabten" Kindern (wegen der unsicheren Zuschreibung spreche ich nur von besonders "leistungsfähigen" oder "befähigten") trifft man hier auch auf schnelle Rechner und sprachlich eloquente Kinder mit bescheideneren mathematischen Leistungen. Testergebnisse liegen nur selten vor. Für die Förderarbeit hat das gravierende Konsequenzen: Der Differenzierungsbedarf in den kleinen Gruppen ist größer als man vermuten mag. Entsprechend steigen die Ansprüche an Tutoren und Aufgabenmaterial. Verantwortbare Förderarbeit setzt – und das ist meine These – eine spezifische Ausbildung voraus.

Auf die Dauer kann eine flächendeckend angelegte und rechtzeitige(!) Förderung nur an den Schulen selbst stattfinden. Voraussetzungen und Probleme der Einrichtung einer solchen längst überfälligen Breitenförderung lassen sich bereits in der vorfindbaren und sehr bunten Praxis an Schulen nachweisen:

1. Von einigen Ausnahmen abgesehen gibt es bisher *keine geregelten Studiengänge,* die auf eine fachspezifische Förderarbeit vorbereiten. Eher findet man allgemeine, psychologisch orientierte Veranstaltungen an den Universitäten.

2. Neben den immer noch unzureichend geklärten theoretischen Grundlagen fehlt insbesondere eine kritische Erforschung der *Förderbedürfnisse und der faktischen Förderpraktiken im Vor- und Grundschulalter*.

3. Trotz vieler Versuche und Entwürfe mangelt es noch immer an genügend geeignetem, *erprobtem und zielorientiertem Aufgaben- und Arbeitsmaterial*, mit dem insbesondere die Bedürfnisse der *gemischten Fördergruppen* erfüllt werden können.

4. Schließlich fehlen für eine angemessene *Organisation* die regelnden

(und stützenden) *Rahmenvorgaben* der Schul- und Wissenschaftsministerien. Die harte Diskrepanz zwischen dem öffentlich ständig beschworenen Vorrang von Bildung einerseits und den faktischen Etat-Kürzungen andererseits legt die Vermutung nahe, dass außer den Finanzen auch die Einsicht und der entschiedene politische Wille zur Prioritätensetzung fehlen.

Erfahrungen

Meine Erfahrungen aus den letzten Jahren stammen aus der Arbeit mit verschiedenen Fördergruppen an Grundschulen in Bielefeld und in der Universität. In den Schulen finden die Förderstunden mit Kindern aus dem 2.-4. Schuljahr parallel zum regulären Unterricht statt. (Der entstehende Ausfall wird von den Kindern leicht nachgeholt.) Die kleinen Gruppen entstehen auf Empfehlung der Lehrerinnen und sind daher typisch "gemischte" Gruppen. Leider können nicht einmal interessierte einzelne Lehrerinnen im Interesse einer schulnahen Weiterbildung daran teilnehmen und mitarbeiten.

An der Universität Bielefeld hat sich daneben seit 2004 als Folge der "Kinder-Uni" eine Förderung von besonders befähigten Kindern im Verbund mit einer Tutoren-Ausbildung entwickelt. Das "kids-plus" genannte Projekt folgte dem Elternwunsch nach längerfristiger Förderung. Der Zugang folgt einem Antrag der Eltern, gestützt von einem Gutachten der Grundschule und meist einem Einzel-IQ-Test. Die Förderstunden finden in der Semesterzeit nachmittags in der Universität statt. Am ersten Versuch im SS beteiligten sich Kollegen aus anderen Fakultäten als Tutoren für Philosophie, Physik und Sprache (Mathematik übernahm der Autor). Trotz überaus ermutigender Erfahrungen erwies sich eine Fortsetzung alsbald wegen Überlastung als unmöglich. Nach einem Seminar zur Ausbildung von Lehramtsstudenten aller Schultypen als Tutoren im WS 2004/5 und einer Ausschreibung fanden sich einige Studentinnen bereit, im SS 2005 mit den Kindern in Chemie, Mathematik und Philosophie weiter zu arbeiten. Im WS 2005/6 kamen Biologie und Russisch hinzu. Im SS 2006 wird das Unternehmen grundlegend umorganisiert und erweitert. Forschung, Tutorenausbildung und Förderpraxis werden von einem Fachdidaktiker-Team zu einem Projekt verbunden, das auf die Entwicklung von "Modulen" für eine Ergänzung der Lehramtsstudiengänge zielt.

Bemerkungen und Vorschläge zu den skizzierten Problemen

Die Erfahrung mit den Tutoren für verschiedene Fachbereiche hat mich in der Überzeugung bestärkt, dass eine Breitenförderung in der Schule *nur über die gründliche Ausbildung* geeigneter Tutoren und Tutorinnen möglich und wirksam werden kann. Es genügt offenbar nicht, ernsthaft interessierte und fachlich gut ausgebildete Studenten bzw. Postgraduierte nach

wenigen Stunden konzentrierter Einweisung in die Arbeit mit den Kindern zu entlassen. Erforderlich ist ein organisierter und umfassender Studiengang, in dem die Mitarbeit in Fördergruppen den unerlässlichen Praxisanteil stellt. Im Folgenden beschränke ich mich auf die Diskussion von wichtigen Teilen einer künftigen Tutorenausbildung.

1. In den älteren Universitätsprojekten haben die Tutoren vorweg im Studium eine gründliche mathematische und fachdidaktische Ausbildung erfahren samt entsprechenden Praxisbegegnungen und einer längerfristigen Auslese in der Mitarbeit. In der Vorbereitung von Tutoren andernorts gilt es jedoch kaum als Selbstverständlichkeit, dass eine *fachwissenschaftlich wie fachdidaktisch spezifische Ausbildung* und Vertiefung nötig ist, die auf die besonderen mathematischen Leistungen dieser Kinder, auf das Erkennen dieser Besonderheiten und auf eine sinnvolle Förderung vorbereitet.

2. Gerade hochbegabte Kinder sind oft auch *besonders schwierige Kinder*. Nicht wenige von ihnen kommen mit ihrer Umgebung *und* mit sich selbst nicht zurecht, was leicht übersehen wird. Im normalen Unterricht fallen sie dann eher durch ständig störendes Verhalten auf als durch ihre besonderen Leistungen. Sie können sorgfältig geplante "Hinführungen" mit demselben Durchblick platzen lassen, der sie in anderen Situationen dazu drängt, sich in jede Diskussion ungefragt einmischen. Ich erlebe immer wieder, dass sich Lehrerinnen dafür bedanken, wenn man ihnen diese "Problemkinder" für eine Stunde "abnimmt". Eine gründlichere Vorbereitung auf *die menschlichen Probleme dieser Kinder* ist unabweisbar nötig.

3. Die *großen individuellen Unterschiede* zwischen den besonders befähigten Kindern werden in der üblichen Lehrerausbildung kaum als Problem thematisiert. Neben den Auffälligen, die sich in Vordergrund drängen, gibt es die stillen Eigenbrötler, die Resignierten und die hochreflektierenden Kinder (vgl. Radatz 1974), die selten etwas sagen, aber nicht übersehen werden sollten, wenn es um ihre Identifikation und die Förderung ihrer Möglichkeiten geht. Für diese Kinder hat die intellektuelle Herausforderung oft mehr Gewicht als bloße Wärme. Für unsere vorwiegend auf die Probleme lernschwacher Kinder hin orientierten Lehrerstudenten sind das Schwierigkeiten, die bereits in der Ausbildung angegangen werden müssen.

4. Als *spezifisches Aufgabenmaterial* braucht man "Problemfelder", die nicht durch einen einfachen Antwortsatz zu erledigen sind, sondern sich für ein verzweigendes Mathematisieren öffnen und gleichzeitig allen beteiligten Kindern Zugang, Anregung und Erfolge ermöglichen. Das hat geduldige Zurückhaltung bei den Tutoren zur Voraussetzung, ein Unterdrücken des "Belehrungsdranges." Es erfordert aber auch gründliche mathematische und didaktische Vorbereitungen auf Verzweigungen und Varianten. Dies

auch wegen der nützlichen Diagnosen, die sich aus den unterschiedlichen Bearbeitungsqualitäten und Eindringtiefen analysieren lassen.

5. Besonders leistungsfähige Kinder *denken zwar schnell, sprechen aber keineswegs stets so*. Da wir allzu leicht den Tiefgang eines schnellen und perfekten Sprechens überschätzen, liegt das Unterschätzen eines schnellen effektiven Handelns nahe, wenn es nicht übersehen wird. Gerade in Mathematik aber fallen verbale Erklärungsversuche bei den Kindern eher stotternd und knapp aus, z. B.: "Das sieht man doch!" Wenn die Tutoren sicherer werden sollen im Entscheiden zwischen Können und bloßer Reproduktion von erworbenem Wissen, bedarf das der Vorbereitung, eingeschlossen die Selbstreflexion der Tutoren, als stete konstruktive Kritik der Gewohnheiten des Eingreifens, des Erklärens und der Anregung von Varianten.

6. Die gängige Lehrerausbildung wendet der *Gestaltung von Einführungen und dem Veranschaulichen* besondere Aufmerksamkeit zu, kaum jedoch den Unterschieden bei den besonders befähigten Kindern. Die Fallstudien von Grassmann, Nolte und Käpnick liefern dazu aufschlussreiche Einsichten (Bauersfeld & Kießwetter 2005, S.92-122). Die deutlich gewordene Unmöglichkeit von "besten" oder auch nur "bewährten" Veranschaulichungen kompliziert die Arbeit der Tutoren und die Ansprüche an ihre didaktische Flexibilität weiterhin. Hinzu kommt, dass die Kinder spontan Assoziationen und Modelle aus ihrer individuellen Alltagserfahrung beziehen. Diese Kinder finden auch eine andere Seite des Belehrungs-Impetus wenig motivierend: Das Häppchenangebot von schrittweisen Einführungen. Es muss etwas Überraschendes oder Herausforderndes zu entdecken bleiben. Selbst in gemischten Fördergruppen kann eine leichte Überforderung eher anregend wirken und aufschlussreiche Nachfragen auslösen.

Probleme der dargestellten Art werden am effektivsten in einem Verbund von Forschung, praktischer Förderarbeit und der Entwicklung von geeigneten Organisationsformen, von Arbeitsmaterial und Auswahlverfahren bearbeitet. Die Universitäten sollten mit der Entwicklung geeigneter Zusatzstudiengänge hier wesentliche Vorarbeiten leisten und mit den Erfolgen Druck auf eine allgemeinere Umsetzung ausüben, – letztlich zum Vorteil der betroffenen Kinder.

P. S. Die ungekürzte Fassung mit Fallbeispielen und erweiterten Literaturhinweisen erscheint voraussichtlich in "mathematica didactica."

Bauersfeld, H. (2006): Partnerarbeit mit kleinen Mathe-Profis – 100 Aufgaben für die Partner- und Einzelarbeit im 2,-5. Schuljahr.. Köln: Aulis Verlag Deubner, i.Dr.

Bauersfeld, H. & Kießwetter, K. (Hrsg., 2005): Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? Offenburg, Mildenberger

Radatz, H. (1976): Individuum und Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel

Astrid BECKMANN, Schwäbisch Gmünd

Nicht-lineare Funktionen in der Hauptschule

1 Situation in der Hauptschule

Die Ergebnisse der internationalen Vergleichstudien legen nahe, sich besonders um die Förderung der Hauptschüler und Hauptschülerinnen zu kümmern. Nach den Ergebnissen von PISA 2003 erreichte nicht einmal jeder fünfte von ihnen die erste Kompetenzstufe und während sich fast ein Viertel der Realschüler und Realschülerinnen auf Kompetenzstufe 4 befinden, trifft dies auf nicht einmal 5% der Hauptschülerinnen und Hauptschüler zu. Aufgaben auf der Kompetenzstufe 4 erfordern insbesondere, „auch in weniger vertrauten funktionalen Kontexten zu argumentieren und diese Argumente auch mitzuteilen sowie mit gegebenen linearen Modellen von Realsituationen umzugehen“ (PISA 2004, S. 56).

Es fragt sich, wie Hauptschüler und Hauptschülerinnen bei ihrem Lernen unterstützt werden können, um die Kompetenzstufe 4 leichter und erfolgreicher zu erreichen.

2 Zur Bedeutung nicht-linearer Funktionen

> These:
> Für das Erreichen der Kompetenzstufe 4 ist der Umgang mit *nicht-linearen* Funktionen förderlich.

Für diese These spricht, dass bisher in der Hauptschule vorwiegend lineare Funktionen behandelt werden bzw. deren Behandlung im Vergleich zu anderen Funktionstypen einen großen Raum einnimmt. Damit werden funktionale Zusammenhänge vorwiegend als linear erfahren. Dies kann zu einem eingeschränkten Bild führen und funktionales Denken scheinbar überflüssig machen. Denn beispielsweise kann die Überbetonung linearer Funktionen zu der Annahme verleiten, dass jeder funktionale Zusammenhang durch eine Gerade beschrieben werden kann. Dass Schülerinnen und Schüler vielfach entsprechend denken, zeigen die Erfahrungen aus Schulprojekten. Fordert man sie auf, zum Beispiel den Zusammenhang zwischen Luftvolumen und Druck grafisch darzustellen, zeichnen sie automatisch eine Gerade mit positiver Steigung, obwohl der Zusammenhang antiproportional ist. Weiterhin kann durch ein Übergewicht linearer Funktionen die Vermutung unterstützt werden, dass bereits zwei Punkte genügen, um den Graphen einer Funktion festzulegen. Auch dies wurde zum Teil in Schul-

projekten beobachtet, indem kubische Funktionen voreilig durch eine Gerade interpretiert wurden. Gerade hieran zeigt sich, dass erst das Arbeiten mit unterschiedlichen Funktionstypen ein flexibleres Denken erfordert. Es ist nicht von vornherein klar, wie der Graph weiter verläuft, welcher Funktionswert zu einem bestimmten x gehört usw.. Nicht-lineare Funktionen erfordern das Denken in Veränderungen und Abhängigkeiten und sprechen damit den Kovariationsaspekt des Funktionsbegriffs (Malle 2000, DeMorois&Tall 1996) in besonderer Weise an.

Allerdings können nicht-lineare Funktionen komplex und oft auch nur schwierig algebraisch beschreibbar sein. Beispielsweise nimmt die Beleuchtungsstärke quadratisch mit dem Abstand von der Lichtquelle ab. In der Hauptschule sollten die Funktionsterme daher nicht das Ziel sein, sondern die funktionalen Zusammenhänge mit ihren Abhängigkeiten und Änderungen.

3 Das Schulprojekt

Im November 2006 fand eine erste Erprobung der Behandlung nicht-linearer Funktionen in einer Hauptschule[1] im Ostalbkreis/ Baden-Württemberg statt. In verschiedenen Stationen erfuhren die Schüler und Schülerinnen einer 9. Klasse nicht-lineare funktionale Zusammenhänge in experimentellen Aktivitäten. Die Schüler und Schülerinnen waren das Experimentieren bereits gewöhnt. Ende der 8. Klasse wurde bereits ein Durchgang mit nur linearen Funktionen durchgeführt.

Experimente wurden gewählt, da hiermit bereits weit reichende Erfahrungen in verschiedenen Schulformen vorlagen und auch Vieles für Experimente im Zusammenhang mit Funktionen spricht (Beckmann 2006, 2007): Beim Durchführen von Experimenten werden die inhaltlichen Aspekte des Funktionsbegriffs wie Zuordnungs- und Kovariationsaspekt handelnd erfahren (vgl. auch Vollrath 1978, Dubinsky&Harel 1992).

Im Schulprojekt wurden die Experimente zusammen mit Arbeitsblättern eingesetzt. Dabei stellten sich die zum Teil auch kleinschrittigen Arbeitsblätter als sehr hilfreich heraus, um bestimmte Gedankengänge bei den Schülern und Schülerinnen anzuregen, die dann in der Abschlusspräsentation noch einmal vertieft werden konnten. Wesentliche Aspekte des Arbeitsblatts sind die Hypothesenbildung, der Zuordnungs- und Kovariationsaspekt und der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen.

[1] Johann-Sebastian-Drey-Schule in Ellwangen-Röhlingen, Mathematiklehrer Herr Arthur Litz

Für das Schulprojekt wurden in Absprache mit dem Mathematiklehrer sechs Experimente zu quadratischen, antiproportionalen und weiteren Funktionen aus einer vorhandenen großen Sammlung (Beckmann 2006) ausgewählt. Die Durchführung der Experimente erstreckte sich über zwei Doppelstunden, in denen die Schüler und Schülerinnen zwei bis drei Experimente durchführten. Die Einteilung der Gruppen erfolgte hier durch den Mathematiklehrer. Vor den Experimenten fand eine kurze Einführung statt, die sich auch auf die Zeichnungen im Koordinatensystem bezog.

4 Beobachtungen und Ergebnisse

Der Ablauf des Unterrichts wurde in weiten Teilen mit Film- und Tonaufnahmen dokumentiert. Darüber hinaus wurden einzelne Episoden auch mitprotokolliert und die ausgefüllten Arbeitsblätter ausgewertet. In der Auswertung zeigte sich, dass durch die experimentellen Aktivitäten mit den nicht-linearen Zusammenhängen bestimmte Aspekte im Hinblick auf das funktionale Denken angesprochen werden. Der Unterschied zu (oft erwarteten) einfachen proportionalen Zusammenhängen und die fehlende Voraussagbarkeit weiterer Messwerte regten immer wieder Diskussionen an. Dabei wurden auch Ideen der Kovariation erfahren und genutzt sowie erkannt, dass zwei Messwerte noch keine gesicherte Aussage über den Zusammenhang zulassen.

Der folgende abschließende Erfahrungsbericht eines Schülers zeigt, dass eine Auseinandersetzung mit Zuordnung und Kovariation stattgefunden hat:

> „Das zweite Projekt nannten wir ´Licht und Tunnel`. Je weiter das Auto in den Tunnel fährt, desto dunkler wird es. Die erste Rolle hatte eine Länge von 9,7 cm. Als wir sie mit einer Seite ans Fenster hielten, betrug die Helligkeit sehr gute 36 Lux. Als wir ein Papprohr mit einer Länge von 30 cm ans Fenster hielten, konnten wir nur noch eine Helligkeit von 0,1 lux. An einem extra hierfür gezeichneten Schaubild konnten wir genau ablesen, wie viel Helligkeit zu Anfang des Tunnels herrscht, und wie die Helligkeit immer mehr abnimmt.“

5 Zusammenfassung und Perspektive

Es wird die These vertreten, dass die Behandlung nicht-linearer Funktionen das flexible funktionale Denken, das Denken in Zuordnungen, Abhängigkeiten und Veränderungen unterstützt. Dieses Denken ist eine Vorausset-

zung für den Erwerb von Kompetenz auf der Kompetenzstufe 4, die nur wenige Hauptschüler und Hauptschülerinnen erreichen. Einen Zugang zu nicht-linearen Funktionen bieten einfache Experimente. In Experimenten können Aspekte des Funktionsbegriffs direkt erfahren und erlebt werden.

In einer unterrichtlichen Erprobung in einer Hauptschulklasse wurden Neuntklässlerinnen und Neuntklässler mit nicht-linearen Zusammenhängen in Experimenten konfrontiert. Deutlich wurde, dass die Nicht-Linearität Diskussionen über Abhängigkeiten und den Verlauf des Graphen anregte. Möglicherweise spielten hier die Erfahrungen aus einem ersten Durchlauf eine Rolle, in dem die Schülerinnen und Schüler nur lineare Zusammenhänge erfahren hatten. Insgesamt erwiesen sich die Arbeitsblätter mit zum Teil klaren eingegrenzten Fragen, der einleitende Alltagsimpuls sowie die Abschlusspräsentation mit kritischer Diskussion im Klassenverbund als wichtige Grundlage für eine fruchtbare Auseinandersetzung mit funktionalen Zusammenhängen. Eine gewisse Schwierigkeit stellt die Neigung vieler Schüler und Schülerinnen zu geradlinigen Punktverbindungen im Koordinatensystem dar, die aber durch entsprechende Gespräche oder anfängliche Klärung abzuwenden ist.

Inwieweit die Experimentiererfahrungen mit nicht-linearen Funktionen tatsächlich einen Erfolg im Hinblick auf Kompetenzstufe 4 führen, lässt sich aus dieser Einzelerprobung noch nicht zuverlässig ableiten. Die Erprobung zeigt aber, dass nicht-lineare Funktionen sich durchaus als Thema für eine 9. Hauptschulklasse empfehlen; sie setzt positive Erwartungen.

6 Literatur

Beckmann, A. (2006): Experimente zum Funktionsbegriffserwerb im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und Anfang der Sekundarstufe II, beim Verlag

Beckmann, A. (2007). Funktionsbegriffserwerb durch Experimente. Erscheint in: ML 2007

DeMorois, PH.& Tall, D. (1996). Facets and Layers of the Function Concept. Puig, L., Gutierrez, A. (Hg.): 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education (PME 20), proceedings vol. 2, 297-304

Dubinsky, E. & Harel, G. (Ed.). The Concept of Function. Aspects of Epistomology and Pedagogy. Mathematical. Ass. of America.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. Mathematik lehren 103, 8-11

PISA-Konsortium (Hg.): PISA 2003, Der Bildungsstand der jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs, Münster (Waxmann)

Vollrath, H.-J. (1978). Schülerversuche zum Funktionsbegriff. Der Mathematikunterricht 4, 90-101

Astrid BEGEHR, Berlin

„Reden ist Silber, Schweigen ist Gold!“ – Eine videobasierte Analyse von TIMSS- und LPS-Daten

Wenn Lehrer* auf Schüleräußerungen reagieren und sie korrigieren, ergänzen oder neu fokussieren, wollen sie in erster Linie die Schüler darin unterstützen, sich erfolgreich, konstruktiv und selbstständig mit dem Inhalt auseinander zu setzen. Es geschieht aber häufig auch das Gegenteil: Den Schülern wird die Möglichkeit genommen, sich durch eigenständige Verbalisierung, Konstruktion und Argumentation den Unterrichtsinhalt anzueignen und ihn zu reflektieren.

Eine Analyse

Die nachfolgende Untersuchung basiert auf Daten von 100 Einzel-Unterrichtsstunden der Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) und zehn konsekutiven Unterrichtsstunden aus der Learners’ Perspective Study (LPS) deutscher achter Klassen. Anhand exemplarisch dargestellter quantitativer und qualitativer Auswertungen werden die Möglichkeiten zur aktiven Partizipation der Lernenden im Mathematikunterricht herausgearbeitet und interpretiert.

Die Transkripte geben Aufschluss über die Anzahl der Äußerungen verschiedener Schüler und zeigen die Abfolge der Äußerungen von Schülern und Lehrer an. Die in Transkriptzeilen gemessenen Sprechanteile lassen erkennen, in welchem Maße sich die Schüler im Verhältnis zum Lehrer verbal in den Unterricht einzubringen vermögen. Die Länge der jeweiligen Einzeläußerungen ist gleichzeitig Indikator dafür, wie viel Zeit den Schülern zur verbalen Äußerung zur Verfügung gestellt wird.

Die Untersuchung der Daten der TIMS-Studie als einer proportional nach Bundesländern und Schulformen geschichteten Schülerstichprobe (Stigler; Gonzales; et al., 1999, 10-11) ergab, dass im Mathematikunterricht achter Klassen in Deutschland der Sprechanteil der Schüler im klassenöffentlichen Unterricht im Vergleich zu dem des Lehrers bei ungefähr eins zu drei liegt (Begehr, 2004, 144-146). Dieser Wert wird hier mit der ermittelten

---

* Die Begriffe „Lehrer“ und „Schüler“ werden sowohl für die weiblichen als auch die männlichen Lehrer bzw. Schüler verwendet. Einerseits um die Übersichtlichkeit und Verständlichkeit der Ausführungen nicht zu beinträchtigen, weil konsequenter Weise anderenfalls auch die „Schülerpartizipation“, u. a. ebenfalls als „Schülerinnenpartizipation und Schülerpartizipation“ bezeichnet werden müsste. Andererseits und hauptsächlich, weil auch die Verwendung der Bezeichnung „Schülerinnen und Schüler“ zu einer „Konstitution der Welt als zweigeschlechtliche beiträgt“ (Jungwirth, 2004, 87).

verbalen Aktivität der deutschen Achtklässler des LPS-Projekts verglichen. Da in LPS die Unterrichtsrealität über einen längeren Zeitraum abgebildet wird, weil zehn konsekutive, aufeinander aufbauende Unterrichtsstunden einer Unterrichtseinheit untersucht werden, kann davon ausgegangen werden, dass hier die Lernenden deutlicher „sichtbar“ werden und ihre Äußerungen besser berücksichtigt werden können.

Verbale Aktionen im Mathematikunterricht

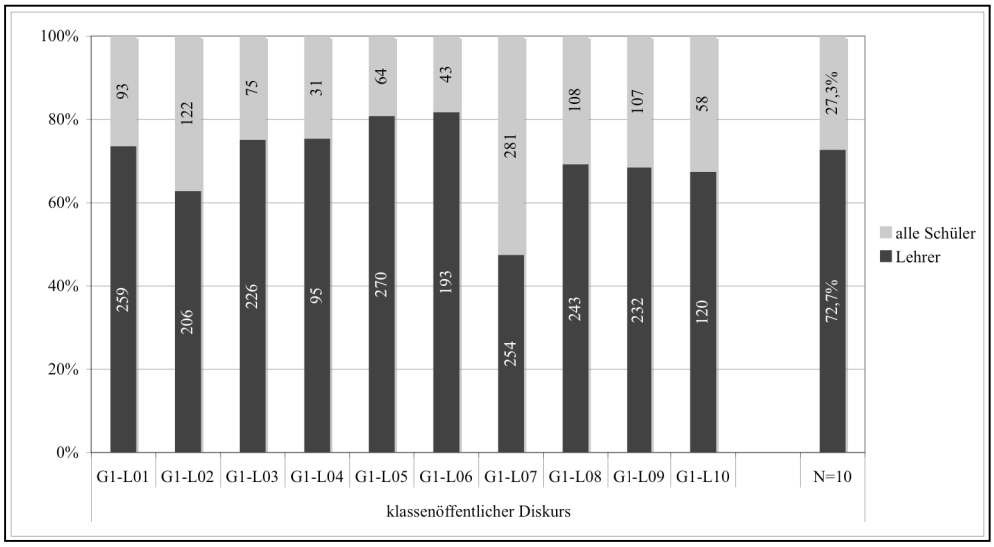


Abbildung: Verteilung der verbalen Redebeiträge zehn konsekutiver, aufeinander aufbauender Unterrichtsstunden einer Unterrichtseinheit (G1).

Die erste abgebildete Unterrichtsstunde (G1-L01) ist die 21. von 30 Mathematikstunden der Einheit zum Thema „Ganzrationale Terme und ihre Umformung“. Innerhalb der ersten 28 Minuten der Unterrichtsstunde werden acht Aufgaben bearbeitet, die der Lehrer an der Tafel notiert hat. Die Schüler bearbeiten die ganzrationalen Terme selbstständig, während der Lehrer zwischen den Tischen umher geht und Einzelgespräche führt. Die letzten elf Minuten verwendet der Lehrer für den Abgleich der Aufgaben.

Obwohl der Lehrer im Lehrerfragebogen angibt, dass es sich um eine reine Wiederholungsstunde handelt, sein wichtigstes Ziel also die Rekapitulation des Wissens durch die Schüler sei, und er außerdem erklärt, seine Intention der ganzem Einheit sei die Entwicklung der umfassenden Sicherheit bei der Umformung algebraischer Terme, erlaubt er seinen Schülern nicht, ihre zuvor einzeln und/oder mit ihren Mitschülern erarbeiteten Ergebnisse selbstständig zu präsentieren und ihre Lösungen zu begründen. Eine Erklärung dafür ist nicht expliziert worden, vermutlich traut er den Schülern das eigenverantwortliche Präsentieren von Arbeitsergebnissen nicht zu oder hält dies nicht für einen zusätzlichen Gewinn in der Wissensaneignung. Die Schüler haben keine Möglichkeit, im Anschluss an die eigenständige Bear-

beitung der Aufgaben ihr mathematisches Vorgehen zu erläutern und ihre mathematischen Gedankengänge zu artikulieren.

Die Unterrichtsstunde entspricht in der quantitativen Analyse den Werten der Sprechanteile von Schülern und Lehrer der TIMSS-Stunden. Er liegt bei eins zu drei und repräsentiert gleichzeitig den durchschnittlichen Wert aller zehn LPS-Unterrichtsstunden. Während alle in der Klassenöffentlichkeit hörbaren Äußerungen sämtlicher Schüler der Klasse (G1-L01) insgesamt 93 Transkriptzeilen belegen, umfassen die Äußerungen des Lehrers 259 Transkriptzeilen.

Wird durch das numerische Ergebnis auf den ersten Blick der Eindruck einer eingeschränkten Schülerbeteiligung vermittelt, ergibt die nähere Betrachtung der Schülerbeiträge eine aktive Beteiligung: Vierundzwanzig der sechsundzwanzig anwesenden und mit ihren mündlichen Beiträgen zuordenbaren Schüler nahmen aktiv am Unterrichtsgespräch teil. Berücksichtigt man, dass die Schüler sich unterschiedlich häufig zu Wort melden – nämlich zwischen ein- und fünfzehnmal (durchschnittlich stammen vier Äußerungen von einem Schüler) – erhält man den Eindruck einer hohen Schülerpartizipation.

Diese Bewertung wird dadurch revidiert, dass der Lehrer in der Stunde 135 Mal das Wort ergreift. Die gemessenen Lehreräußerungen sind sowohl Teil des klassenöffentlichen als auch des nicht-klassenöffentlichen Unterrichtsgesprächs. Nur zwei Schüler der aufgezeichneten Unterrichtsstunde konnten über das aufgestellte Mikrophon genau so gut gehört werden wie der Lehrer, so dass einige Schüleräußerungen aus dem nicht-klassenöffentlichen Diskurs bei der quantitativen Auswertung nicht berücksichtigt wurden.

Vergleicht man aber die Sprechanteile der mit Mikrophonen ausgestatteten Redner (d. h. des Lehrers und der zwei Fokusschüler Felix und Torsten), zeigt sich: Die gezählten 135 Äußerungen des Lehrers umfassen insgesamt 325 Transkriptzeilen, wovon 259 Transkriptzeilen im klassenöffentlichen und 67 Transkriptzeilen im nicht-öffentlichen Diskurs erfolgen; die insgesamt 26 Äußerungen von Felix und Torsten, mit 16 im klassenöffentlichen und zehn im nicht-öffentlichen Unterricht, umfassen elf Transkriptzeilen (klassenöffentlich) bzw. sieben Transkriptzeilen (nicht-klassenöffentlich).

Den größten Sprechanteil des gesamten Unterrichtsgesprächs hat ein einziger Sprecher, der Lehrer, der kleinere Sprechanteil des gesamten Unterrichtsgesprächs ist die Summe aller Äußerungen der Schüler der gesamten Klasse. Ein Vergleich der Sprachanteile einzelner Sprecher – also die des

Lehrers mit denen eines einzelnen Schülers – ergibt eine sehr viel größere Differenz.

Schlussfolgerung

Lehrer tendieren mit ihren Sprechbeiträgen dazu, die Redeanteile der Schüler zu unterdrücken, ohne dass ihnen das bewusst zu werden scheint. Für die Aneignung mathematischer Inhalte ist es wichtig, dass eigene Gedanken der Schüler und die Möglichkeit ihrer öffentlichen Artikulation nicht durch ständige verbale Anleitungen der Lehrer gehemmt werden. Zwar ist das Reden der Lehrer im Unterricht „silber“, das Schweigen dann aber „gold“, wenn es eigene sprachliche Aktivitäten und inhaltliches Verständnis der Schüler fördert. Im Rahmen der Lehrerausbildung und -fortbildung erscheint es daher notwendig, die Lehrenden mit einigen ihrer videographierten Unterrichtsstunden zu konfrontieren, um ein Problembewusstsein dafür zu entwickeln. Gerade das von Freudenthal (1991, 45-66) geforderte „Nacherfinden“ der mathematischen Inhalte als der notwendigen Voraussetzung des Mathematiklernens gelingt nicht, wenn die Schüler keine Gelegenheit erhalten, den Gesamtzusammenhang des mathematischen Inhalts zu artikulieren. Schülerbeiträge werden durch den Lehrer regelmäßig unmittelbar kontrolliert bzw. korrigiert. Die Schüler werden zu eng geführt. Sie erhalten keine Gelegenheit die eigene Auseinandersetzung mit dem mathematischen Thema zu wagen und diese mit eigenen sprachlichen Mitteln darzustellen bzw. äußern zu dürfen. Eine mögliche Korrektur durch Mitschüler kann herausfordernder sein als die Korrektur durch den Lehrer.

Literatur

Begehr, Astrid (2004). Teilnahme und Teilhabe am Mathematikunterricht: Eine Analyse von Schülerpartizipation. Berlin: Freie Universität Berlin.

Begehr, Astrid (in press). Students’ Verbal Actions in German Math Classes. In David Clarke, Christine Keitel & Yoshinori Shimizu (Hrsg.) Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider’s Perspective, Taipei: Sense Publishers.

Freudenthal, Hans: Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Dordrecht: Kluwer, 1991.

Jungwirth, Helga: „Veränderung und Reproduktion des Gewöhnlichen: Lehrerpraktiken in Neuerungskontexten“. In Journal für Mathematik-Didaktik, Heft 2, Jahrgang 25, 2004, 87-111.

Stigler, James W.; Gonzales, Patrick; Kawanaka, Takako; Knoll, Steffen & Serrano, Ana (1999). The TIMSS Videotape Classroom Study, Methods and Findings from an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States, A Research and Development Report. Washington, D. C.: U. S. Government Printing Office.

Christine BESCHERER, Flensburg

LOGO lebt! - Computer im Mathematikunterricht der Grundschule

Vor über zwanzig Jahren gab es in Deutschland die ersten Versuche mit Grundschulkindern und LOGO im Mathematikunterricht. Damals betonten die Autoren selbst: „Wir halten die Einführung des Computers in der Grundschule derzeit noch für wünschenswert;…“ (Hagenmeyer u. Löthe 1984, S. 16). Inzwischen gehört ein Computerraum oder zumindest eine Computerecke im Klassenzimmer zum Alltag in deutschen Grundschulen. Der Einsatz von Computern in Grundschulen beschränkt sich allerdings weitgehend auf die Nutzung von Lernsoftware z.B. im Rahmen von Frei- oder Stationenarbeit bzw. die Recherche im Internet (vgl. z.B. Staub 2005 oder Grundschulunterricht 2005). Ganz anders ist dies in anderen Ländern, wo die Verwendung von LOGO bzw. Igel-Graphik im Mathematik-unterricht der Grundschule üblich ist (vgl. Clements and Samara 2005).

Um zu zeigen, dass es auch heute noch – oder ganz besonders heute – sinnvoll ist, mit Grundschülern LOGO im Mathematikunterricht zu nutzen, führte ich im Dezember 2004 einen Schulversuch an einer dritten Klasse in Baden-Württemberg durch. Neben dem „Beweis der Machbarkeit“ interessierte mich besonders, ob durch die Verwendung von LOGO-Mikrowelten die Möglichkeit besteht, die Denkprozesse und –strategien der Kinder nachvollziehbar darzustellen.

Wer LOGO kennt, denkt meist sofort an die Igel-Graphik. Obwohl mit LOGO selbstverständlich „normal“ programmiert werden kann (vgl. z.B. Wursthorn 2005), ist für den Einstieg und insbesondere in der Grundschule die Igel-Graphik selbstverständlich.

Durch Kommandos wie `vorwärts 50 (vw 50)` oder `rechts 90 (re 90)` wird ein Zeichenroboter („Igel“ – ein Dreieck auf dem Bildschirm) in der Ebene bewegt. Dieser Igel zieht eine „Spur“ hinter sich her und kann dadurch seinen durchschrittenen Weg markieren. Für Seymour Papert, der um 1970 LOGO speziell für den Einsatz mit Kindern entwickelt hat, „ist LOGO nicht nur eine Computersprache, die es den Kindern ermöglicht, mit Computern zu kommunizieren, sondern eine Lern‑Philosophie, eine Sprache um *‘Mathematik sprechen’* zu lernen.“ (Klaudt 2005, S. 78)

In LOGO können die Kinder „dem Igel etwas beibringen.“ Dabei wird eine Folge von Befehlen mit einem einzigen neuen Namen bezeichnet, unter dem sie dann aufgerufen werden kann. So kann z.B. die Befehlsfolge `wiederhole 2 [vorwärts 50 rechts 90 vorwärts 100 re 90]` zum

neuen Begriff `rechteck` zusammengefasst werden. Diese Programmierarbeit kann interaktiv durchgeführt werden, d. h. die einzelnen Befehle (z.B.: `vw 50`) und Befehlsfolgen (z.B.: `vw 50 re 90 vw 100 re 90`) können vom LOGO - Interpreter direkt ausgeführt und vom Kind jeweils visuell kontrolliert und gegebenenfalls angepasst werden.

In dem Schulversuch wurde, da er in den ersten drei Dezemberwochen stattfand, eine Weihnachts-Mikrowelt gewählt. In einer Doppelstunde zur Einführung in die Igel-Graphik und der Nutzung der Laptops sollten die Kinder zunächst verschiedene Muster und Quadrate mit dem Igel entwickeln.

Drei typische Beispiele zeigt die Abbildung 1

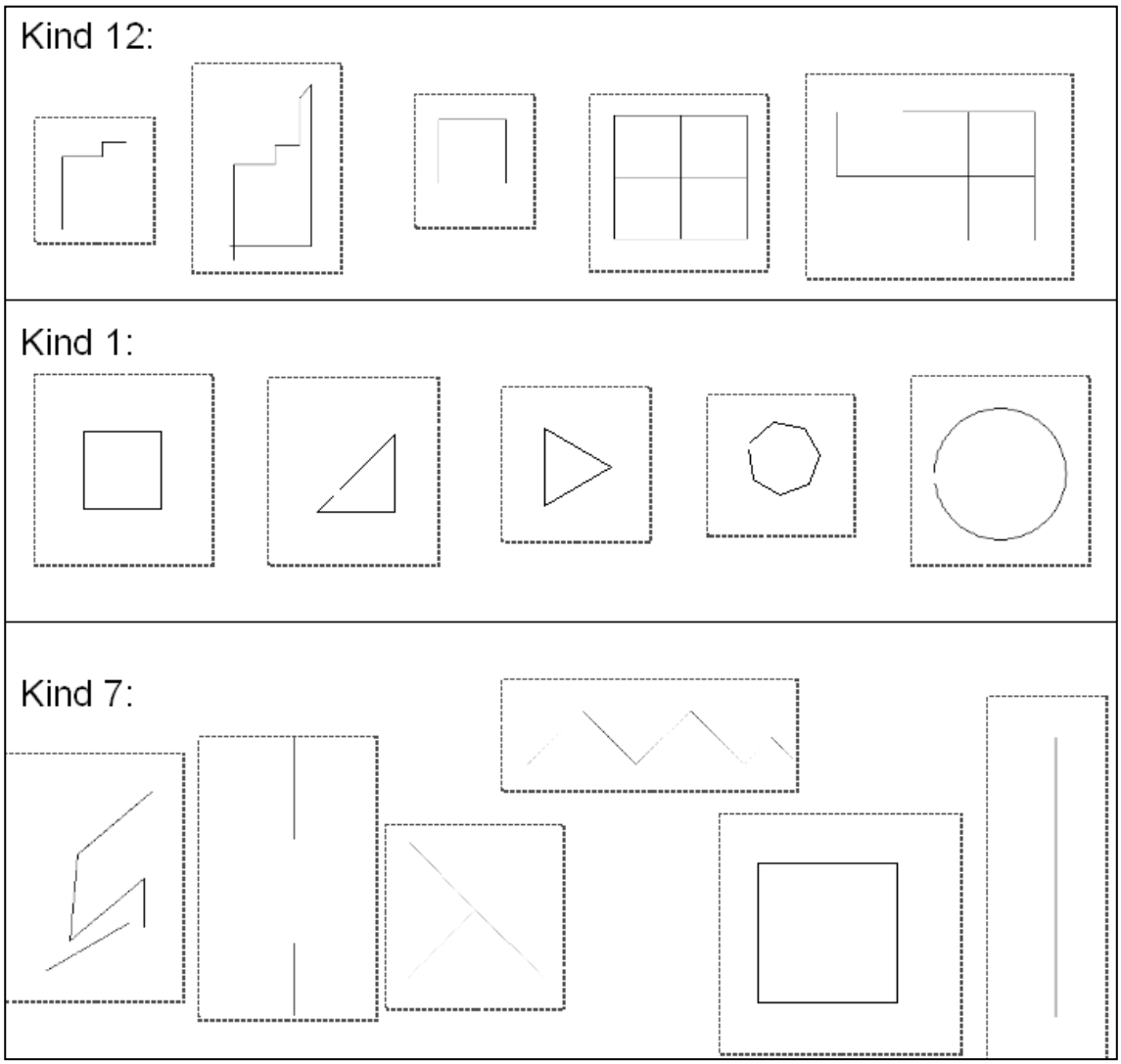


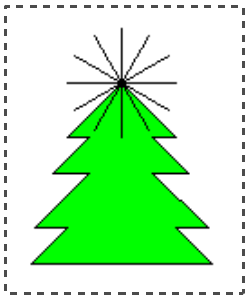
Abbildung 1 Erster Erfahrungen mit dem „Igel“, Muster und Quadrate

Es sind gut drei typische Arten von Bearbeitungen der gestellten Aufgabe zu erkennen:

- Kind 12 wandte sich nach einer kurzen Orientierung dem Quadrat zu und experimentiert mit diesem weiter.
- Kind 1 hat das Konzept des Quadrats (z.B. `vw 100 re 90 vw 100 re 90 vw 100 re 90 vw 100 re 90`) sofort verstanden und experimentiert mit weiteren geometrischen Figuren wie Dreieck und schließlich dem Kreis (hier durch sehr häufiges Wiederholen der Kommandos `vw 3 re 3`, noch ohne den Kreis zu schließen).
- Kind 7 hat noch Probleme mit der Orientierung in der Ebene – so kommt die Zickzack-Linie im vierten Bild durch eine Verwechslung von rechts und links zustande – und bekommt schließlich doch ein Quadrat. Ob im letzten Bild ein größeres Quadrat gezeichnet werden sollte oder ob hier die Rechtsdrehung wieder vergessen wurde, lässt sich nicht entscheiden.

Weihnachtsbilder mit LOGO

Kind 3



```
pr geschenk :g
wh 2[ vw :g re 90 vw :g
re 90]
ende

pr stern :s
wh 12 [ vw :s rw :s
re 30]
ende

pr tobias
tanne 100
malean "grün
stifthoch vw 100 stiftab
stern 30
ende
```

Abbildung 2

In den beiden folgenden Wochen sollten die Kinder jeweils in einer Doppelstunde dem Igel beibringen, ein Weihnachtsbild mit Tannenbaum (Befehl `tanne h`, wobei für h ein geeigneter Wert gewählt werden mussten), verschiedenen Geschenken (selbst erstellte Programme `quadrat` und `rechteck` mit Variablen) sowie verschiedenen Sternen (entweder selbst programmiert oder einen vorgegebenen Stern angepasst) zu „malen“. In der Abbildung 2 ist ein Screenshot mit entsprechendem Programm zu sehen. Es fehlt noch die Integration des `geschenks` in das Weihnachtsbild. In Abbildung 3 ist das Vorgehen beim Platzieren und Anpassen der Variablen für die Größe des Sterns gut zu erkennen.

Fazit

Die Kinder arbeiteten wie erwartet mit Begeisterung, um dem Igel ihr Bild beizubringen. Viele Kinder konnten die Konzepte Winkel (Drehschritte des Igels) und Variable (Größe der Tanne oder des Quadrats/Rechtecks bzw. der Sterne) in der Mikrowelt gezielt umzusetzen. Durch die Speicherung sowohl der Screenshots wie auch der Programme mit Hilfe einer Befehlseingabe (`sichern`) können einfach Erkenntnisse über mehr oder

weniger erfolgreiches Vorgehen bei der Lösung der Aufgaben gewonnen werden. Der Einsatz z.B. einer solchen LOGO-Mikrowelt anstatt der Bearbeitung eines Textdokuments zum Lernen des Umgangs mit Computern ist sicherlich gut geeignet. Weiter lassen sich Verfahren der semi-automatischen Auswertung auf die vorgestellten Aufgabenlösungen anwenden.

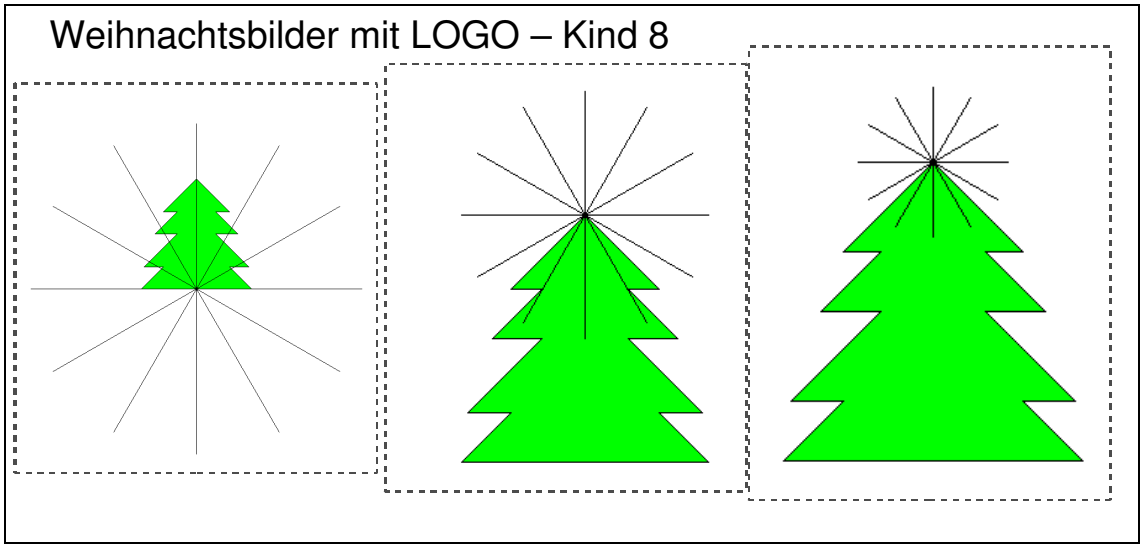


Abbildung 3 Beispiel für den Umgang mit Variablen

Literatur und Links

Clements, Douglas and Sarama, Julie (2005): Young Children and Technology: What's Appropiate? in Masalski, W. and Elliott, P.: Technology-Supported Mathematics Learning Environment, NCTM Yearbook, Reston, VA

Eurologo – Seite mit vielen Links zu Logo: www.eurologo.org/, Zugriff: 1.3.2006

Grundschulunterricht (2005): Sonderheft Neue Medien, 11/2005, Oldenbourg Verlag

Hagenmeyer, Brigitte und Löthe, Herbert (1984): Computer als Werkzeug für Grundschulkinder – eine Pilotstudie in mathematik lehren, Friedrich Verlag, Velber, 7/Dezember 1984, S. 16-18

Klaudt, Dieter (2005): Zahlvorstellung und Operieren am mentalen Zahlenstrahl – Eine Untersuchung im mathematischen Anfangsunterricht zu computergestützten Eigenkonstruktionen mit Hilfe einer LOGO - Umgebung. Dissertation online veröffentlicht http://elib.uni-stuttgart.de/opus/frontdoor.php?source_opus=2501, Zugriff: 1.3.2006

MSW LOGO – deutsche Seite mit vielen Beispielen und Download-Möglichkeit http://193.196.151.129/mathematik/personal/klaudt/logo/frame01.html, Zugriff: 1.3.2006

Staub, Sabine (2005): Computereinsatz im MU einer 2. Klasse, Grundschulunterricht 7-8/2005, Oldenbourg Verlag, München, S. 32-35

Wursthorn, Birgit (2005): Informatische Grundkonzepte in Klasse 5 der Realschule – Entwurf und Evaluation von fächerübergreifendem Unterricht. Unveröffentlichte Dissertation, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

Kathrin BLOCKSDORF, Inge SCHWANK, Osnabrück

Die Osnabrücker Zwergen-Mathe-Olympiade [ZMO]

Die Zwergen-Mathe-Olympiade ist ein seit 2001 jährlich durchgeführter Mathematik-Wettbewerb für die 3. Klassen aus der Stadt und dem Landkreis Osnabrück. Ausgerichtet wird er von Studierenden der Universität Osnabrück unter der Leitung von Inge Schwank. Mit der Durchführung der Olympiade werden mehrere Ziele verfolgt. Die Studierenden sollen während ihrer Studienzeit Einblick in die Situationen an unterschiedlichen Grundschulen erhalten, unmittelbar das Potential der Kinder erfahren und gemeinsam im ZMO-Team die Verantwortung für die Arbeit mit den Kindern und ihren Werken übernehmen. Bei den Kindern gilt es, das Interesse an der Mathematik zu fördern, indem ihnen ein Spielraum zur Entfaltung ihrer mathematischen und kreativen Talente gegeben wird. Die Lehrkräfte sollen Unterstützung erhalten und Anerkennung erfahren dafür, dass sie mit den Kindern ihrer Klassen Bemerkenswertes in ihrem eigenen Mathematikunterricht und teils in Kooperation mit Lehrkräften anderer Unterrichtsfächer (wie Deutsch, Kunst, Werken, Musik, Sport) leisten.

Dieser Mathematik-Wettbewerb ist insoweit ungewöhnlich als er in zwei Runden stattfindet. In der *ersten Runde* sind alle Kinder einer Klasse aufgerufen, gemeinsam einen kreativen Bewerbungsbeitrag zu erstellen, bei dem mathematische Inhalte auf ein bestimmtes Thema angewendet werden sollen. Dieses Thema wechselt jährlich. Beispiele sind: Zirkus (2003), Märchen (2004), Weltall (2005). Von 2001 bis 2005 nahmen aus ca. 350 Klassen von 50 Schulen rund 7700 Mathe-Kreativkinder teil.

Die Bewerbungsbeiträge der Kinder werden jedes Jahr vom ZMO-Team gesichtet, bewertet und für das Internet aufbereitet (http://www.ikm.uos.de/zwergen-mathe-olympiade.html). Die ZMO-web-site umfasste Anfang 2005 ca. 5500 Internetseiten.

In der *zweiten* Runde entsendet jede teilnehmende Klasse ein Mädchen und einen Jungen als Mathevertreterin bzw. Mathevertreter zur sogenannten Mathe-Hirnsportrunde. Die Mathevertretungen aus den Klassen treffen sich dazu an einem Samstag in einer Osnabrücker Grundschule und rechnen, denken und knobeln um die Wette. Bei der Bearbeitung der gestellten Probleme zählt nicht nur die erfolgreiche Lösung sondern auch die Qualität der Begründung der Vorgehensweise.

Alle an der Hirnsportrunde teilnehmenden Kinder werden je nach Leistung mit Bronze-, Silber-, Gold- oder Diamant-Urkunden ausgezeichnet. Den Kindern, die Bronze-Urkunden erhalten, werden ihre Urkunden in ihre Schulen geschickt. Alle anderen treffen sich gemeinsam mit ihren Eltern und teils auch Lehrerkräften zu einer großen Abschlussfeier in der Univer-

sität Osnabrück. Diamant-Urkunden erhalten die jeweils drei besten Mädchen und Jungen. Das erfolgreichste Mädchen und der erfolgreichste Junge einer Runde erhalten zudem je einen der beiden ZMO-Wanderpokale. Insgesamt nahmen von 2001 bis 2005 rund 700 Mathe-Hirnsport-Kinder an der ZMO teil.

Bei der Beschäftigung mit den Aufgabenbearbeitungen der Kinder aus der Hirnsportrunde kann man sich die unterschiedlichsten Fragen stellen. In diesem Beitrag soll exemplarisch vorgestellt werden, wodurch sich Bearbeitungen derjenigen Kinder auszeichnen, die eine Diamant-Urkunde erhalten haben (dies sind die bislang im Wettbewerb 30 leistungsstärksten Kinder). Es zeigt sich, dass ihre Bearbeitungen ein hohes Maß aufweisen an:

- Darstellungsfähigkeit
- Begründungsfähigkeit
- Zahlraumverständnis.

Darstellungsfähigkeit

Den Kindern der Diamantgruppe gelingt es, bei dazu geeigneten Aufgaben sehr angemessene und hilfreiche Skizzen oder Bilder anzufertigen. Abb. 1 zeigt eine Muschel-Umverteilungsaufgabe einschl. der Bearbeitung eines „Diamant“-Mädchen. Das Kind malte hier wahrscheinlich zunächst 26 Muscheln für Pia und 12 für Tom auf, anschließend, dass Pia an Tom nacheinander immer eine Muschel abgibt. Dazu hat es Muscheln auf Pias Seite durchgestrichen, bei Tom neu aufgemalt und das Umverteilen durch Pfeile kenntlich gemacht.

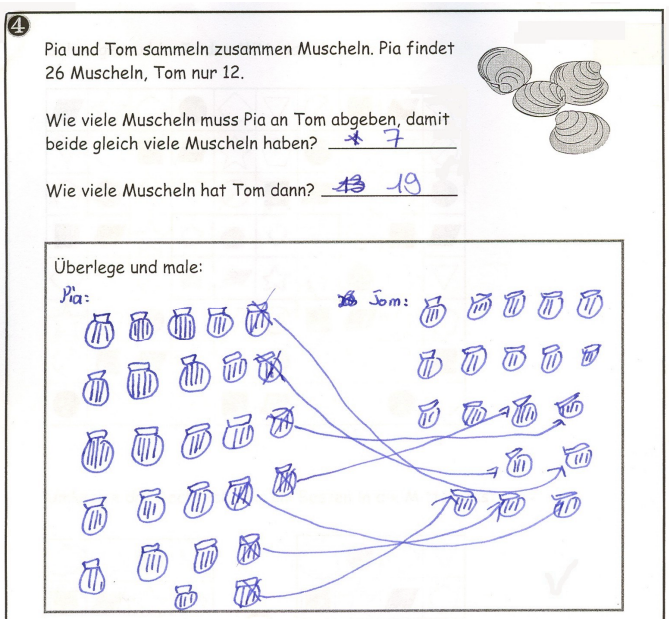


Abb. 1 Beispiel zur Darstellungsfähigkeit

Es wird deutlich, dass sich dieses Mädchen die durch die Problemstellung gegebene Situation sehr gut vorstellen konnte und die eigenen Vorstellungen dazu aufgemalt hat. Es liegt nahe zu vermuten, dass dieses Kind sich die Lösung durch die angefertigte Skizze erschlossen hat.

Begründungsfähigkeit

Die „Diamant“-Kinder sind offenbar sehr gut in der Lage, ihr Vorgehen zu beschreiben, die gegebene Situation wiederzugeben, Vergleiche und ähnliches herzustellen. Zum Problem des Struktur-Wiedererkennens einer bestimmten Rechteck-Anordnung von in zwei Farben gegebenen Quadraten schrieb ein „Diamant“-Mädchen: „*Weil die Plättchen die grau waren, werden weiß und das selbe andersrum. Und das hochkante Bild muss nach links gedreht werden.*“
In dieser Begründung sind alle für eine durchdachte Antwortentscheidung wichtigen Aspekte berücksichtigt. Zunächst wird die Farbumkehr der Plättchen beschrieben, anschließend die Drehung des Rechtecks einschl. der Angabe der Drehrichtung. Es handelt sich also um eine lückenlose und sehr genaue Begründung, bei der beschrieben wird, wie das Vergleichsmuster in das Ausgangsmuster (Nr.3) überführt werden kann.

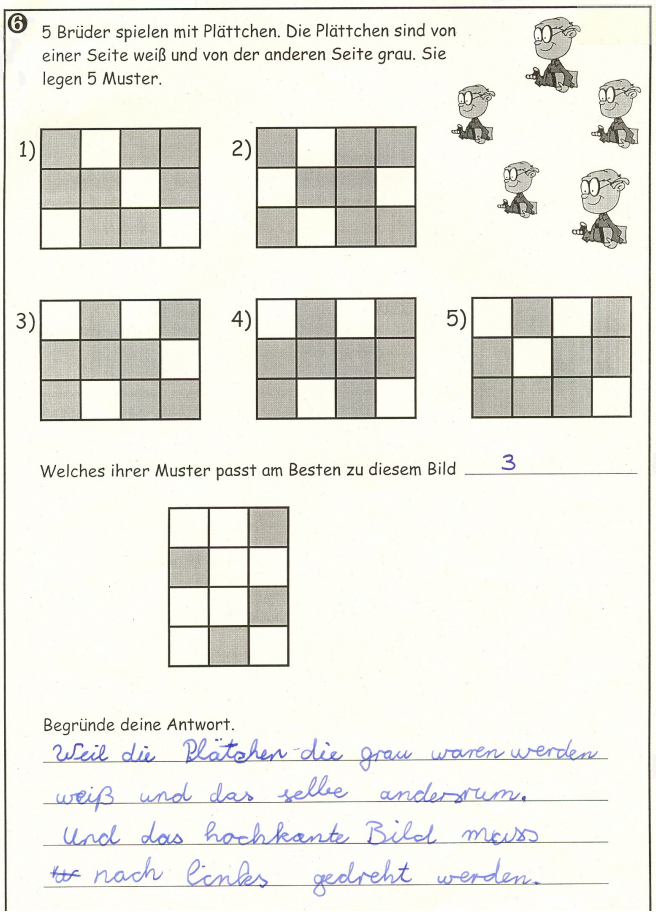


Abb. 2: Beispiel zur Begründungsfähigkeit

Ein „Diamant“-Junge kam zu folgender Begründung: „*Wenn man einen Glastisch hätte und von unten und oben guckt, wären 3) und das Bild gleich.*“
Diese Begründung ist zwar nicht so detailliert vorgenommen und streng genommen fehlt der Aspekt der Lage der Rechtecke. Allerdings kann man an dieser Äußerung sehr schön erkennen, dass es den Kindern der Diamant-Gruppe leicht fällt, sich die Situation etwas umzudenken und so zu sehr treffenden Vergleichen oder Querverbindungen zu gelangen. In diesem Fall hat dieser Junge die Situation auf einen Glastisch projiziert, um so eine schlüssige Erklärung für die umgekehrt weißen bzw. grauen Plättchen zu erhalten.

Zahlraumverständnis

Die Kinder der Diamant-Gruppe verfügen über ein besonderes und vor allem sehr brauchbares und flexibles Zahlraumverständnis. Sie haben eine besondere Fähigkeit, mit den Zahlen zu hantieren, sie geschickt zu verändern und dabei nicht den Blick für Zusammenhänge und übergeordnete Ziele verlieren.

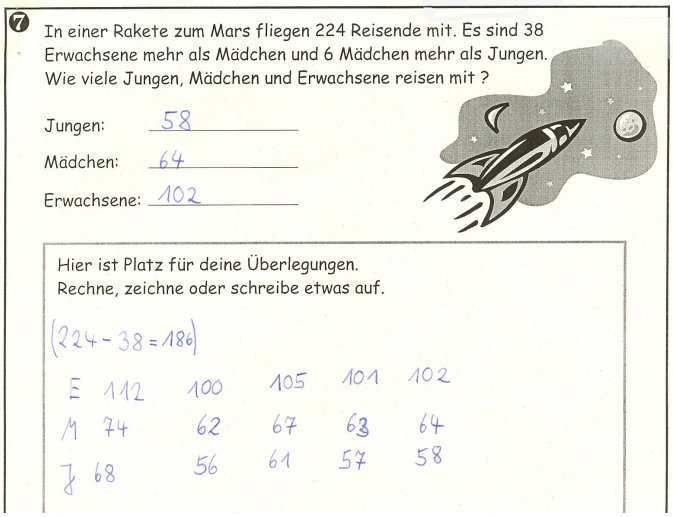


Abb. 3: Beispiel zum Zahlraumverständnis

Im Beispiel schrieb ein „Diamant"-Mädchen zunächst *224-38=186*. Hier erkannte sie, dass sie dieser Ansatz nicht ohne Weiteres zum Ziel führt. Anschließend entwarf sie eine Tabelle mit verschiedenen möglichen Zahlen für die Unterteilung der 224 Reisenden auf Erwachsene [E], Jungen [J] und Mädchen [M]. Von einer geeigneten Startzahl ausgehend (Gruppe der Erwachsenen bildet die Hälfte der Reisenden), die im weiteren Verlauf geschickt nachjustiert wurde, ermittelte sie die sich ergebenden Verteilungen bis sie schließlich die gewünschte Summe erreichte. Auch ohne Formalisierungskenntnisse, sprich eine geeignete Gleichung aufstellen zu können, gelingt dem Mädchen so, die Zahlenzusammenhänge in den Griff zu bekommen. Was wie ein einfaches Ausprobieren erscheinen mag, erweist sich als sehr geschickte und zielgerichtete Vorgehensweise. Insbesondere beim Nachjustieren zeigt sich, wie logisch dieses Mädchen an die Aufgabenstellung herangegangen ist: es hat immer einen geeigneten Schluss aus seiner Rechnung gezogen und ist dabei sehr konsequent vorgegangen.
Man kann vermuten, dass Kindern, denen eine Aufgabenbearbeitung dieser Art gelingt, eine besondere Fähigkeit im funktionalen Denken eigen ist (s. dazu auch: Schwank 2003, 2005).

Literatur

Schwank, I. (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In I. Schwank: ZDM-Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik', 70-78.
Schwank, I. (2005): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. von Aster / J.-H. Lorenz (Hg.), Rechenstörungen bei Kindern. - Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. 93-133. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Claudia BÖTTINGER, Essen

Arithmetische Darstellungen – Punktmusterdarstellungen

Die Fähigkeit zum flexiblen Wechsel zwischen Repräsentationsebenen zur Darstellung mathematischen Wissens ist für das Mathematiklernen von zentraler Bedeutung. Insbesondere ist der Wechsel zwischen bildlich-geometrischen Darstellungen und den klassischen mathematischen Symbolen (wie Ziffern oder Operationszeichen) in den Mathematikbüchern der Grundschule fester Bestandteil. Die dort verwendeten Arbeits- und Anschauungsmittel dienen dazu, Zahlbeziehungen und mathematische Begriffe zu repräsentieren.

In der Folge von Piaget nimmt man an, dass das Denken der Kinder in den Eingangsklassen stark an die Anschauung gebunden ist. Gerade in den unteren Klassen sollen Arbeitsmittel dazu beitragen, mathematische Anschauungsbilder aufzubauen (Lorenz, 1998). Diese Auffassung von Arbeits- und Anschauungsmitteln führt auch dazu, dass sie im Zusammenhang mit Kindern, die Probleme beim Erlernen der arithmetischen Grundlagen haben, sehr intensiv zum Einsatz kommen.

Zu beachten ist jedoch, dass die Funktion von bildlich-geometrischen Darstellungen nicht zu einem rein methodischen Hilfsmittel reduziert wird, um das Lernen (scheinbar) zu erleichtern (Jahnke, 1984). Es ist vielmehr erforderlich, dass jeder Lernende die mathematischen Strukturen, die in einem Material angelegt sind, selbst konstruiert. Dies liegt auch in der Natur der Mathematik, die nicht rein empirisch fassbar ist; sie beschreibt Relationen zwischen Objekten, nicht die Objekte selbst (Steinbring, 2005).

Die Konstruktion mathematischer Strukturen ist keine „Einbahnstraße“ in dem Sinne, dass aus bildlichen Darstellungen mathematische Beziehungen herauszulesen und diese mit Hilfe der Sprache der Mathematik zu beschreiben wären. Ebenso ist es erforderlich, zu einer mathematischen Beziehung – die etwa mit Hilfe standardisierter Zeichen gegeben ist – einen angemessenen Referenzkontext zu konstruieren. Dieser kann dann neu bzw. umgedeutet werden, d. h. es können neue Relationen erkannt werden und somit neue mathematische Einsichten gewonnen werden. Verschiedene Darstellungen ermöglichen immer auch unterschiedliche Interpretationen und Einsichten in ein Problem. Die verschiedenen Repräsentationsarten werden auf diese Weise nicht als Hierarchie verstanden in dem Sinne erst „handelnd“ – dann „bildlich“ – schließlich „symbolisch“. Entscheidend ist der flexible Wechsel von einer Darstellungsform in die andere, und zwar in jede Richtung. Diese Auffassung über die Bedeutung des Wechsels zwischen Repräsentationsebenen ist unabhängig vom Alter der Mathematiktreibenden. Sie vermag auch zu erklären, warum die Fähigkeit

zum Wechsel von Repräsentationsebenen als Begabungsmerkmal angesehen wird (Kießwetter 1988, Käpnick 1998). Er ist mit einem vertieften, facettenreichen Verstehen von Mathematik verbunden.

Für das Verständnis von Mathematik ist es darüber hinaus wichtig, dass das Wechseln von Repräsentationsebenen als sinnvoll erachtet wird. Es muss einsichtig werden, dass in einer anderen Darstellung neue Zusammenhänge deutlich werden, die vorher nicht sichtbar waren. Kinder sind Lernende und müssen in der Regel diese Einsicht erst gewinnen. Das bedeutet ganz praktisch, dass das Wechseln von Darstellungsformen durch übergeordnete Problemstellungen gesteuert werden sollte und nicht als Selbstzweck behandelt wird.

Die Darstellung von mathematischen Beziehungen auf unterschiedliche Weise ist eine anspruchsvolle Aufgabe, die nicht von allen Kindern in gleichem Maße geleistet werden kann. Zu erwarten ist, dass Kinder hier ein Spektrum – abhängig von der Problemstellung – zeigen, ähnlich wie man es von der Strukturierungsfähigkeit kennt (Söbbeke 2005). Dies kann mithilfe von Interviews untersucht werden. Es soll erforscht werden, wodurch der Wechsel der Darstellungen bei Kindern geleitet wird, welche verschiedenen Abstufungen sich beim Wechsel von einer bildlich/geometrischen Darstellung in eine symbolische Darstellung (und umgekehrt) zeigen und welche Unterschiede sich bei Kindern verschiedener Leistungsstärke herausarbeiten lassen.

Das Interviewvorhaben

Die beiden Repräsentationsebenen, die im Interview thematisiert werden sind Punktmuster als bildlich-geometrische Darstellungen und arithmetische Darstellungen (durch die klassischen mathematischen Zeichen wie Ziffern und Operationszeichen) als symbolische Darstellungen. An dieser Stelle soll es in besonderer Weise um die Richtung von der arithmetischen zur geometrischen Darstellung gehen, weil es sich im Rahmen von Probeinterviews herausgestellt hat, dass diese besonders lohnenswert ist. Außerdem wurde die umgekehrte Richtung bereits bei Böttinger (2005) ausreichend thematisiert. Als übergeordnetes Problem fiel die Wahl auf die anschaulichen Beweise (Wittmann, Müller 1997).

Da nicht davon auszugehen ist, dass alle Kinder mit dieser Art von Aufgaben vertraut sind, stellen die folgenden Aufgaben den Einstieg dar:

3+1 =	4+2 =	5+3 =
2+2 =	3+3 =	4+4 =

Der Auftrag für die Kinder besteht darin, die Aufgaben auszurechnen, fortzusetzen und zu erklären, warum übereinander stehende Aufgaben dasselbe Ergebnis haben. Kinder, die auf der Zahlenebene argumentieren, werden aufgefordert, den Beweis auch auf andere Weise mithilfe von Punktmustern durchzuführen. Als Anregung können Punktmuster vorgegeben werden. Im Rahmen von Probeinterviews hat sich herausgestellt, dass nur bei dieser vermeintlich einfachen Aufgabe alle Kinder eine Beweispflicht akzeptiert haben und eine angemessene Beweisidee auf der Zahlenebene angeben konnten. Der Wechsel zum Punktmuster erfolgte in praktisch allen Fällen durch Anregung der Interviewerin – war also nicht durch das Problem „Beweis“ gesteuert. Die vorgeschlagenen Punktmuster für die Aufgabe 3+1 ließen sich gut verallgemeinern und waren tragfähig für die darauf aufbauenden Aufgaben.

In der folgenden Aufgabeserie geht es – bei gleicher Aufgabenstellung – um den Zusammenhang zwischen Additions- und Multiplikationsaufgaben. Sie soll es den Kindern ermöglichen, selbstständig aus den Darstellungen für Additionsaufgaben Darstellungen für Multiplikationsaufgaben herzuleiten:

3+2+1=	4+3+2=	5+4+3=
2 · 3=	3 · 3=	4 · 3=

Bei dieser Aufgabe sind sowohl auf der arithmetischen als auch auf der Punktmusterebene einige Besonderheiten zu beachten:

- Wie wird die Aufgabe 2·3 verstanden? Einige Kinder lesen sie als Abkürzung von 2+2+2, einige als Abkürzung von 3+3. Dieses Problem bleibt bei einer Vertauschung in der Reihenfolge der Faktoren bestehen. Auf der arithmetischen Seite ist zum Beweis der Gleichheit ggf. die Anwendung des Kommutativgesetzes erforderlich. Denkbar sind auch unterschiedliche Beweisverfahren bei den verschiedenen Sichtweisen.
- Auf der Punktmusterseite sind ebenfalls Umdeutungen erforderlich, wie folgende Beispiele zeigen: Das Muster kann sowohl für 3+3 als auch für 2+2+2 stehen. Außerdem kann diese Darstellung für die Aufgabe 3·2 selbstverständlich umgedeutet werden als Muster für die Aufgabe 2·3.

Wenn es darum geht, die Gleichheit der Ergebnisse zu erklären, müssen die Kinder diese verschiedenen Vorstellungen in Einklang bringen. In einem weiteren Schritt muss dann das „Umlegen“ oder „Umdeuten“ von Punkten so erfolgen, dass es symbolischen Charakter bekommt (Steinbring). Es geht nicht nur darum, lokal bei einzelnen Aufgabenpaaren die Gleichheit zu zeigen, sondern darum, diese Gleichheit bei allen Aufgaben zu zeigen – auch bei denen, die nicht mehr aufgeschrieben sind. Die Probeinterviews

weisen darauf hin, dass sich gerade bei dieser Aufgabe das Spektrum von eher empirischer bis eher symbolischer Handlung gut herausarbeiten lässt.

Die dritte Aufgabe stellt eine neue Anforderung dar. Es geht um den Zusammenhang zwischen Multiplikationsaufgaben.

$3 \cdot 3 =$ $4 \cdot 4 =$ $5 \cdot 5 =$
$4 \cdot 2 =$ $5 \cdot 3 =$ $6 \cdot 4 =$

Probleme der Deutung und Darstellung von Multiplikationsaufgaben treten hier in den Hintergrund. In den bisherigen Probeinterviews hat sich gezeigt, dass durch die vorher gehende Aufgabe die Kinder in der Lage waren, sich die Darstellung von Multiplikationsaufgaben herzuleiten. (Anm. Ohne diese Aufgabe war das nicht immer möglich.) Als Symmetriebruch geht es jetzt um die Frage, warum sich die Ergebnisse immer um 1 unterscheiden. Es reicht jetzt nicht mehr zu erklären, wie die unteren Aufgaben aus den oberen entstehen, ein häufig anzutreffendes Argument. Neben der Frage der Darstellung und Umdeutung von Punktmustern geht es hier viel mehr als vorher zusätzlich um die allgemeinere Frage, die für Kinder keineswegs selbstverständlich sind: Was muss überhaupt bewiesen werden? Warum muss man überhaupt begründen, dass verschiedene Aufgaben zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, das ist doch der „Normalfall“. Man kommt auf diese Art zu übergeordneten Fragen nach dem Verständnis von Kindern zur Beweispflicht, die mit untersucht werden sollen.

Literatur

Böttinger, C. (2005): Komponenten beim Wechsel der Repräsentationsebenen, Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim, Franzbecker, 119-122

Jahnke, H. N. (1984): Anschauung und Begründung in der Schulmathematik, Beiträge zum Mathematikunterricht 1984, Bad Salzdetfurth, Franzbecker, 32-41

Käpnick, F. (1998), Mathematisch begabte Kinder, Greifswalder Studien zur Erziehungswissenschaft, Bd. 5, Peter Lang Europäischer Verlag der Wissenschaften, Frankfurt (Main)

Kießwetter, K. (1988), Das Hamburger Modell und sein mathematikdidaktisches Umfeld, in: Das Hamburger Modell zur Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern, Hrsg. K. Kießwetter, Berichte aus der Forschung, Heft 2, Universität Hamburg, FB Erziehungswissenschaft 1988, S. 6-34

Lorenz, J. H. (1998): Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. 2. unveränd. Aufl. Göttingen, Hogrefe

Söbbeke, E. (2005), Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern, Franzbecker, Hildesheim

Steinbring, H. (2005), The Constrution of New Mathematikal Knowledge in Classroom Interaction, Mathematics Education Library, Springer, Berlin, New York

Wittmann, E. Ch., Müller, N. (1997), Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1, Stuttgart, Klett Schulbuchverlag

Peter BORNELEIT, Leipzig

Zur Etablierung der Methodik des Mathematikunterrichts an Universitäten und Hochschulen in der Sowjetischen Besatzungszone (SBZ) 1946-49

Verschiedentlich ist zu lesen, die Didaktik der Mathematik habe sich in den sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts an den deutschen Universitäten und Hochschulen etabliert, verbunden mit der Integration von Pädagogischen Hochschulen in die Universitäten. Tatsächlich aber gehört zur Phase ihrer Etablierung auch die Zeit von 1946 bis 1949.

Man erkennt die Etablierung einer Disziplin daran, dass entsprechende Stellen eingerichtet und auch wieder besetzt werden, wenn ihre Inhaber ausscheiden. In der SBZ und späteren DDR war das für die Mathematikmethodik der Fall. Wie die Tabelle 1 zeigt, gab es bereits 1947/48 in der SBZ Professoren mit vollem Lehrauftrag, Professoren mit Lehrauftrag, außerplanmäßige Professoren, Honorarprofessoren, Dozenten und Lektoren, die für das Lehrgebiet Methodik des Mathematikunterrichts berufen worden waren oder es neben anderen Gebieten vertraten[1]. Hierin spiegelt sich dessen allmähliche Etablierung und die Spezifizierung des Lehrauftrags kann als Gradmesser für sie genommen werden.

Eine wichtige Voraussetzung war, dass zu dieser Zeit schon ein ausreichend ausdifferenziertes, hinreichend spezialisiertes Wissenskorpus über didaktische Aspekte der Mathematik existierte, niedergelegt in Monographien, Lehrbüchern, Unterrichtsratgebern und Zeitschriftenartikeln vorwiegend von in der Praxis tätigen Lehrern. Ihm konnten Lehrinhalte entnommen werden. Freilich bot die Methodik des Mathematikunterrichts kein einheitliches Bild dar, es gab zahlreiche Ansätze nebeneinander und davon viele auf eigene Faust, zudem eine ziemlich deutliche Trennung zwischen Volksschul- und Gymnasialmethodik. Tabelle 2 zeigt einige Vorlesungen mathematikmethodischen Inhalts.

Die akademische Institutionalisierung der Mathematikmethodik erfolgte im Zusammenhang struktureller Eingriffe in die Autonomie der Universität bzw. Hochschulen. Auf Anordnung des Obersten Chefs der Sowjetischen Militäradministration in Deutschland durch den Befehl 205 vom Juli 1946

[1] Mit Ausnahme der Technischen Hochschule Dresden, die 1950 die Lehramtsbildung abgeben musste, gab es in den angeführten Universitäten und Hochschulen wie auch in den später gegründeten Pädagogischen Hochschulen der DDR durchgängig Stellen für Methodik des Mathematikunterrichts.

Universität Jena.:	HEINRICH KEMPINSKY, hon. Prof. für Didaktik
Martin-Luther-Universität Halle.:	HANS FERDINAND OPPENHEIM, Prof., Lehrbeauftragter, Methodik des Mathematik- und Physikunterrichts, KARL PIETZKER, Lektor, Methodik der Mathematik und Physik StR Dr. ANTON LONIUS, Lehrbeauftragter, Methodik des Mathematikunterrichts Dr. phil. FRIEDRICH SCHÖNE, Lektor, Methodik der Unterstufe der Einheitsschule: Deutsch, Rechnen
Universität Rostock.:	Dr. phil. ADALBERT DECKERT, Prof., Methodik des Unterrichts in der Mathematik Rektor OSKAR OCKLITZ, Doz., Didaktik der Unterstufe
Technische Hochschule Dresden.:	OStD Dr. phil. MAX DRAEGER, Prof., Methodik des Mathematikunterrichts und Schulpraxis
Universität Berlin.:	Dr. LUDWIG PETERS, Prof. mit vollem Lehrauftrag für das Fach Schulrecht[2], GEORG MÜLLER, Doz., Unterstufenmethodik ERNST SPEER, Lehrbauftragter, Rechnen
Universität Leipzig.:	Dr. WERNER RENNEBERG, Dr. KARL WERNER, PAUL KUBE, Lektoren, Methodik des Unterrichts in Mathematik, Physik u. Chemie FRITZ BUSCH, OStD OTTO MIERSCH, OTTO LAUTENBACH, Lektoren, Methodik des Elementarunterrichts
Universität Greifswald:	MAX EBNER, Doz., Methodik und Didaktik der Mathematik WILLIBALD HAHN, Doz., Didaktik und Methodik der Unterstufe
Landeshochschule Potsdam	Dr. MARTIN SCHELLENBERGER, Prof., Methodik des Mathematikunterrichts

Tabelle 1: Lehraufträge und Professuren mit Beziehung zur Didaktik der Mathematik an Universitäten und Hochschulen der SBZ 1947/1948[3]

[2] Dr. LUDWIG PETERS lehrte zudem auch Mathematik, die an der Pädagogischen Fakultät eine Elementarmathematik bzw. Schulmathematik war.

[3] Die meisten Universitäten in der SBZ nahmen erst mit dem Sommersemester 1946 ihren Lehrbetrieb wieder auf, die Landeshochschule Potsdam erst im Jahr 1948. Mehrere der aufgeführten Personen wurden im Jahr 1947 berufen.

Uni Jena	KEMPINSKY, HEINRICH: Inhalt und Form des Unterrichts als Erlebnis; Spezielle Didaktik, Der Raumlehreunterricht in der Grundschule; Wesenhafter Rechenunterricht in der Unterstufe. Wintersemester 1947/1948
	KEMPINSKY, HEINRICH: Unterrichtsbilder auf psychologischem und ethischem Grunde; Didaktische Auswertung psychologischer Grundlehren; Landschule, ihr Wesen und ihr Betrieb; Wesenhafter Unterricht in Rechnen und Raumkunde der Grundschule. Sommersemester 1948
Uni Rostock	DECKERT, ADALBERT: Methodik des Unterrichts in der Mathematik: Mittel- und Oberstufe. Sommersemester 1948
	DECKERT, ADALBERT: Schulpraxis in der Mathematik: Mittel- und Oberstufe. Sommersemester 1948
	DECKERT, ADALBERT: Darstellende Geometrie. Sommersemester 1948
Uni Greifswald	EBNER, MAX: Methodik des mathematischen Unterrichts, Mittelstufe, Oberstufe. Sommersemester 1948
	HAHN, WILLIBALD: Rechnen im dritten Schuljahr. Sommersemester 1948

Tabelle 2: Einige Vorlesungen mit mathematikdidaktischem Inhalt 1947/1948

gründeten sich an Universitäten und Hochschulen Pädagogische Fakultäten. Mit einem Befehl der SMAD konnte man sich das aufwendige Verfahren einer fünfmaligen Verabschiedung eines abgestimmten Gesetzentwurfs in den Ländern und Provinzen der SBZ ersparen. An seinem Inhalt und Wortlaut, an den Planungen zu seiner Umsetzung sowie in personellen Fragen haben Mitarbeiter der deutschen Schulverwaltungen und Vertreter der Parteien der SBZ mitgewirkt.

Man hätte zwar auch die Lehrerausbildung im Rahmen von Instituten für Pädagogik an den Philosophischen Fakultäten gestalten können. Aber allein durch die Neugründung einer Fakultät war es möglich, bei der Berufung von Personen, welche die bisher dafür notwendigen akademischen Voraussetzungen nicht besaßen, den zu erwartenden Widerstand der Philosophischen Fakultät auszuschalten. Zudem war dieser strukturelle Eingriff ebenso wie die Gründung der Vorstudienanstalt, der Gesellschaftswissenschaftlichen Fakultät und später der Arbeiter- und Bauern-Fakultät, auch Teil einer Strategie, die sich gegen die "bürgerliche Universität" richtete.

Bei der akademischen Institutionalisierung der Mathematikmethodik stand wohl weniger die Frage ihrer wissenschaftlichen Relevanz im Vordergrund als vielmehr eine Orientierung auf gesellschaftlich-praktische Fragen. Die neu geschaffene achtklassige Grundschule, eine Einheitsschule, verfolgte einen deutlich höheren Bildungsanspruch in Mathematik als die bisherige Volksschule, ihre Oberstufe sollte auf die Höhe der entsprechenden Jahresklassen der bisherigen höheren Schulen gehoben werden, was sich z. B. in der Aufnahme von Inhalten wie Buchstabenrechnung, Rechnen mit relativen Zahlen, algorithmisches Lösen von Gleichungen ausdrückte. Zugleich gab es einen riesigen Lehrerbedarf - nach dem Krieg waren mehr als zwei Drittel der Lehrer entlassen worden, weil sie Mitglieder der NSDAP oder deren Organisationen waren -, insbesondere fehlte es auch an speziell für den Mathematikunterricht der Einheitsschule ausgebildeten Lehrern. Die Mathematikmethodiker der SBZ sahen eine wichtige Aufgabe ihrer Disziplin darin, die Methoden der früheren Volksschule und die der ehemaligen höheren Schulen im mathematischen Unterricht der Einheitsschule zu vereinigen. Sie waren bemüht, das in beiden Strängen überkommene fachdidaktische Wissens anschlussfähig für die Entwicklung und Diskussion der Konzeption des Mathematikunterrichts der Einheitsschule zu machen.

In die universitäre Lehre der Mathematikmethodik wurden Personen übernommen, die hierfür durch ihre Publikationen oder ihr praktisches Wirken – auch in Kursen für Neulehrer[4] – ausgewiesen waren. HEINRICH KEMPINSKY, KARL PIETZKER, ADALBERT DECKERT, MAX DRAEGER, LUDWIG PETERS und MAX EBNER beispielsweise hatten bereits mathematikmethodische oder mathematische Bücher, Zeitschriftenartikel oder Mathematik-Schulbücher verfasst, und HEINRICH KEMPINSKY[5], WERNER RENNEBERG, OTTO MIERSCH u. a. waren in Neulehrerkursen tätig gewesen.

Literatur: beim Verfasser

---

[4] 1945 fehlten in der SBZ etwa 40 000 Lehrer. Daher richtete man im August und September 1945 Kurse von zunächst nur drei Wochen Dauer ein, in denen vor allem Arbeiter und Bauern, aber auch andere Personen zu "Neulehrern" ausgebildet werden sollten, bis zum Schulbeginn am 1.10.1945 waren dies rund 15.000. Dann ordnete die SMAD an, dass im Laufe des Jahres 1946 weitere 30 000 neue Lehrer ausgebildet und den in ihrem Bereich liegenden Schulen zugeführt werden sollten. Vorgesehen wurde zunächst eine achtmonatige, geschlossene Ausbildung, die jedoch nach dieser Zeit keineswegs als beendet angesehen werden sollte.

[5] HEINRICH KEMPINSKI hatte in Leipzig ab 02.07.1946 als Direktor eines Lehrerbildungsheimes gewirkt, bevor er ab 01.11.46 im Alter von 69 Jahren als Professor nach Jena ging.

Manfred BOROVCNIK, Klagenfurt

Statistische Zusammenhänge

Hängt der Erfolg einer Therapie vom eingesetzten Medikament ab? Ist der Grad der Schädigung von Gefäßwänden aus Blutfettwerten und Gamma GT–Werten der Leber abzulesen? Beide Fragestellungen führen zum Test von Hypothesen. Ist in der ersten Fragestellung die Größe des Therapieerfolgs wenigstens dem medizinischen Experten einsichtig, so braucht man in der zweiten auch den so genannten Korrelationskoeffizienten als abstraktes Maß für die Zusammenhänge. Hier treffen sich Feinheiten des Testens mit dem Fehlen einer einfachen Deutung der Skala, auf der man die Zusammenhänge misst. Man erleichtert das Verständnis der Vorgangsweise und der damit erzielbaren Ergebnisse durch systematische Analyse von konkreten, auch schematischen Daten.

Einleitung

Einige Beispiele illustrieren, wie wesentlich es ist, zu verstehen, was man sich eigentlich unter der Aussage vorzustellen hat, dass ein Zusammenhang statistisch gesichert ist. Danach werden Möglichkeiten vorgestellt, die damit zusammenhängenden mathematischen Begriffe besser zu verstehen.

Unterstellt sei, dass Punktwolken den Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen beschreiben und dass der Korrelationskoeffizient die Stärke eines solchen (linearen) Zusammenhangs erfasst, ohne dass man das Konzept Korrelationskoeffizient auch nur annähernd definiert. Dabei stellt man sich auf den Standpunkt, dass man durch den Gebrauch des Begriffes auch etwas über dessen Eigenschaften lernen kann.

Variiert man systematisch Punktwolken und betrachtet die Auswirkungen auf die Trendgerade, welche diese Punktwolke tendenziell beschreibt, sowie auf den Korrelationskoeffizienten, so sieht man rasch, dass Punkte, die relativ isoliert von den anderen liegen, einen übermäßigen Einfluss erhalten. Solche Studien kann man bei Borovcnik (2006) nachspielen.

Desgleichen kann man die Auswirkung der Änderung etwa eines Punktes in einer Punktwolke auf die Vorhersagen studieren: Interpretiert man die eine Variable x als unabhängige, die andere – y – als abhängige, so stellt sich das Problem, wie man eine Vorhersage der abhängigen Variablen y durchführen und verbessern kann. Zwei einfache Ansätze zur Vorhersage sind: (i) Naive Vorhersage des Mittelwerts von y, was die Kenntnis der unabhängigen Variablen x und allfällige Zusammenhänge zwischen x und y außer Acht lässt. (ii) Lineare Vorhersage von y in Abhängigkeit vom Wert von x und dem gewählten linearen Modell.

Auch hier sieht man durch Visualisieren der Fehler rasch, dass sich für die beiden Vorhersagen bei Korrelationskoeffizienten nahe bei 0 kaum Größenunterschiede in den Fehlern ergeben; dass aber die Größe der Fehler bei der linearen Vorhersage erheblich verringert wird, wenn der Korrelationskoeffizient in der Nähe von ±1 liegt. Rein durch systematisches Explorieren mit schematischen Daten erhält man tiefere Einblicke in das Wesen der Begriffe von Korrelation, Regression und Güte der Vorhersagen. Bleibt dann noch die Frage, wie man durch systematisches Probieren erhellen kann, was es bedeutet, dass ein Korrelationskoeffizient signifikant von Null verschieden ist. Alle Studien sind in EXCEL implementiert und von Borovcnik (2006) herunterladbar.

Der Zusammenhang zwischen XX und YY ist statistisch gesichert

Risikofaktoren für cardiovaskuläre Krankheiten (CVK)

Der Zusammenhang von γ-Glutamyltransferase (GGT) zum Sterberisiko aus CVK wurde prospektiv untersucht bei über 160 000 Patienten; die Probanden wurden über 17 Jahre lang beobachtet. Als mathematisches Modell wurden Cox proportional hazards verwendet; die Daten wurden korrigiert nach schon bekannten Risikofaktoren. Für Männer und Frauen ergab sich: ein hoher GGT ist signifikant (P<0,001) assoziiert mit totaler Mortalität aus CVK: Dabei steigen die Hazard ratios um 1,66 (95% KI: 1,40-1,98) pro Einheit log GGT Zuwachs bei Männern …Hohe Werte von GGT sind positiv assoziiert mit

- tödlichen Ereignissen aus chronischen Koronarherzerkrankungen (P=0,009)
- Herzversagen (P<0,001)
- ischemischem und hämorrhagischen Schlaganfall (P<0,001)
- kein signifikanter Zusammenhang mit akutem Herzinfarkt (P=0,16)
- bei Frauen …
- bei Jüngeren: ein stärkerer Einfluss des GGT

Die Studie zeigt, dass GGT ein eigenständiger Faktor ist, unabhängig von bekannten Risikofaktoren, der mit cardiovaskulärer Mortalität verknüpft ist. Als unabhängige Variable spielt der Logarithmus von GGT mit, als abhängige Variable dient das proportionale Risiko – die sogenannten odds (Verhältnis $p : 1–p$) bzw. auch wieder der Logarithmus davon. Das wahre Ausmaß der Einflüsse verbirgt sich hinter abstrakten Merkmalen; man muss sich erst über Szenarien ein Bild davon machen. Wichtig aber ist, dass der Korrelationskoeffizient bzw. der Regressionskoeffizient signifikant von Null verschieden sind. Das bedeutet, die unabhängige Variable ist ein – statistisch gesicherter – Prädiktor für das Auftreten der Krankheit. Man kann die Messung von GGT etwa in allgemeine Gesundenuntersuchungsprogramme einbauen, oder bei Vorhandensein anderer Risiken

messen, damit man eine Handhabe hat, bei Vorliegen dieses Risikofaktors frühzeitig gezielte Gegenmaßnahmen zu empfehlen.

Optimieren von chemischen Prozessen

Sie untersuchen die Ausbeute einer Reaktion bei verschiedenen Temperaturen, um herauszufinden, ob es sich lohnt, die optimale Temperatur zu suchen – http://www.chemie.unibas.ch/%7Ehuber/Statistik/LinReg/LRBeispiele/beispiele.html#B4:

Temperatur T/K	300	307	310	319	322	328
Ausbeute A/%	80	79	83	82	84	84

a. Ist der lineare Zusammenhang vom Sachzusammenhang her gesichert ? – Ein linearer Zusammenhang ist von der Sache her nicht gesichert. Wir kennen keinerlei Gesetz zu diesem Vorgang.

b. Lohnt es sich gemäß der Varianzanalyse bei einem Signifikanzniveau von 95 (99)% ? – Die Varianzanalyse ergibt F = 7.77

$$\frac{\text{Summe Quadrate } \textit{erklärte Variation}/\text{Freiheitsgrade}}{\text{Summe Quadrate } \textit{nicht-erklärte Variation}/\text{ Freiheitsgrade}}$$

Schwellenwert von F für 95 % Signifikanz = 7.71 <7.77. Folglich lohnt, die optimale Temperatur zu suchen sich [auf Niveau 95%]. Dieselbe Aussage erhält man auch so:

Achsenabschnitt = 30,70 Streuung = 18,46 Steigung = 0,163
Streuung = 0,059 R = 0,81

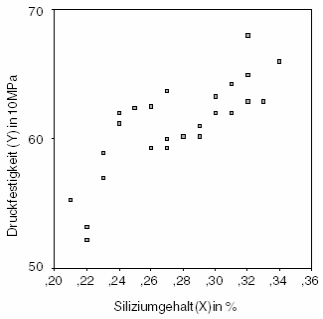
Wenn wir nun die untere Vertrauensgrenze der Steigung auf diesem Niveau berechnen erhalten wir 0,0006; der Wert ist also positiv wie die Steigung selbst. Steigung **0** – keine Abhängigkeit von Temperatur – liegt *nicht* dazwischen. Für 99%: Schwellenwert von F = 21.20: Mit 99% Sicherheit können wir nicht sagen: Ausbeute = temperaturabhängig.

Verbesserung von Materialeigenschaften

Gibt es einen linearen Zusammenhang zwischen dem Siliziumgehalt (x %) und der Druckfestigkeit (y 10MPa) einer bestimmten Stahlsorte? Dazu wurden beide Merkmale an n = 25 Stahlproben erfasst; siehe: www.elsevier.de/sixcms/media.php/795/Einfache%20Korrelationsanalyse.pdf

x_i	0,34	0,27	0,26	0,33	0,29	0,3	0,32	0,21	0,24	0,22	0,26	0,27	0,3
y_i	66	59,3	59,3	62,9	60,2	63,3	62,9	55,3	61,2	53,2	62,5	60	60

x_i	0,29	0,3	0,31	0,32	0,31	0,27	0,32	0,22	0,23	0,23	0,24	0,25
y_i	61	62	62	65	64,2	63,7	68	52,2	58,9	57	62	62,4



Der Korrelationskoeffizient r = 0, 796 ist signifikant verschieden von 0. Der Zusammenhang ist *statistisch gesichert*. Es *lohnt sich*, den Siliziumgehalt je nach wirtschaftlichen Gegebenheiten hoch anzusetzen.

Zusammenhänge modellieren und absichern

Was bedeutet es, Zusammenhänge zu modellieren? Man sucht im Rahmen einer Systemanalyse nach jenen Variablen, die eine Zielgröße maßgeblich beeinflussen. Im Fall der Koronarerkrankungen also neuerdings auch GGT, bei der Prozessoptimierung nach der Temperatur, bei der Verbesserung von Druckfestigkeit bei Stahl etwa nach dem Siliziumgehalt. In aller Regel hat man mehrere Kandidaten für Einflussgrößen. Sodann werden in einer experimentellen Phase Daten „erzeugt“, welche die vermuteten Zusammenhänge prüfen lassen sollen. Man trennt dabei die Daten in Signal – so hängen die Daten für die abhängige Variable über ein mathematisches Modell von den Werten der unabhängigen Variablen ab plus Rauschen, das ist noch nicht erklärtes Variieren der Daten – die so genannten Residuen. Damit erhält man eine Strukturgleichung für das „Entstehen“ der Daten:

Hat man einmal Zusammenhänge in einem Modell erfasst, so kann man die Werte der unabhängigen Variablen als Prädiktoren für die Vorhersage der abhängigen Variablen nutzen. Die Genauigkeit der Vorhersagen kann man mittels Beschreibender Statistik untersuchen. Hier gelangt man direkt und einfach zu tieferen Zusammenhängen, wie das Bestimmtheitsmaß – das Quadrat des Korrelationskoeffizienten – benutzt werden kann, um die Verbesserung der Vorhersagen durch das benutzte Modell im Vergleich zur naiven Vorhersage (durch den Mittelwert der *y*-Daten) zu quantifizieren. Der Vorteil von EXCEL liegt auch darin, dass man durch Simulation von Daten (*x*, *y*) den Spielraum für den Korrelationskoeffizienten einschätzen kann, das ist dessen natürliche Fluktuation unter der Bedingung, dass *kein* Zusammenhang zwischen *x* und *y* besteht. Ist der festgestellte Korrelationskoeffizient außerhalb dieser durch die Studie ermittelten Schwellenwerte, so kann man sagen, der Zusammenhang ist *statistisch gesichert.*

Literatur

Borovcnik, M.: EXCEL-Files für den Unterricht in Stochastik 2006: http://www.uni-klu.ac.at/stochastik.schule/ unter Links.

Christie, D.: Resampling mit Excel. Stochastik in der Schule 24 (2004), Heft 3, 22-27.

Neuwirth, E., Arganbright, D.: The Active Modeler: Mathematical Modeling with Microsoft Excel. Brooks/Cole 2004.

Reckelkamm, B.: Der Tanz der Residuen - Erarbeitung statistischer Grundbegriffe mit Hilfe von EXCEL. Stochastik in der Schule 24 (2004), Heft 3, 14-21.

Astrid BRINKMANN, Dortmund/Iserlohn

Mind Mapping oder Concept Mapping? – Schülerpräferenzen

Mind Mapping (MMing) und Concept Mapping (CMing) sind spezielle Techniken, die sich zur graphischen Repräsentation vernetzten mathematischen Wissens eignen (vgl. z B. Brinkmann 1999, 2001, 2003). Im Beitrag wird eine Untersuchung vorgestellt, die zum einen der Frage nachgeht, welche der beiden Repräsentationsmöglichkeiten von Lernenden bei freier Wahlmöglichkeit bevorzugt wird und warum, und zum anderen, ob und gegebenenfalls in welcher Weise Schüler/innen die Repräsentationstechnik des MMing bzw. des CMing abwandeln und für ihre Lern- und Problemlösungsprozesse optimieren, wenn sie die Freiheit hierfür haben.

1. Untersuchungsdesign

Die Untersuchung wurde in einer 10. Klasse eines Gymnasiums mit 13 Schülerinnen und 11 Schülern durchgeführt. Die Beteiligten hatten vorher im Mathematikunterricht sowohl die Technik des MMing als auch die des CMing (entsprechend der ursprünglichen Regeln von Novak, 1984) kennen und nutzen gelernt. Den Schüler/innen wurde ein Fragebogen (Abbildung 1) vorgelegt; die Auswertung erfolgte getrennt nach Geschlechtern.

Abbildung 1

Mind Map oder Concept Map?

1. Welche der beiden Darstellungsformen findest du für dich sinnvoller? Warum?
2. Gibt es bestimmte Situationen, in denen du eher Mind Mapping vorziehen würdest und andere, in denen du dich eher für Concept Mapping entscheiden würdest? Beschreibe und begründe.
3. Welche Darstellungsform würdest du wählen, wenn du Lerninhalte zu einem Thema zusammenfassend ordnen / strukturieren willst:
   - [] Mind Map.
     Warum?
   - [] Concept Map.
     Warum?
   - [] Andere Darstellungsform.
     Welche?
     Warum?

Zu dem später im Unterricht behandelten Thema (Quadratische Parabeln) sollten die Lernenden dann eine Map zur zusammenfassenden Wiederholung und Strukturierung von Lerninhalten und zwecks Unterstützung in Problemlösungsprozessen anfertigen. Dabei hatten sie die freie Wahl zwischen einer Mind Map (MM), einer Concept Map (CM) oder einer Abwandlung hiervon im Sinne einer (subjektiv empfundenen/erwarteten) optimaleren Map. Anhand der hierbei von den Schüler/innen erstellten Maps wurde der Frage nachgegangen, ob Schüler/innen eher unterschied-

liche graphische Repräsentationstechniken wählen oder ob die angefertigten Maps eher gemeinsame Charakteristika aufweisen.

2. Ergebnisse

Unter *Frage 1* wurde MM 10 mal (8 Schülerinnen und 2 Schüler) und CM 13 mal (5 Schülerinnen und 8 Schüler) angegeben; ein Schüler gab eine „Symbiose zwischen MM und CM“ an.

Als Gründe für die Bevorzugung einer *Mind Map* wurden genannt:

- einfacher zu erstellen (6 mal),
- übersichtlicher (4 mal),
- man kann Wichtiges besser hervorheben durch Farben/Zeichnungen/ Symbole (4 mal),
- man kann auf einen Blick alles gut erkennen (1 mal),
- in einer MM kann man Gedanken besser unterbringen und später besser wieder nachvollziehen (1 mal),
- man kann sich besser persönliche Hilfen notieren (1 mal).

Die aufgeführten Gründe für eine *Concept Map* waren:

- übersichtlicher (12 mal),
- sieht geordneter aus (6 mal),
- Wege von einem zum anderen sind einfacher nachzuvollziehen / besser zu erkennen (3 mal),
- man kann besser zeigen, was für einen Bezug verschiedene Inhalte zueinander haben / wie die Zusammenhänge sind (2 mal),
- man kann besser mit ihr lernen (1 mal).

Der Schüler, der eine „Symbiose zwischen MM und CM“ angegeben hatte, hob als Grund hervor, dass diese sowohl die Vorzüge einer MM als auch die einer CM biete.

Unter *Frage 2* gaben 5 Schülerinnen und 1 Schüler an, dass sie immer MMing vorziehen würden, 2 Schülerinnen und 7 Schüler würden immer CMing vorziehen und 6 Schülerinnen und 2 Schüler würden sich situationsbedingt mal für die eine, mal für die andere Technik entscheiden. Ein Schüler gab, wie bereits unter Frage 1, eine „Symbiose zwischen MM und CM“ an. Die Schüler/innen, die immer MMing bzw. immer CMing bevorzugen würden, nannten als Gründe im Wesentlichen dieselben wie unter Frage 1. Schüler/innen, die situationsbedingt entscheiden, führten im Falle einer allgemeinen Vorliebe für die Darstellungsform der MM an:

- MMing, wenn man die Map selber erstellen muss, weil dies einfacher als CMing ist (2 mal),
- MMing für Sachen, die man versteht; CMing für Sachen, bei welchen man Probleme hat (1 mal),
- CM, wenn es zu einem Thema nur wenige Unterbegriffe gibt, da mir das ein wenig übersichtlicher erscheint (1 mal),

- CM zum Aufgabenlösen, da diese eine bessere Übersicht bietet (1 mal),

und im Falle einer allgemeinen Vorliebe für die Darstellungsform der CM:

- MMing, wenn man selber eine Map erstellen soll (da einfacher / weniger Arbeit); CM, wenn man eine Vorlage bekommt (3 mal),
- MMing bei einem Thema, bei dem ich nicht genau wüsste, was wozu gehört, da eine MM einfacher zu zeichnen ist (1 mal),
- MMing wenn man sehr viele Dinge hat, die auf die Map sollen, da dies in einer MM einfacher ist (1 mal),
- MMing, wenn man zu einem Thema mehrere Unterbegriffe hat (1 mal),
- CMing um Zusammenhänge klarer zu machen (1 mal),
- CM als Hilfe beim Lösen von Aufgaben, weil eine CM übersichtlicher ist (1 mal).

Zur *Frage 3* wurde von fast allen Schüler/innen dieselbe Darstellungsform wie unter Frage 1 angegeben und dies mit Argumenten, die bereits unter Frage 1 genannt wurden, begründet. Eine Schülerin gab als zusätzliche Darstellungsform für eine Zusammenfassung die Textform an, da diese „besser zum Lernen“ sei. Ein Schüler und eine Schülerin, die unter Frage 1 die Darstellungsform einer CM angekreuzt hatten, gaben jetzt die Textform an, „weil mehr Sinn dahinter steckt“, bzw. das Regelheft (i. e. ein Heft, in dem wichtige Regeln aus dem Unterrichtsstoff festgehalten werden).
Hatten die Lernenden die freie Wahl zwischen der Anfertigung einer MM, einer CM oder einer Abwandlung der einen oder anderen Form zur zusammenfassenden Wiederholung und Strukturierung von Lerninhalten und zwecks Unterstützung in Problemlösungsprozessen, so wählten sie i.d.R. eine *Mischform von MM und CM*, die typischerweise wie folgt charakterisiert werden kann: Das Thema wurde i.A. in die Mitte gesetzt (dies ist vorteilhaft im Hinblick auf evtl. Platzprobleme), ausgehend hiervon wurden meist drei bis fünf Hauptäste mit weiteren Verzweigungen eher in der offenen Form des MMing gezeichnet, Begriffe wurden am Ende der Äste/Zweige im Stil des CMing notiert, die dargestellten Relationen wurden nur zum Teil mit verbindenden Wörtern beschriftet, Querverbindungen wurden nur wenige eingezeichnet. Vorteilhafterweise nutzten die Schüler/innen die Möglichkeit, Beispiele anzugeben, und fügten auch Beispielaufgaben samt Lösungsweg ein.

3. Zusammenfassung und Diskussion

Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen, dass Lernende keine eindeutigen Präferenzen für das MMing einerseits oder das CMing andererseits zeigen. Vorzüge der einen oder anderen Technik werden offenbar unterschiedlich gewichtet. Auch orientieren sich die Lernenden an der subjektiv empfundenen Wirkung einer Map: Die einen empfinden eine MM als übersichtlicher, die anderen eine CM. Schülerinnen scheinen eher zum MMing, Schüler

eher zum CMing zu tendieren. Mehr als ein Drittel der Schüler/innen würden sich situationsbedingt mal für MMing, mal für CMing entscheiden, unter Berücksichtigung der spezifischen Vor- und Nachteile dieser beiden Repräsentationstechniken.

Für manche Schüler/innen hängt die Wahl der Repräsentationsform auch davon ab, ob eine Map selber angefertigt werden soll oder mit einer fertigen Map gearbeitet werden kann. Mind Maps lassen sich leichter erstellen, jedoch wird das Arbeiten mit Concept Maps von diesen Schüler/innen in gewissen Situationen für vorteilhafter gesehen. Als Konsequenz für den Unterricht sollte daher Schüler/innen ggf. geholfen werden, eine von ihnen erstellte Map so zu ergänzen und zu verbessern, dass diese für weitere Lernprozesse effizienter genutzt werden kann.

Für eine zusammenfassende Strukturierung der Lerninhalte zu einem Thema würden fast alle Schüler/innen eine graphische Darstellung in Form einer Map wählen und somit diese einer Textform vorziehen; Lernende sollten daher im MU mit Wissensdarstellungen in Mapform vertraut werden. Allerdings scheinen weder MMs noch CMs optimale graphische Darstellungsformen im Sinne einer zusammenfassenden Strukturierung von Lerninhalten und auch als Hilfe in Problemlösungsprozessen zu sein; eine Mischform, die sich in typischer Weise charakterisieren lässt, wird bevorzugt. Hierbei versuchen Lernende offenbar eine möglichst vorteilhafte Map auf möglichst einfache Weise zu erstellen. Eine Weiterentwicklung und Bereitstellung entsprechend angepasster Regeln zur graphischen Darstellung von Wissensnetzen wäre im Mathematikunterricht sinnvoll.

Obgleich sich die Ausführungen in diesem Beitrag auf Beobachtungen in nur einer Schulklasse beschränken, zeigen sie doch, dass graphische Repräsentationstechniken für mathematisches Wissen im Hinblick auf bestimmte Anwendungen in Lehr- und Lernprozessen weiterentwickelt und optimiert werden können und sollten.

Literatur

Brinkmann, Astrid. 1999. „Graphische Darstellungen mathematischer Wissensnetze.“ In: Michael Neubrand (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999.* Hildesheim: Franzbecker, 109-112.

Brinkmann, Astrid. 2001. „Mathematical Networks – Conceptual Foundation and Graphical Representation.” In: Riitta Soro (ed.). *Current State of Research on Mathematical Beliefs X. Proceedings of the MAVI-10 European Workshop. University of Turku, Department of Teacher Education, Pre-Print nr. 1, 2001,* 7-16.

Brinkmann, Astrid. 2003. *Graphical Knowledge Display – Mind Mapping and Concept Mapping as Efficient Tools in Mathematics Education.* In: Pat Perks & Stephanie Prestage (eds.). Mathematics Education Review. The Journal of Association of Mathematics Education Teachers. Number 16, April 2003, 39-48.

Novak; Govin. 1984. *Learning how to learn.* Cambridge University Press.

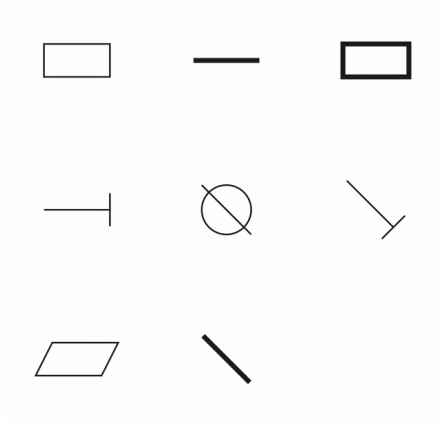
Silke BRINKSCHMIDT, Springe

Einblicke in die Unterschiedlichkeit kognitiver Prozesse durch Analyse von Blickbewegungen

Die Erforschung kognitiver Prozesse hat am Institut für Kognitive Mathematik der Universität Osnabrück lange Tradition. Das von Schwank geleitete DFG-Projekt „Individuelle Unterschiede in der Kognition mathematischer Begriffsbildung“ (SCHW 579/3-1) hatte unter anderem zum Ziel, Unterschiede zwischen prädikativem und funktionalem Denken zu ergründen (Schwank, 2003). Dazu bearbeiteten Versuchspersonen Aufgaben aus dem Test QuaDiPF (Schwank, 1998 / 2000). Neben der Analyse von Argumentationen wurden auch die Blickbewegungen der Versuchspersonen untersucht (vgl. Schwank, 2002).

Erste Ergebnisse dieses Projekts waren Anlass, derartige Untersuchungen auch an größeren Stichproben (vier Versuchsgruppen mit insgesamt 57 Versuchspersonen; Gymnasiasten der Jahrgangsstufen 10 – 13) mit einem teilweise modifizierten Aufgabensatz zu erproben. Von einigen Methoden, die zur Auswertung dieser weiteren Untersuchungen neu konzipiert wurden, und den daraus resultierenden Ergebnissen soll hier berichtet werden.

Um die individuell unterschiedlichen Vorstellungen, die Versuchspersonen von der Regelhaftigkeit einer Aufgabe entwickeln, auszuwerten, wurde ein standardisiertes Klassifikationssystem zur Einordnung von Begründungen von Versuchspersonen in Argumentationsklassen entwickelt (vgl. Brinkschmidt, 2005). Auf Basis einer systematischen Aufgabenanalyse wurde der Frage nachgegangen, welche unterschiedlichen Vorstellungen und Fehlvorstellungen die Darstellung einer Aufgabe (vgl. Abbildung) bei potentiellen Versuchspersonen hervorrufen könnte. Diese denkbaren, konkreten Vorstellungen potentieller Versuchspersonen zu einer Aufgabe wurden in einem nächsten Schritt zu Vorstellungen von der Regelhaftigkeit bei Aufgabentypen abstrahiert. Dazu wurden Musterargumentationen entworfen, die die denkbaren unterschiedlichen Vorstellungen bei verschiedenen Aufgabentypen illustrieren. Die Auswertung der Argumentationen von Versuchspersonen bestand letztlich darin, diese möglichst zuverlässig in eine der bestehenden Argumentationsklassen einzusortieren.



Wie solche Argumentationsklassen aussehen, soll am Beispiel der hier dargestellten Aufgabe vorgeführt werden.

Klasse I:
In der Mitte einer jeden Zeile und Spalte stehen Figuren, die anzeigen, wie die jeweils erste Figur dieser Zeile zu verändern ist. Das Resultat dieser Veränderung steht am Ende der entsprechenden Zeile oder Spalte. Die Figuren in der Mitte der zweiten Zeile und Spalte greifen auf Figuren zu, die ihrerseits den „Befehl" für eine auszuführende Tätigkeit geben. Sie verändern daher die Wirkungsweise, die diese Figuren anzeigen. Daher zeigen die Figuren in der dritten Zeile und Spalte zwei Tätigkeiten an, die verkettet auf die ersten Figuren dieser Zeile bzw. Spalte auszuführen sind.

Klasse IV:
Die Figuren dieser Aufgabenart lassen sich durch Eigenschaften in drei Dimensionen charakterisieren. Die jeweils erste und dritte Figur einer Zeile weisen die gleiche Form auf, die jeweils zweite und dritte die gleiche Ausrichtung und die gleiche Strichdicke.

Klasse VI:
Die drei Eckfiguren haben eine Eigenschaft gemeinsam: Sie sind alle viereckig. Die erste und dritte Figur der ersten und zweiten Zeile stimmen dabei exakt in der Form überein. Die erste und dritte Figur der ersten und zweiten Spalte stimmen in der Strichdicke überein.

Die unterstrichenen Textpassagen haben konkreten Bezug zu der in der Abbildung dargestellten Aufgabe. Sie lassen sich bei anderen Aufgaben desselben Typs durch analoge Passagen ersetzen. Die abstrakte Vorstellung von der Regelhaftigkeit dieses Aufgabentyps bleibt dabei gleich.

Wie man der Nummerierung der vorgestellten Klassen entnehmen kann, gibt es bei dieser Aufgabe noch einige weitere, hier nicht dargestellte Argumentationsklassen. Als ein Ergebnis dieser Art der Auswertung von Argumentationen lässt sich festhalten, dass die definierten Argumentationsklassen das Spektrum der in den Untersuchungen bei insgesamt 57 Versuchspersonen auftretenden Argumentationen sehr gut abdecken. Nur wenn Versuchspersonen sprachlich sehr wenig präzise argumentieren oder ihre Überlegungen nur sehr unvollständig wiedergeben, können sie keiner der Klassen zugeordnet werden.

Die Definition von Argumentationsklassen ermöglicht es zudem, zu einer standardisierten Beurteilung hinsichtlich der eingesetzten kognitiven Werkzeug bei der Lösung einer Aufgabe zu gelangen: Wer wie unter Klasse I vorgestellt argumentiert, zeigt in besonderer Weise, dass er in der Lage ist in Wirkungsweisen zu denken, also funktional. Wer wie unter Klasse IV vorgestellt argumentiert, bevorzugt ein Denken in Eigenschaften, denkt also prädikativ. Gleiches gilt für Versuchspersonen, die wie unter Klasse VI

vorgestellt argumentieren. Allerdings ist die Fähigkeit zum prädikativen Denken hier weniger ausgeprägt, da einige wichtige Eigenschaften von Figuren unberücksichtigt bleiben.

Neben der vorgestellten Methode zur Auswertung von Argumentationen wurden verschiedene quantitative Auswertungsmethoden für Blickbewegungsparameter entwickelt. Aus zahlreichen psychologischen Untersuchungen (z.B. Carpenter & Just, 1976) ist bekannt, dass das Sehen in gewisser Weise an das Denken gekoppelt ist. Ziel bei der vorliegenden Untersuchung war es, von der Zugehörigkeit einer Versuchsperson zu einer „Blickbewegungsklasse“ auf die Zugehörigkeit zu einer Argumentationsklasse zu schließen. Eine „Blickbewegungsklasse“ ist dabei im Idealfall eine Charakterisierung der Blickbewegungen anhand messbarer Daten, die alle Versuchspersonen, die ähnlich denken, von allen Versuchspersonen, die anders denken, unterscheidet. Wie solche „Blickbewegungsklassen“ prinzipiell konstruiert werden und mit welchen Problemen man dabei rechnen muss, soll hier kurz skizziert werden.
Normalerweise führt die Aufmerksamkeit das Auge zu einem bestimmten Ziel. Bei einer einzelnen Versuchsperson gibt es also einen Zusammenhang zwischen Denken und Sehen. Wenn eine Versuchsperson Figuren gedanklich miteinander in Verbindung bringt, dann sieht sie diese Konstellation von Figuren auch (mehrfach) nacheinander an.
Fraglich ist aber, ob man umgekehrt aus der Kenntnis der Blickbewegungsdaten erschließen kann, wie eine Versuchsperson gedacht hat. Das setzt voraus, dass man messbare Unterschiede in den Blickbewegungen derjenigen Versuchspersonen findet, die zu verschiedenen Argumentationsklassen gehören, also verschieden gedacht haben.

Versuchspersonen, die wie unter Klasse I dargestellt argumentieren, stellen beispielsweise einen logischen Zusammenhang zwischen den Figuren einer Zeile und Spalte her. Sie haben, um diesen logischen Zusammenhang herstellen zu können, die Figuren einer Zeile und Spalte mehrfach hintereinander angesehen. Versuchspersonen, die wie unter Klasse VI dargestellt argumentieren, stellen einen logischen Zusammenhang zwischen den Eckfiguren und der jeweils ersten und dritten Figur einer Zeile und Spalte her. Sie haben, um diesen logischen Zusammenhang herstellen zu können, diese Konstellationen von Figuren angesehen (vgl. Cohors-Fresenborg et al. 2003, Abb. 6a).
Die Versuchspersonen, die sich in ihren Erklärungen auf verschiedene Konstellationen von Figuren beziehen (wie etwa Versuchspersonen der Klasse I im Vergleich zu Versuchspersonen der Klasse VI), lassen sich mit den insgesamt vier entwickelten Methoden zur Auswertung von Blickbe-

wegungen (vgl. Brinkschmidt, 2005) bei allen Aufgabentypen zuverlässig trennen, da sie verschiedene Konstellationen von Figuren bevorzugt ansehen.

Problematischer ist es aber, Versuchspersonen zu unterscheiden, die sich in ihren Erklärungen auf dieselben Konstellationen von Figuren beziehen, dabei aber ganz unterschiedliche Überlegungen anstellen.
Sowohl die Versuchspersonen der Klasse I als auch die Versuchspersonen der Klasse IV beziehen sich in ihren Erklärungen auf alle Figuren einer Zeile. Das Interesse von Versuchspersonen der Klasse I gilt dabei dem funktionalen Zusammenhang zwischen den Figuren einer Zeile. Versuchspersonen der Klasse IV analysieren hingegen die Eigenschaften der Figuren. Den Blickbewegungen sieht man dabei aber nur an, dass das Interesse den Zeilen gilt, nicht aber, welche Überlegungen dabei angestellt werden. Um solche Versuchspersonen anhand ihrer Blickbewegungen zu unterscheiden, muss man also nach weiteren Charakteristika in den Blickbewegungsdaten suchen. Eine charakteristische Blickbewegung, die zur Unterscheidung solcher Versuchspersonen beiträgt, ist in Cohors-Fresenborg et al. (2003) dargestellt und analysiert (vgl. Abb. 5b). Bei den Operatoraufgaben ermöglichen die vier entwickelten Methoden daher letztlich auch eine recht zuverlässige Unterscheidung von Versuchspersonen mit Operatorvorstellung und anderen Versuchspersonen, die über Zeilen und Spalten argumentieren.

Literatur

Brinkschmidt, S. (2005): Über die Unterschiedlichkeit kognitiver sowie metakognitiver Prozesse beim Bearbeiten von QuaDiPF-Aufgaben. Empirische Untersuchungen mit Blickbewegungsanalysen. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Carpenter, P.A. & Just, M. A. (1976): Eye fixations and cognitive processes. *Cognitive Psychology*, 8, 441-480.

Cohors-Fresenborg, E., Brinkschmidt, S. & Armbrust, S. (2003): Augenbewegungen als Spuren prädikativen oder funktionalen Denkens. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 35(3), 86-93.

Schwank, I. (1998/2000): QuaDiPF – Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken. Sets A/B/C/D. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2002): Analysis of eye-movements during functional versus predicative problem solving. In J. Novotna (Ed.): European Research in Mathematics Education II. Selected papers from the 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Prag: Charles University, 489-498.

Schwank, I. (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 35(3), 70-78.

Andreas BÜCHTER, Soest

Kompetenzorientierte Diagnose im Mathematikunterricht

Wenn ein Lernarrangement *produktiv* sein soll, dann muss es eine Reihe von Bedingungen erfüllen (vgl. Büchter & Leuders 2006), vor allem muss es für die Schülerinnen und Schüler herausfordernd und *zugänglich* sein. Dabei bedeutet „zugänglich", dass die Schülerinnen und Schüler jeweils auf ihrem Niveau, also mit ihren *vorhandenen* individuellen Vorstellungen und Kompetenzen, dazu angeregt werden, Mathematik zu treiben. Die passgenaue Auswahl entsprechender Aufgaben kann auch in Zeiten von zentral gestellten Vergleichsarbeiten oder Abschlussprüfungen nur dezentral durch die Lehrerinnen und Lehrer vor Ort erfolgen. Diese müssen dafür über entsprechende „diagnostische Kompetenzen" verfügen.

Was ist „kompetenzorientierte Diagnose"?

Franz E. Weinert (2000) beschrieb „diagnostische Kompetenzen" basierend auf seiner langjährigen Erfahrung als Unterrichtsforscher als „*ein Bündel von Fähigkeiten, um den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und die Leistungsprobleme der einzelnen Schüler sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können, sodass das didaktische Handeln auf diagnostischen Einsichten aufgebaut werden kann.*" Diese fachübergreifend gültige pädagogisch-psychologische Definition weist daraufhin, dass Diagnose niemals zweckfrei ist, sondern immer eine anschließende Intervention vorbereiten soll. Dies gilt insbesondere in unterrichtlichen Kontexten, in denen es um die Planung künftiger Lehr-Lernprozesse geht.

Weinerts fachübergreifende Definition muss für den jeweiligen Fachunterricht konkretisiert werden, um für Lehrerinnen und Lehrer handlungsleitend werden zu können. Im Rahmen einer solchen Konkretisierung weist Bernd Wollring auf die besondere Bedeutung der Eigenproduktionen von Schülerinnen und Schülern hin: „*Eine angemessene Unterrichtsorganisation [erfordert] fachspezifische diagnostische Kompetenz, um die mathematischen Beiträge der Kinder angemessen in den Unterricht einzubinden und möglicherweise eine Prävention gegen sich anbahnende Lernschwierigkeiten zu leisten. Den Kern mathematikdidaktischer Kompetenz bildet die Fähigkeit, sich mit den mathematischen Eigenproduktionen von Kindern auseinanderzusetzen.*" (Wollring 1999, 272) Aus der Sicht der Diagnose lassen sich „Eigenproduktionen" pointiert als individuelle Produkte von Schülerinnen und Schülern charakterisieren, die stärker durch eigene Worten und Gestaltungsmitteln als durch normierte Darstellungsweisen geprägt sind.

Solche Eigenproduktionen können eigene mündliche oder schriftliche Wortbeiträge, aber auch Skizzen, Grafiken, Bilder o. ä. sein. Formalisierte Lösungswege, die sich an vorgegebenen Darstellungskonventionen orientieren, geben hingegen kaum Aufschlüsse über individuelle Vorstellungen.

Aber gerade das Verstehen der individuellen mathematischen Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern bietet den Lehrerinnen und Lehrern die Möglichkeit, bei künftigen Lehr-Lernprozessen an vorhandenen Vorstellungen und Kompetenzen anzuknüpfen. Dies lässt sich in Abgrenzung von einer defizitorientierten Sichtweise im Konzept einer „kompetenzorientierten Diagnose“ skizzieren: „*Lehrerinnen sollten dazu die Möglichkeit einer kompetenzorientierten Diagnostik kennen lernen, die sich von einer ausschließlichen Feststellung und Analyse von Defiziten abgrenzt. (…) – Eine kompetenzorientierte Sichtweise versucht, durch Standortbestimmungen vor der Behandlung einer Thematik Informationen darüber zu erhalten, was die Kinder schon können.*“ (Scherer 1999, 170 f.)

Es ist nahe liegend, dass bei einer kompetenzorientierten Diagnose stärker das Verstehen von mathematischen Zusammenhängen und die Fähigkeiten zu mathematisieren im Vordergrund steht als die bloße Beherrschung von Rechenverfahren. Diese Zuspitzung lässt sich auch als „verstehensorientierte“ Diagnose darstellen (vgl. Büchter & Leuders 2005, 171 ff.).

Kompetenzorientierte Diagnose und individuelle Förderung

Die Integration von kompetenzorientierter Diagnose in den Unterrichtsalltag führt fast zwangsläufig zu einer stärkeren Differenzierung und Individualisierung des Unterrichts (sofern dieser nicht schon konsequent so gestaltet ist). Wenn nämlich die individuellen Vorstellungen und vorhandenen Kompetenzen aller Schülerinnen und Schüler in den Blick geraten, wird die ohnehin immer vorhandene Heterogenität der Lerngruppe sichtbar und fordert ihre Berücksichtigung fast von selbst ein. Diese Berücksichtigung muss allerdings nicht zwangsläufig durch unterschiedliche Lernarrangements für verschiedene Schülerinnen und Schüler stattfinden, sondern kann auch mit selbstdifferenzierenden Aufgaben (vgl. Büchter & Leuders 2005, 110 ff.) umgesetzt werden.

Dieser Aspekt der Differenzierung innerhalb einer Aufgabenstellung ist auch ein wichtiges Kriterium für geeignete Diagnose-Aufgaben:

Gute Aufgaben für eine kompetenzorientierte Diagnose

Die Basis für eine kompetenzorientierte Diagnose bilden Aufgaben, die Schülerinnen und Schüler anregen, Eigenproduktionen anzufertigen. Um solche Aufgaben auswählen oder entwickeln zu können benötigen Lehre-

rinnen und Lehrer geeignete Kriterien (für die Auswahl) und passendes Handwerkszeug (für die Entwicklung). Aufgaben für eine kompetenzorientierte Diagnose müssen

- *offen* sein, um individuelle Wege der Bearbeitung zuzulassen und so individuelle Vorstellungen sichtbar machen zu können,
- *differenzierend* sein, da sie im Unterrichtsalltag für mehrer Schülerinnen und Schüler geeignet sein müssen und alle auf ihrem Niveau einen Zugang finden müssen, um zu Eigenproduktionen angeregt zu werden,
- *authentisch bezüglich der angeregten Prozesse* sein, um Aufschlüsse über relevante mathematische Vorstellungen und Kompetenzen geben zu können.

(zur Übersicht vgl. Landesinstitut für Schule / Qualitätsagentur 2006a, 12 f.; zur Erläuterung der Begriffe vgl. Büchter & Leuders 2005).

Die genannten Kriterien lassen sich für die Auswahl von vorliegenden Aufgaben nutzen. Um eigenen Aufgaben entwickeln zu können, benötigen Lehrerinnen und Lehrer Handwerkszeug z. B. in Form von Konstruktionsheuristiken:

- *Geschlossene Aufgaben öffnen*, z. B. durch Umkehrung, Variation oder Weglassen von Informationen,
- *Differenzierung ermöglichen*, z. B. durch die Möglichkeit verschiedener Darstellungsarten, des Arbeitens mit Beispielen oder der Trennung von Problemlösungen und Begründungen,
- *Eigenproduktionen einfordern*, insbesondere Erläuterungen des eigenen Vorgehens („Begründe deine Entscheidung!“, „Beschreibe, wie du vorgegangen bist!“ o. ä.).

Die Umsetzung dieser Konstruktionsheuristiken findet man z. B. in Büchter & Leuders 2005, Kap. 5.1 oder in Landesinstitut für Schule / Qualitätsagentur 2006a.

Kompetenzorientierte Diagnose als Thema der Unterrichtsentwicklung

Aufgrund der Bedeutung von kompetenzorientierter Diagnose für gelingende Lehr-Lernprozesse haben sich die im Projekt 5 von SINUS-Transfer NRW (vgl. www.sinus.nrw.de; Landesinstitut für Schule / Qualitätsagentur 2006b) aktiven Lehrerinnen und Lehrer in der „ersten Welle“ damit beschäftigt ein praxistaugliches Konzept zu entwickeln und zu erproben sowie eine Vielzahl erprobter und kommentierter Aufgabenbeispiele in einer Publikation bereitzustellen (Landesinstitut für Schule / Qualitätsagentur 2006a).

Die Publikation enthält zehn ausführlich kommentierte Aufgabenbeispiele und 30 weitere Aufgabenbeispiele zu vielen Themen der Sekundarstufe I. Die Aufgabenbeispiele stehen zum Teil auf online im Materialpool (www.learn-line.nrw.de/angebote/sinus/projekt5/material/index.html) des Projekts zur Verfügung.

Literatur

Büchter, Andreas & Leuders, Timo (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Büchter, A. & Leuders, T. (2006). Was ist eine gute Aufgabe? Das kommt darauf an! (Erscheint in *Praxis der Naturwissenschaften – Chemie in der Schule*)

Landesinstitut für Schule / Qualitätsagentur (Hrsg.) (2006a). *Kompetenzorientierte Diagnose. Aufgaben für den Mathematikunterricht*. Stuttgart: Ernst Klett. (Auszüge stehen im Internet: www.learnline.de/angebote/sinus/projekt5/material/publikation.html)

Landesinstitut für Schule / Qualitätsagentur (Hrsg.) (2006b). *SINUS-Transfer NRW. Berichte aus dem Modellversuch.* Stuttgart: Ernst Klett.

Scherer, Petra (1999). Mathematiklernen bei Kindern mit Lernschwächen. Perspektiven für die Lehrerbildung. In Selter, Christoph & Walther, Gerd, *Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann*. Stuttgart: Ernst Klett.

Weinert, Franz E. (2000). Lehren und Lernen für die Zukunft – Ansprüche an das Lernen in der Schule. *Pädagogische Nachrichten Rheinland-Pfalz*, 2/2000.

Wollring, Bernd (1999). Mathematikdidaktik zwischen Diagnostik und Design. In Selter, Christoph & Walther, Gerd, *Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann*. Stuttgart: Ernst Klett.

Richard CABASSUT, richard.cabassut@alsace.iufm.fr, Strasbourg

Beweisen in Schulbüchern in Frankreich und Baden-Württemberg

Durch eine komparative Studie der Beweise von Kurstheoremen in Schulbüchern von Baden- Württemberg wir versuchen zu untersuchen, wie diese Beweise verwirklicht werden, und wie sie gerechtfertigt sind. Wir werden versuchen, die Ähnlichkeiten und die Unterschiede zwischen den zwei Ländern zu erklären, insbesondere, indem sie die diesen Beweisen zugeteilten Funktionen festlegen werden.

Methodologie:

Wir beschränken uns auf die Gymnasien des Baden-Württemberg und das Collège und danach das allgemeine Lycée in Frankreich. Diese zwei Stufen bereiten auf den Übergang auf die Universität vor, und der Beweis erscheint dort in den Programmen ungefähr im selben Alter als Lehrgegenstand: in Klasse 8 in Baden-Württemberg und in Klassen 7 und 8 in Frankreich (Cinquième et Quatrième). Wir untersuchen den Beweis der wichtigsten Kurstheoreme in den Schulbüchern der Sammlung Lambacher Schweizer, welches die verbreitetste Sammlung in Baden-Württemberg ist. Diese Wahl entspricht verschiedenen Kriterien: Zeitpunkt des ersten Beweises, Unterschied des Zeitpunkts im Vergleich zu Frankreich, mathematischer Bereich. Für jeden Beweis suchen wir einen vergleichbaren Beweis in einem französischen Handbuch. Wir wenden darin die Methodologie von [Clarke 2004] an, die darin besteht, zuerst ähnliche Gegenstände zusammenzutragen, um ihre Unterschiede zu beobachten. Wenn wir keine vergleichbaren Beweise finden, versuchen wir, die beobachteten Unterschiede zu erklären.

Theoretischer Rahmen der Studie des Beweises von Kurstheoremen

Wir analysieren den Beweis von Theoremen, indem wir folgendes verdeutlichen:

- die benutzten Arten von Argumenten, Notwendigkeitsargumente (wo die Schlussfolgerung notwendigerweise wahr ist) oder Vertretbarkeitsargumente (wo die Schlussfolgerung nur plausibel ist) [Toulmin 1996].
- die Techniken und die Technologie des Beweises. Die Technik gibt an, wie ein Ergebnis für gültig erklärt wird. Welche Darstellungsregister werden benutzt? Zum Beispiel welche Rückgriffe auf eine Tabelle, eine algebraische Berechnung, ein in alltäglicher Sprache verfasster Text, eine Darstellung, eine graphische Darstellung? Die Technologie rechtfertigt die benutzte Technik, zum Beispiel in der Mathematik wird die Technologie von den Definitionen, Eigenschaften oder Theoremen bestimmt [Chevallard 1992].
- die Funktionen des Beweises: Verifikation der Plausibilität oder der Notwendigkeit der Schlussfolgerung, Erklärung, Systematisierung, Entdeckung, Kommunikation [Knipping 2003,.26].

1 Die mathematische Technologie ist nicht mobilisierbar

1.1 ähnliche Beweise

Ein erstes Beispiel betrifft den ähnlichen Beweis des Theorems über die Summe der Winkel eines Dreiecks im selben Alter, in Klasse 7 oder in der

Cinquième. In den zwei Büchern beginnt der Beweis in einer ersten Etappe mit pragmatischen Argumenten, die Aktionen verwirklichen (Manipulation eines mecano, Zerlegen und Wiederzusammensetzen von Winkelsektoren). In einer zweiten Etappe benutzt man den Winkelmesser, um die Winkel einiger Dreiecke zu messen und zu prüfen, dass die Summe dieser Winkel konstant scheint. Man vermutet, dass die Summe der Winkel einen flachen Winkel ergibt. Hier wird die Funktion der Prüfung der Plausibilität des Ergebnisses durch den Rückgriff auf pragmatische Argumente erfüllt.

Ein zweiter Beweis benutzt Notwendigkeitsargumente, die die mathematische Technologie der entsprechenden, wechselständigen-intern oder zusätzlichen Winkel benutzen.

Er folgert die Notwendigkeit der Schlussfolgerung. Jedoch wird der Rückgriff auf ein visuelles Argument benutzt, um zu prüfen, dass Winkel zusätzlich sind, denn die Technologie der ……. Winkel , die diesen Rückgriff vermeiden könnte, ist auf diesem Niveau nicht verfügbar. Eine nicht mathematische Technologie, ein visuelles Argument (ich sehe also ist es wahr), ersetzt eine nicht verfügbare mathematische Technologie. Die Programme der zwei Länder erlauben diese Kombination von Plausibilitätsargumenten und von Notwendigkeitsargumenten.

1.2 unterschiedliche Beweise

In Frankreich, um die Formeln über den Kreis und die Volumen fester Körper für gültig zu erklären benutzt man von Klasse 6 bis 9 Plausibilitätsargumente:

- pragmatische Argumente: Rückgriff auf die Aktion, um Oberflächen oder feste Körper zu zerlegen und wieder zusammen zu setzten, Wasservolumen, die Hohlkörper ausfüllen, zu vergleichen, Größenmessungen.
- induktive Argumente um ein Grenzergebnis zu erhalten, oder um von Einzelfällen ausgehend zu verallgemeinern,
- Autoritätsargument (aus dem Buch), um ohne Rechtfertigung gelten zu lassen.

Diese nicht mathematischen Technologien (außer der Technologie der Berechnungen), erlauben die verifikative funktion der Plausibilität der Formeln zu erfüllen.

In Baden-Württemberg kombinieren die Beweise mathematische Technologien (ähnliche Darstellungen, Formeln der Flächen von Oberflächen oder Volumen von festen Körpern, Grundsatz von Cavalieri) und nicht mathematische Technologien (visuelle oder induktive Argumente, um ein Grenzergebnis zu erhalten), die helfen, mehrere Funktionen zu erfüllen:

- Verifikation der Formel (vertretbar oder wahr)
- Erklärung (indem man das Grenzergebnis illustriert)
- Entdeckung mit einer Propädeutik-Funktion im Grenzunterricht: "Den Schülerinnen und Schülern werden die Probleme EIB der Bestimmung von Umfang und Inhalt Kreises sowie Rauminhalts bestimmter Körper verständlich. Sie bekommen Einblick, wie eine propädeutische Grenzwertbetrachtung die Berechnung ermöglicht "[Ministerium

4/1994 481],

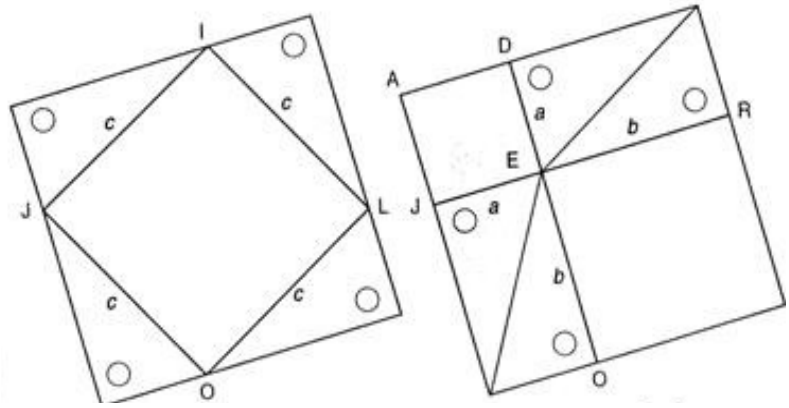
- Systematisierung: indem man eine elementare Bewertung jeder Formel vorschlägt insbesondere, indem man die vorher angefertigten Formeln benutzt.

Man kann die Unterschiede zwischen Frankreich und Baden-Württemberg durch institutionelle Unterschiede erklären. In Frankreich gehen alle Schüler in das Collège (Klasse 6 bis 9), die danach auf verschiedene Schultypen orientiert werden (Lehre, berufliche, technische oder allgemeine Gymnasien). Diese Formeln werden also früh behandelt, mit dem Ziel, von den Schülern benutzt werden zu können, die nicht auf ein allgemeines oder technisches Gymnasiums gehen werden (und insbesondere keinen Unterricht der Grenzen haben werden): ein formeller Beweis auf diesem Niveau ist nicht möglich, und eine Propädeutik an den Grenzen ist unnötig. Im Gegenteil dazu, fasst das Gymnasium in Baden-Württemberg Schüler zusammen, die einen Unterricht der Grenzen erhalten müssten: man kann also den Beweis später einführen (Klasse 10) mit einer Propädeutik am Unterricht der Grenzen mit einem formelleren Beweis als dem pragmatischen Beweis in Frankreich.

2 Die mathematische Technologie ist mobilisierbar

2.1 Die mathematische Technologie wird nicht mobilisiert

In den zwei französischen und deutschen Beweisen des Theorems von Pythagoras behauptet man, dass das JOLI-Viereck ein Viereck sei, ohne es zu beweisen, obwohl die Technologie der Winkel und der Vierecke es erlauben würden. Unsere Interpretation ist, dass das Theorem von Pythagoras als ein Theorem der Gleichheit von Flächen vorgestellt wird, sich also der Beweis auf die Technik der Flächenzerschneidung und Neuzusammensetzung konzentriert, und es wird nicht die Technik der Winkel in Anspruch genommen, um eine Ablenkung von der Hauptidee des Beweises zu vermeiden, die auf einer Technik der Flächen basiert.



2.2 Die mathematische Technologie wird mobilisiert

Man kann Beweise finden, die dieselben Techniken benutzen: zum Beispiel in den Beweisen der Lösungen einer quadratischen Gleichung benutzt man eine Setztechnik in kanonischer Form eines Binoms des

zweiten Grads, das durch die Technologien der algebraischen Berechnung gerechtfertigt ist. Man beobachtet jedoch andere Verträge auf dem Niveau der Redaktion mit mehr Rückgriffen auf die natürliche Sprache in Frankreich.

Dagegen für die Demonstration der Lösungen einer Ungleichung des zweiten Grads, die auf den Technologien der algebraischen Berechnung basiert, ist die in Lambacher-Schweizer benutzte Technik jene des Rückgriffs auf die graphische Darstellung einer Funktion des zweiten Grads. Diese weniger formelle Technik valorisiert die Funktionen der Erklärung und der Verifikation der Plausibilität. Dagegen wird im französischen Schulbuch die Technik der Zeichentabelle benutzt: diese Technik valorisiert die Kommunikationsfunktion mit einer formelleren Abhandlung, die die Funktion der Prüfung der Notwendigkeit valorisiert (systematische Studie aller Fälle in der Tabelle). Man beobachtet eine andere Benutzung derselben Techniken im entsprechenden Land, aber nicht im anderen Land: gäbe es dort einen kulturellen Faktor in der Benutzung einer Technik?

Schlussfolgerung:

Wir haben gesehen, dass die Bewertungen der Kurstheoreme Vertretbarkeitsargumente und Notwendigkeitsargumente kombinierten. Die Bewertung der Kurstheoreme ist die doppelte Umsetzung der mathematischen Beweise (indem die Notwendigkeitsargumente benutzt werden, die auf mathematischen Technologien basieren) und Beweise des täglichen Lebens oder der experimentellen Wissenschaften (die Plausibilitätsargumente benutzen (pragmatische, induktive, visuelle) und auf nicht mathematischen Technologien basiert sind).

Die Wahl der Techniken und der Technologien hängt von unterschiedlichen Faktoren ab: die institutionellen Bedingungen und die kulturellen Verträge die in diesen Institutionen benutzt werden, den mobilisierbaren mathematischen Technologien, den Funktionen, die den Beweisen zugewiesen wurden... Der Vergleich erlaubt, diese Wahl in Frage zu stellen: wurde sie bewusst getroffen? warum beweisen?

Literatur :

CABASSUT Richard (2005) Argumentation and proof in examples taken from French and German textbooks, *Cerme 4*

CLARKE David (2004) Issues of Voice and Variations : The Problematics of International Comparative Research in Mathematics Education, paper submitted to discussion group 11: *International comparaisons in mathematics education (ICME 10)*, Copenhagen, Denmark

CHEVALLARD Yves (1992) Fundamentals concepts of didactics : perspectives given by an anthropological approach, *Recherches en Didactiques des mathématiques* 17 (3), 17-54

KNIPPING Christine (2003) *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*, Verlag Franzbecker

STRÄßER Rudolf (1992) Didaktische Transposition – eine"Fallstudie" anhand der geometrie-Unterrichts, in *Journal Math. Didakt.* n°13, pp.231-252

TOULMIN Stephen .E. (1996) *Der Gebrauch von Argumenten*, Beltz Athenäum, 1996

Norbert CHRISTMANN, Kaiserslautern

Mathematik musikalisch gestaltet

Innerhalb der Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik der TU Kaiserslautern befassten wir uns in den letzten Jahren auf der Suche nach spannenden Themen für den Mathematikunterricht auch mit den Beziehungen zwischen Mathematik und Musik. Der Zusammenfassung, Ergänzung und Vertiefung dieser Ergebnisse sollte ein entsprechendes Seminar im WS 2005/2006 dienen. Materialien zu diesem Seminar (Ausarbeitungen der Studierenden, Unterlagen zu den öffentlichen Vorträgen und zum Abschlusskonzert) können auf der Lernplattform der TU Kaiserslautern (http://ecampus.uni-kl.de) eingesehen werden. Eines unserer Themen war die musikalische Gestaltung mathematischer Sachverhalte. Die dabei gefundenen drei Grobformen werden in diesem Vortrag kurz skizziert.

1 Lieder über Mathematik

Lieder über die Mathematik entstehen durch Dichten von neuen Texten zu bekannten Melodien (z. B. zum Satz des Pythagoras nach der Melodie zur Loreley), eventuell auch durch eigene Kompositionen (z. B. F. WILLE, Hauptsatzkantate). Besungen wird die Mathematik, die Musik (Melodie) enthält keine erkennbaren Bezüge zum mathematischen Sachverhalt. Ein Beispiel (Mel.: „Komm lieber Mai und mache..“) enthält Bild 1.

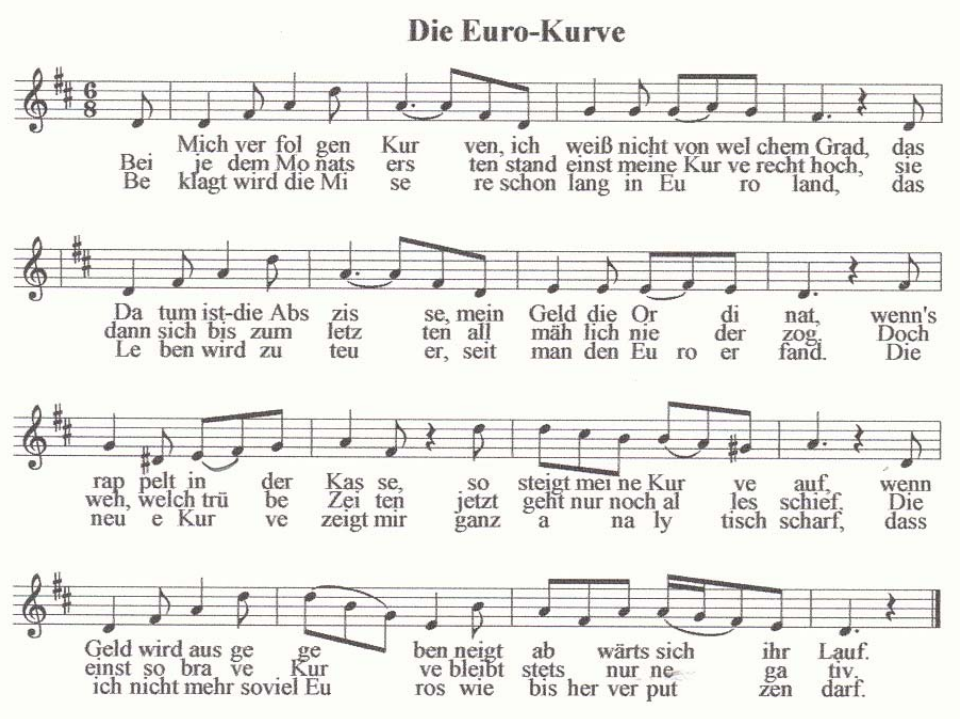


Bild 1 (nach W. Lietzmann: Lustiges und Merkwürdiges v. Zahlen und Formen, S. 36)

2 Mathematik musikalisch abgebildet

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Kompositionen, in denen mathematische Sachverhalte „isomorph“ in Musik umgesetzt werden.

Beispiel 1a: Tom Johnson: Tango („Permutationstango“)

Der in Paris lebende Komponist Tom Johnson hat viele mathematische Themen mit minimal–musikalischen Mitteln gestaltet (z. B. Mersennesche Zahlen, Pascal-Dreieck, Euler-Harmonie, Block-Design und in *Narayanas Kühe* die Rekursionsformel a(n+3) = a(n) + a(n+2), weitere Hinweise auf der Homepage des Komponisten). Sein für Klavier komponierter und Yvar Mikhashoff gewidmeter ***Tango*** aus dem Jahr 1984 (Edition 75 Paris) hat die 120 Permuationen einer fünfelementigen Menge zum Thema. Schreibt man die Permutationen in der Reihenfolge

12345	12354	12435	12453	12534	12543
13245	13254	13425	13452	13524	13542
14235	14253	14325	14352	14523	14532
15234	15243	15324	15342	15423	15432

auf und ordnet man nacheinander der 1, 2, 3, 4, 5 die Tonhöhen d’’, f’’, gis’’, a’’, ais’’ zu, so erhält man die im ersten „Satz“ von T. Johnson benutzte Tonhöhenfolge. Die mit 2 (3, 4, 5) beginnenden entsprechenden Permutationen ergeben dann die Folgen der Sätze 2 bis 5. Den Anfang des Werkes (einschließlich Intro und Stimme für die linke Hand) zeigt Bild 2.

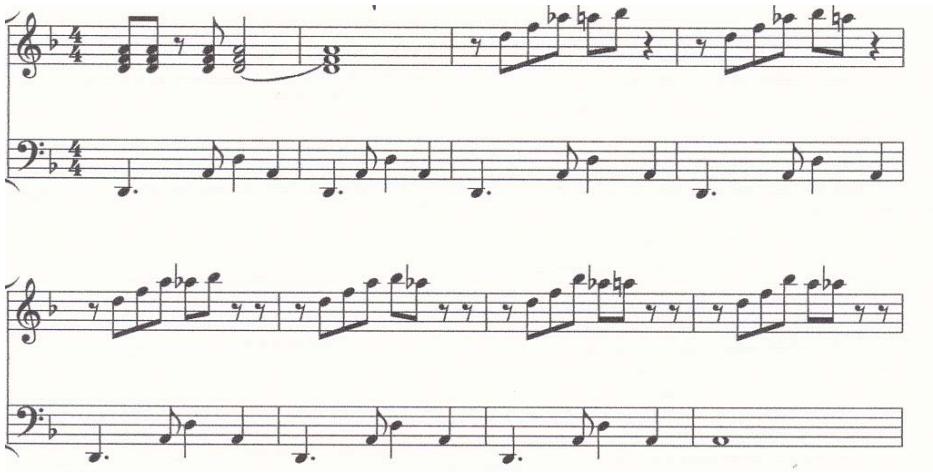


Bild 2 T. Johnson: Tango (Anfang)

Beispiel 1b: Der Tango OS

Eine einfache Variante des zuvor beschriebenen Tangos mit etwas mehr harmonischer Struktur erhält man, indem man für die einzelnen Takte eine Akkordfolge festlegt (z. B. einem andern Tango entnimmt) und die Permutation des Taktes dann auf die Töne dieses Akkordes (ergänzt durch ein

oder zwei weitere Töne) bezieht. Im Beispiel „Tango OS“ wird die Akkordfolge

d^m, d^m, g^m, g^m, a^7, a^7,d^m, d^m, //: d^7, d^7, g, e^m, e^m, a^7, d^m, d^m ://

genutzt (Bild 3)**.**

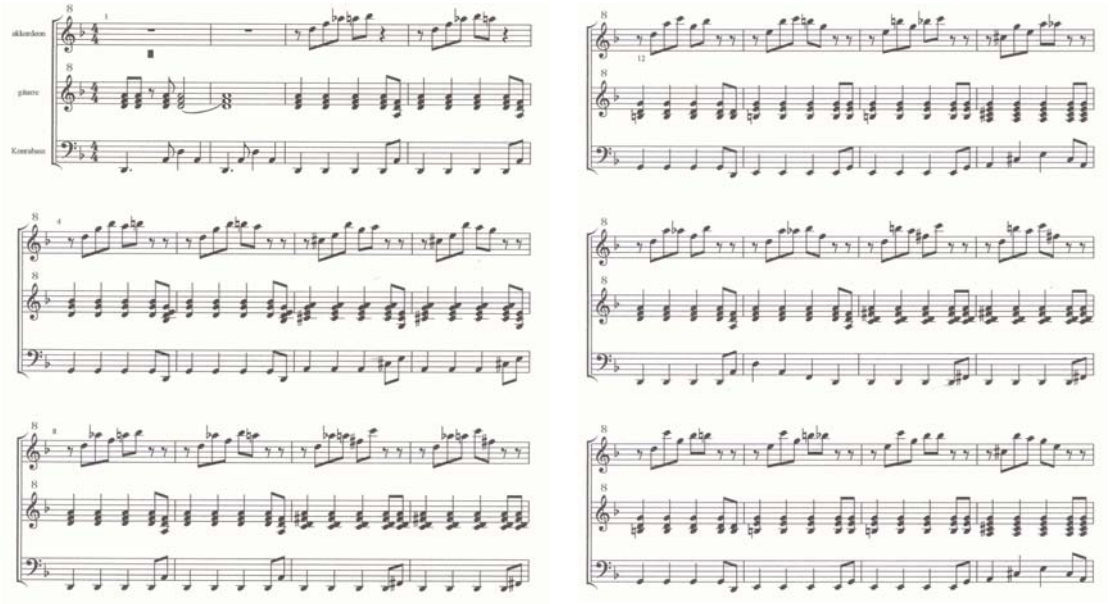


Bild 3: Tango OS (MIDI-File kann beim Autor angefordert werden)

Beispiel 2a: Jörg Schäffer: Fractions I (2000)

Der in München lebende Komponist Dr. Jörg Schäffer – promovierter Diplomchemiker – entnimmt mit der Vertonung mathematisch–naturwissenschaftlicher Sachverhalte die Themen seiner Kompositionen häufig seinem ursprünglichen Beruf (z. B. *periodic system*, *intermittenz I* (Feigenbaum-Diagramm)). In ***Fractions I***, einem für 12 Bläser geschriebenen Werk, werden die Stammbrüche 1/n (n < 47) zum Klingen gebracht.

Die (unendlichen) Dezimalbrüche werden als Zeichenketten über dem Alphabet 0, 1, …9, aufgefasst, durch die einander zugeordneten Paare

(0, Pause), (1,c’), (2,d’), …., (8,c’’), (9,d’’)

werden daraus Tonhöhenketten. Diese Zuordnung beinhaltet zwar eine „Phasenverletzung“ (1 und 8, 2 und 9 erhalten gleiche Tonhöhenklassen), wird aber wegen der im Vergleich zu anderen Zuordnungen besseren Durchschaubarkeit beibehalten. Bei den Notenwerten nutzt der Komponist im Falle ungerader Periodenlänge triolische Strukturen. Um mit 12 Instrumenten auszukommen führt er das Prinzip der „systematischen Auslöschung“ (aus 0.333333 wird 0.333xxx, x für Auslöschung) und Vorrangregeln ein. Die Komposition ist beendet, wenn die Motive der Periode aller periodischen (!) Dezimalbrüche 1/n, n = 1, 2, 3, … wenigstens einmal gleichzeitig mit den Motiven der Perioden aller anderen periodischen De-

zimalbrüche 1/m, m = 1, 2, 3, … (mit n ≠m, m < n und m, n mit wenigstens einem, zu 2 und 5 teilerfremden Faktor) erklungen sind. Weitere Details findet man in der Beschreibung des Komponisten auf der o.a. Lernplattform (einschließlich MIDI–Einspielung).

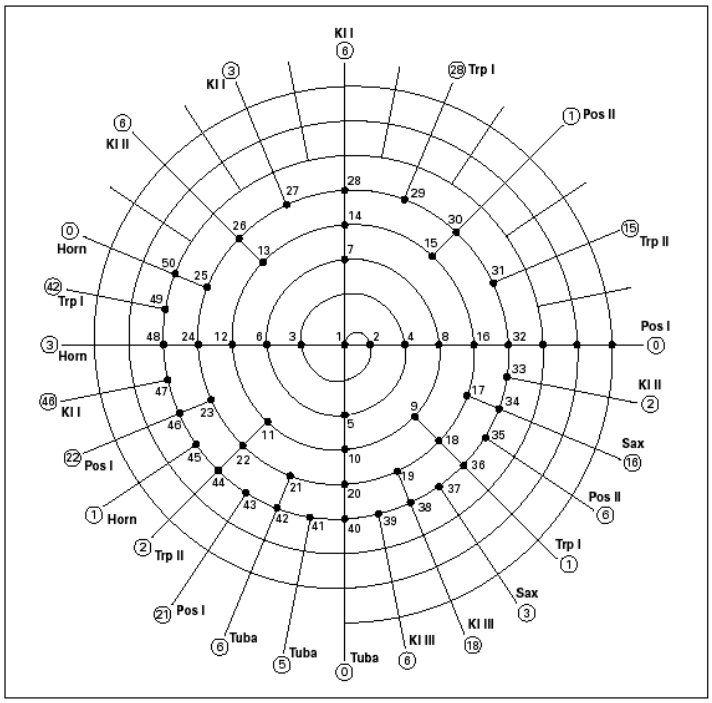


Bild 4: Besetzung und Zuordnung der Instrumente zu den Stammbrüchen mit Nenner n

Beispiel 2b: Fractions OS

Bei der Auffassung von Dezimalbrüchen als Zeichenketten wird nicht berücksichtigt, dass der „Wert“ der einzelnen Periodensequenzen immer geringer wird. Durch Verringern der Notenwerte und Lautstärke kann man einen unendlichen Dezimalbruch in endlicher Zeit einfangen (Ausnutzen von entsprechenden Parametern bei Sequenzerprogrammen).

3 Musikalisches Spielen mit mathematisch begründeten Motiven

Aus Platzgründen sei nur ein Beispiel angedeutet: Berechnet man für die Fibonacci-Folge 1, 2, 3, 5, 8,…. die 7-er-Reste, so erhält man nach Umrechnen in Tonhöhen (1 in c, 2 in d usw.) eine Tonhöhenfolge mit der Periode c, d, e, g, c, a, h, a, a, g, f, d, a, c, h, c. Dieses Motiv kann durch Hinzunehmen von Formelementen, Rhythmen einer Begleitautomatik usw. zu einem Walzer, Cha-Cha-Cha usw. ausgestaltet werden. Statt der hier vorgegebenen Skala kann man auch andere verwenden (z. B. Pentatonik, Zwölftonreihe), die Folge erweist sich in jedem Fall periodisch.

Weitere Informationen finden sich auf der o.a. Lernplattform oder können per Mail beim Autor (christmann@mathematik.uni-kl.de) angefordert werden.

Rainer DANCKWERTS, Siegen

Mathematiklehrerbildung Neu Denken: Ein Projekt der Deutschen Telekom Stiftung

1. Die Situation

Lehramtsstudierende für die Sekundarstufe II haben im Vergleich zu Diplomstudierenden in nur geringem Umfang eine "belastbare, affektiv unterstützte Beziehung zur Mathematik". Sie erleben, so die Studie Pieper-Seier 2002, ihr Studium deutlich weniger als Chance für vielseitige Lernerfahrungen und empfinden den Studienaufbau und die Lehrenden als viel weniger hilfreich. Kurz: Im gymnasialen Lehramtsstudiengang für das Fach Mathematik mangelt es vielfach an sinn- und identitätsstiftenden Erfahrungen.
Diese Sinnkrise hat vor allem inhaltliche und methodische Ursachen: Durch den klassischen axiomatisch-deduktiven Aufbau der Fachveranstaltungen an der Universität wird den Studierenden die Wissenschaft Mathematik in der Regel als fertiges, in sich geschlossenes System vermittelt. Eine genetische Perspektive des Lernens von Mathematik wird dadurch erschwert. Zudem wird unzureichend thematisiert, wie die Inhalte der Hochschulmathematik mit der später zu unterrichtenden Schulmathematik in Verbindung gebracht werden können. Hinzu kommt: Die Methoden der Vermittlung an der Universität sind einseitig fixiert auf die reine Instruktion durch die klassische Vorlesung, und die „Übungen" folgen in der Regel noch immer dem selben Instruktionsmuster, nicht selten sind sie reduziert auf ritualisiertes Vorrechnen von ‚perfekten' Musterlösungen.
Die so akzentuierte, traditionelle Fachausbildung ist eher produkt- und weniger prozessorientiert, und sie setzt eher auf die Instruktion durch die Lehrenden als auf die aktive Konstruktion des Wissens durch die Lernenden. In der Balance von *Produkt* und *Prozess* sowie von *Instruktion* und *Konstruktion* liegt der Schlüssel für eine Verbesserung der fachbezogenen Lehrerausbildung. Darüber hinaus wird seit langem beklagt, dass die ohnehin nicht gerade üppig verankerte fachdidaktische Ausbildungskomponente oft isoliert neben den fachwissenschaftlichen Anteilen steht.
Fazit: Die Defizite der gymnasialen Lehrerbildung im Fach Mathematik sind alt, gut beschrieben und unverändert aktuell.

2. Neuorientierung

Pointiert sind dies die ***Desiderate*** einer verbesserten universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik (vgl. Beutelspacher/Danckwerts 2005):

Inhaltlich

1. Zur prozessorientierten Auffassung der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin kann die **historisch-genetische Sicht** in besonderem Maße beitragen. Daher muss die Geschichte der Mathematik (ideengeschichtlich orientiert und curricular integriert) ihren festen Platz in den Fachstudien haben.

2. Zu einem gültigen prozessorientierten Bild von Mathematik gehört zwingend die Wechselwirkung zwischen der deduktiv organisierten Mathematik und ihren außermathematischen Anwendungen. Die **Anwendungen im Sinne modellbildender Aktivitäten** müssen die inhaltliche Auseinandersetzung mit den kanonischen Wissensbeständen der Mathematik durchdringen.
3. Ein fachlich souveräner Umgang mit den Themen des Mathematikunterrichts bahnt sich nicht von selbst an. Hierzu bedarf es eigener elementarmathematischer Lehrveranstaltungen, die die **Schulmathematik vom höheren** (aber nicht primär strukturmathematischen) **Standpunkt** behandeln und sich insbesondere der Analyse ihres Sinns und ihrer Bedeutung widmen.
4. Die Erstbegegnung mit der **fachdidaktischen Ausbildungskomponente** ist früh zu integrieren und muss eine Brückenfunktion erfüllen: Sie gibt den hier beschriebenen fachwissenschaftlichen Anteilen eine fachdidaktische Dimension und ist anschlussfähig für das künftige didaktische Handlungsrepertoire des Fachlehrers.

Methodisch

Guter Mathematikunterricht bedarf der fruchtbaren **Balance zwischen Instruktion** (der Schüler durch den Lehrer) **und Konstruktion** (durch den Schüler selbst). Angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer müssen diese Balance selbst erfahren; sie müssen in ihrem eigenen Lernprozess erleben, wie mathematische Wissensbildung geschieht. Daher gilt es, insbesondere die klassischen Übungen zu den Vorlesungen zu restrukturieren: Sie müssen der identitätsstiftende Ort für die Thematisierung von fachlichen Lern*prozessen* sein und der Ausbildung **heuristischer Fähigkeiten** genügend Raum geben.

Das Ziel der Ausbildung liegt im Aufbau eines kognitiven und motivationalen Fundaments, das dem berechtigten Anspruch von Lehramtsstudierenden nach fachbezogener Professionalität Rechnung trägt.

3. Das Projekt der Deutschen Telekom Stiftung

Das Pilotprojekt (Laufzeit 2 Jahre) stützt sich auf die skizzierte Neuorientierung und macht zunächst einen konsequenten pragmatischen Versuch der Implementation des ersten Studienjahres (Beginn WS 2005/06) an der Universität Gießen mit dem Lernbereich Lineare Algebra (Leitung: A. Beutelspacher) und an der Universität Siegen mit dem Lernbereich Analysis (Leitung: R. Danckwerts). Inhaltliches Ziel des Siegener Teilprojekts im ersten Studienjahr ist die enge Verzahnung der vier Bereiche “Schulanalysis“, “kanonische Hochschulanalysis“, “Geschichte der Analysis“ und “Didaktik der Analysis“.

Das Siegener Teilprojekt (WS 2005/06, 1. Semester)

Neuorientierung des Lernbereichs **Analysis** für Studienanfänger
mit den beiden Veranstaltungen

Die "Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ nimmt die zentralen Themen vertrauter Schulanalysis auf und reflektiert sie so („höherer Standpunkt“), dass die gewonnenen Einsichten anschlussfähig sind für die fachwissenschaftlich-systematische Vertiefung in der „Analysis I“ ebenso wie für die “Didaktik der Analysis“ im 2. Semester.
Überdies integriert die „Analysis I“ durchgängig die ideengeschichtliche Sicht der Analysis.
Im „Forum“ wird der inhaltliche Brückenschlag zwischen beiden Veranstaltungen explizit mit den Studierenden thematisiert.
Zentral ist die eigenaktive Auseinandersetzung der Studierenden in allen Veranstaltungsteilen, insbesondere in neu gestalteten Übungen, die über Arbeitsblätter, neue Aufgabenformate und individuelle Betreuungsangebote strukturiert sind.

Erste Ergebnisse

Das Konzept wird mit überwiegend sehr anerkennender Zustimmung angenommen. Hierzu einige Zitate aus der Veranstaltungsevaluation (anonym) zur “Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ in der Rubrik „Was mir gefallen hat“:

> *„Das tiefe Verständnis, welches uns vermittelt wurde: Problemstellungen wurden gemeinsam erarbeitet und gelöst und es wurde immer versucht, tatsächlich an das Vorwissen und die Vorerfahrungen der Studenten anzuknüpfen und die behandelten Inhalte mit dem späteren Beruf in Bezug zu setzen.“*
>
> *„Ich fand es gut und vor allem hat es mir auch sehr viel geholfen, dass die Inhalte immer irgendwie vernetzt und in einen größeren Zusammenhang eingebunden waren: zu Sachen, die wir in der Schule drangenommen hatten, zu anderen Teilgebieten der Mathematik, zu historischen Entwicklungen, zu schon behandelten Themen…ich glaube, dass das vor allem auch für später ungemein wichtig ist und einem im Beruf weiterhilft.“*
>
> *„Von der bloßen Anwendung zum Verstehen!! Das tiefe Verständnis des Stoffs und nicht nur das Kennen des Stoffes!!“*

> *„Mein Schulwissen wurde mit einbezogen, „aufgearbeitet“ und vertieft und dabei habe ich scheinbar Bekanntes aus einem neuen Blickwinkel kennen gelernt: parallele Deutungsmodelle also für ein und dasselbe Problem.“*

Zum Abschluss des Semesters gibt es vom 17. bis 19.3.2006 eine erste Begegnung der Siegener Studierenden mit ihren Kommilitonen des Gießener Teilprojekts. Im Rahmen dieser auswärtigen Tagung werden Studierende beider Standorte in Sektionsvorträgen den anderen berichten, was sie gelernt haben.

Literatur

A. Beutelspacher; R. Danckwerts (2005): Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt. Programmatische Vorstudie für die Deusche Telekom Stiftung

I. Pieper-Seier (2002): Lehramtsstudierende und ihr Verhältnis zur Mathematik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim 2002, S.395 - 398

Timo EHMKE, Kiel & Frauke ULFIG, Oldenburg

PISA 2003: Ergebnisse zur mathematischen Kompetenz und zum Problemlösen in den Ländern der Bundesrepublik Deutschland

Mit der von der KMK in Auftrag gegebenen PISA-Erweiterungsstudie (PISA-E) informiert das PISA-Konsortium über den Bildungsstand der Fünfzehnjährigen in den Ländern der Bundesrepublik Deutschland. PISA untersucht dabei die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler in Mathematik (Schwerpunkt) und den Bereichen Lesen, Naturwissenschaften und Problemlösen. Zusätzlich werden Informationen über den Hintergrund (familiär und soziokulturell) und Bedingungen von Schule und Unterricht berücksichtigt.
Um die Länder aussagekräftig vergleichen zu können, musste die international verbindliche Stichprobe um ca. 1300 zusätzliche Schulen aufgestockt werden. An PISA-E haben insgesamt 44.580 Schülerinnen und Schüler aus 1487 Schulen teilgenommen. Die Schulen wie auch die Schülerinnen und Schüler wurden per Zufall für den Test ausgewählt (Prenzel, Baumert, Blum, Lehmann, Leutner, Neubrand, Pekrun, Rost & Schiefele, 2005).

Die mathematische Kompetenz im Ländervergleich

Im internationalen Vergleich liegt die mittlere Kompetenz in Deutschland mit 503 Punkten nahe am OECD-Durchschnitt von 500 Punkten (Blum, Neubrand, Ehmke, Senkbeil, Jordan, Ulfig & Carstensen, 2004). Die innerhalb der Länder erreichten Kompetenzniveaus variieren zwischen 471 Punkten in Bremen und 533 Punkten in Bayern (Neubrand, Blum, Ehmke, Jordan, Senkbeil, Ulfig & Carstensen, 2005). Diese Spannweite von 62 Punkten entspricht dem Kompetenzzuwachs von etwa 1,5 Schuljahren. Damit sind zwischen den Ländern erhebliche Kompetenzunterschiede zu beobachten.
Für die Mathematik wurden in PISA 2003 vier Inhaltsbereiche mathematischer Kompetenz untersucht: Quantität, Veränderung & Beziehungen, Raum & Form und Unsicherheit. Die Länder weisen in diesen Bereichen spezifische Stärken und Schwächen auf. Im internationalen Vergleich zeichnen sich die Schülerinnen und Schüler in Deutschland durch eine relative Stärke in „Quantität“ aus. Nahezu alle Länder weisen hier im Vergleich zur Gesamtskala um etwa 10 Punkte höhere Kompetenzwerte auf. Ebenso kann der Inhaltsbereich „Veränderung & Beziehungen“ zu den

relativen Stärken der Fünfzehnjährigen gezählt werden. Der Abstand zu den internationalen Spitzenländern fällt für diesen Bereich jedoch größer aus als bei „Quantität“. Im Inhaltsbereich „Raum & Form“ liegen die durchschnittlichen Kompetenzwerte von vier Ländern (Bayern, Sachsen, Baden-Württemberg und Thüringen) statistisch bedeutsam über dem OECD-Mittelwert. Deutliche Schwächen werden im Inhaltsbereich „Unsicherheit“ offenbar. Nur drei Länder (Bayern, Sachsen und Baden-Württemberg) erreichen hier Mittelwerte, die im OECD-Durchschnittsbereich liegen. Das Kompetenzniveau in allen anderen dreizehn Ländern, liegt signifikant unter dem OECD-Mittel. Bemerkenswert ist, dass sich die bereits im internationalen Vergleich identifizierten relativen Stärken und Schwächen der Fünfzehnjährigen in Deutschland insgesamt auch in nahezu allen Ländern wiederfinden lassen. Auch variieren die Positionen der Länder im nationalen Vergleich über die vier Inhaltsbereiche hinweg nur geringfügig.
Da PISA in 2003 teilweise identische Testaufgaben wie in PISA 2000 eingesetzt hat, kann für die beiden mathematischen Inhaltsbereiche „Veränderung und Beziehungen“ und „Raum und Form“ geprüft werden, ob in der Kompetenzentwicklung Fortschritte erzielt worden sind. Im ersten Inhaltsbereich sind in allen Ländern Zunahmen zu verzeichnen. Sie reichen von 10 Punkten (Nordrhein-Westfalen) bis zu 49 Punkten (Sachsen-Anhalt). Im zweiten Inhaltsbereich fallen die Zuwächse insgesamt etwas geringer aus (Neubrand et al., 2005, S. 75f).

Die Problemlösekompetenz im Ländervergleich

Als fächerübergreifende Kompetenz stand in PISA 2003 das Problemlösen im Mittelpunkt. Man untersucht hiermit die Fähigkeit, kognitive Prozesse zu nutzen, um reale, fächerübergreifende Problemstellungen zu lösen, bei denen der Lösungsweg nicht unmittelbar erkennbar ist (Leutner, Klieme, Meyer & Wirth, 2004). Die Aufgaben setzen drei Arten von Problemstellungen um (Entscheidungen treffen, Systemen analysieren und entwerfen sowie Fehler suchen) und beziehen sich auf Anforderungen außerhalb der Schule.
Beim internationalen Vergleich der Problemlöseleistungen fielen das hohe Niveau und die relativ geringe Streuung im Problemlösen für die Fünfzehnjährigen aus Deutschland auf, im Gegensatz zu den anderen Kompetenzbereichen. Dieses Bild zeigte sich auch bei den Ergebnissen von PISA-E: Fünf Länder (Bayern, Sachsen, Baden-Württemberg, Thüringen, Schleswig-Holstein) liegen signifikant über dem OECD-Mittelwert und zehn Länder im Durchschnittsbereich.

Mathematik- und Problemlösekompetenz im Vergleich

Die kognitiven Anforderungen des internationalen Problemlösetests überschneiden sich mit Anforderungen in den Kompetenzbereichen Lesen, Naturwissenschaften und Mathematik. Besonders ausgeprägt sind die Ähnlichkeiten des analytischen Problemlösens mit der mathematischen Kompetenz, wie die latente Korrelation ($r = 0.89$) zwischen diesen beiden Tests belegt. Ein bemerkenswertes Ergebnis vom internationalen Vergleich zeigte allerdings: Jugendliche in Deutschland erreichen beim analytischen Problemlösen (Gesamtmittelwert von 513 Punkten) einen höheren Kompetenzstand als in der Mathematik (Gesamtmittelwert von 503 Punkten).
Deutschland zählt damit zu einer kleinen Gruppe von Staaten (zusammen mit Ungarn, Japan, und Neuseeland), in denen die Problemlösekompetenz höher ausgeprägt ist als die mathematische Kompetenz. Im Gegensatz dazu ist etwa in den Niederlanden die Mathematikkompetenz um 13 Punkte höher als die Problemlöseleistung.
Vergleicht man die durchschnittlichen Kompetenzniveaus in Problemlösen und Mathematik in den einzelnen Ländern innerhalb von Deutschland, dann schneiden nahezu alle Länder besser im Problemlösen ab als in Mathematik. Offensichtlich erreichen die deutschen Schülerinnen und Schüler in Mathematik im Mittel mit 10 Punkten deutlich geringere Kompetenzen als aufgrund ihrer Problemlösefähigkeit zu erwarten wäre (Leutner, Klieme, Meyer & Wirth, 2005). Dies zeigt sich besonders deutlich im unteren Leistungsbereich. Man kann dies dahingehend interpretieren, dass die Fünfzehnjährigen über kognitive Potentiale verfügen, die nur unzureichend in fachliche Kompetenz umgesetzt werden.
Ausnahmen von diesem Befund zeigen sich nur in den Ländern, die eine relativ hohe mathematische Kompetenz erreichen (etwa Bayern, Sachsen, Thüringen). In diesen Ländern scheint es besser zu gelingen, die beim Problemlösen deutlich gewordenen kognitiven Potentiale für den Aufbau von mathematischer Kompetenz zu nutzen. Auch ist denkbar, dass es zu einem positiv verstärkendem Rückkopplungsprozess kommt, in dem eine erhöhte Mathematikkompetenz steigernd auf die Problemlöseleistung wirkt (Leutner et al., 2005, S. 143f).
Der Problemlösekompetenz kommt damit ein dualer Charakter zu: Einerseits baut sie auf Wissen auf, das in der Schule erworben wurde und intelligent angewendet werden muss. Andererseits kann Problemlösekompetenz auch durch die Bewältigung von alltäglichen Problemstellungen trainiert und geübt werden. Dies kann wiederum zu einer Vertiefung und Erweiterung des in der Schule erworbenen Fachwissens führen. Für die Schule

ergibt sich hier die fachdidaktische Herausforderung diesen Prozess anzustoßen und für die Vermittlung von Fachwissen nutzbar zu machen.

Literatur

Blum, W., Neubrand, M., Ehmke, T., Senkbeil, M., Jordan, A., Ulfig, F. & Carstensen, H. C. (2004). Mathematische Kompetenz. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, H.-G. Rolff, J. Rost, U. Schiefele & P.-K. Deutschland) (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 47-92). Münster: Waxmann.

Leutner, D., Klieme, E., Meyer, K. & Wirth, J. (2004). Problemlösen. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, H.-G. Rolff, J. Rost & U. Schiefele (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 147-175). Münster: Waxmann.

Leutner, D., Klieme, E., Meyer, K. & Wirth, J. (2005). Die Problemlösekompetenz in den Ländern der Bundesrepublik Deutschland. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, J. Rost & U. Schiefele (Hrsg.), *PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland - Was wissen und können Jugendliche?* (S. 125-146). Münster: Waxmann.

Neubrand, M., Blum, W., Ehmke, T., Jordan, A., Senkbeil, M., Ulfig, F. & Carstensen, H. C. (2005). Mathematische Kompetenz im Ländervergleich. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, J. Rost, U. Schiefele & P.-K. Deutschland) (Hrsg.), *PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland - Was wissen und können die Jugendlichen?* (S. 51-84). Münster: Waxmann.

Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rost, J. & Schiefele, U. (Hrsg.). (2005). *PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland – Was wissen und können Jugendliche?* Münster: Waxmann.

Andreas EICHLER, Bielefeld

Zusammenhänge zwischen der lehrerspezifischen Planung und des Lernergebnisses im Bereich der Stochastik

„Es ist das subjektive, schulbezogene Wissen des Lehrers – ob ihm mehr oder weniger klar –, das weitgehend die Realität in den Klassenzimmern bestimmt." (Hofer, 1981, S.5)

Dieses Zitat liegt 25 Jahre zurück und ist als Aufruf zu verstehen, die Lehrerinnen und Lehrer als Experten ihres Unterrichts in die Forschung mit einzubeziehen. Diese Forderung ist bis heute bis auf wenige Ausnahmen allgemein in der Mathematikdidaktik und speziell in der Stochastikdidaktik nicht eingelöst worden. So steht etwa in der Stochastikdidaktik einer nahezu unüberschaubaren Menge von Vorschlägen zu allen Bereichen des Stochastikcurriculums ein nur sehr vages Wissen gegenüber, welche Inhalte unterrichtet werden, welche Ziele damit verfolgt werden und welche Wirkung der lehrerspezifische Unterricht bei den Schülern hinterlässt. Akzeptiert man aber, dass das Denken der Lehrerinnen und Lehrer der Schlüsselfaktor bei jeder Bestrebung einer Reform des Mathematikunterrichts ist (Chapman, 1999), dann muss die Forderung von Hofer auch in den Forschungsfokus der Mathematikdidaktik rücken, so, wie es in der internationalen didaktischen Forschung bereits sehr viel häufiger geschieht.

Ein qualitativer Ansatz, das curriculare Handeln von Lehrerinnen und Lehrern und dessen Wirkung auf die Schüler zu verstehen, wird im Folgenden skizziert. Ausgangspunkt dieses von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) unterstützten Projekts ist die Arbeit von Eichler (2005), in der die individuelle Planung von Lehrerinnen und Lehrern – ihre individuellen Curricula – in der Stochastik untersucht wurde. Hier wird darauf aufbauend eine Fragestellung angerissen:

- Welche Zusammenhänge lassen sich zwischen der lehrerspezifischen Planung (individuelles Curriculum) und dem Lernergebnis ihrer Schüler (realisierte Curricula) erkennen?

Anmerkungen zum theoretischen Rahmen

Der im Allgemeinen nicht fest definierte Begriff Curriculum bezieht sich nach einem Vorschlag von Vollstädt et al. (1999) auf den Stoffinhalt des Unterrichts und dessen Begründung. Der Begriff *individuelles Curriculum* umfasst die (längerfristige) Planung des Stochastikunterrichts. Das *tatsächliche Curriculum* umfasst das im Unterricht beobachtbare, durch die Lehrerinnen und Lehrer umgesetzte Curriculum, und schließlich repräsentiert das *realisierte Curriculum* das durch den Unterricht bei einem Schüler erreich-

te Lernergebnis. Im psychologischen oder auch soziologischen Sinne stellen die drei Curriculumsebenen des individuellen, tatsächlichen und realisierten Curriculums Aspekte der Handlung von Lehrkräften und Schülern dar, die nicht in Gänze beobachtbar, sondern allein interpretativ zu erschließen sind.

Die Untersuchung basiert – ausgehend von der bisherigen mathematikdidaktischen Forschung zu Lehrerkognitionen – auf der Verbindung sozialpsychologischer, soziologischer und pädagogischer Konstrukte, die wiederum auf dem (psychologischen) Handlungsbegriff fußen:

- Das sozialpsychologische Konstrukt der Subjektiven Theorien dient der Beschreibung eines einzelnen individuellen Curriculum in Verbindung mit dem zugehörigen tatsächlichen Curriculum sowie eines einzelnen realisierten Curriculums in seiner Struktur (vgl. Groeben et al. 1988).
- Die innere Strukturierung der individuellen Curricula bzw. subjektiven Theorien orientiert sich am Vorschlag der Ziel-Mittel-Argumentationen nach König (1975), die innere Strukturierung der realisierten Curricula am Vorschlag der Heidelberger Struktur-Lege-Technik nach Scheele/Groeben (1988).

Das methodische Vorgehen basiert auf den Prinzipien der Einzelfallstudie. Als Fälle gelten neun individuelle Curricula niedersächsischer Gymnasiallehrerinnen und -lehrer. In zwei Fällen fand hinsichtlich der Erhebung der tatsächlichen Curricula über ein Halbjahr hinweg eine Unterrichtsbeobachtung in einem Leistungskurs 12 statt. In beiden Fällen wurden von je fünf Schülerinnen ebenfalls nach den Prinzipien der Einzelfallstudie die realisierten Curricula erhoben. Die interpretative Auswertung der Interviewtranskripte (individuelle und realisierte Curricula) orientiert sich an den Prinzipien der klassischen Hermeneutik (vgl. Danner 1998). Sie ist der Ausgangspunkt der Rekonstruktion der individuellen Curricula in Form von Ziel-Mittel-Argumentationen bzw. der realisierten Curricula in Form von Strukturbildern im Sinne der Heidelberger Struktur-Lege-Technik, durch die sich die Vorstellungen der Lehrkräfte und ihrer Schüler in strukturierter und formalisierter Weise darstellen lassen. Die fallübergreifende Analyse umfasst die Identifizierung von ähnlichen oder identischen Elementen der Kognitionsstrukturen und deren Verdichtung zu Typen individueller Stochastikcurricula (vgl. Kelle/Kluge 1999).

Anmerkungen zu den Ergebnissen

Der Interpretationsprozess ist hier nicht darstellbar (vgl. dazu Eichler 2005). Ergebnis der Einzelfallanalysen sind fünf zentrale Aspekte individueller Stochastikcurricula von Lehrerinnen und Lehrern: (1) der Stoffinhalt

des Stochastikcurriculums, (2) die Ziele, die mit diesem Stoffinhalt verbunden werden, (3) die Einbettung dieser Ziele in Ziele des Mathematikcurriculums, (4) Zielüberlegungen, die sich auf den Nutzen des Mathematikunterrichts für die Schüler beziehen und (5) Zielüberlegungen, die aus Sicht der Lehrkräfte erfolgreiches Unterrichten ermöglichen.

Durch den fortwährenden Vergleich der Einzelfälle ergeben sich Gemeinsamkeiten für die genannten fünf Aspekte, durch die sich vier Typen individueller Stochastikcurricula konstruieren lassen: Die Traditionalisten, die Anwendungsvorbereiter, die Strukturalisten und die Alltagsvorbereiter. Im Folgenden wird aus Platzgründen nur der Aspekt 1 eines Repräsentanten des letztgenannten Typus', Herr D, den Vorstellungen seiner Schüler beschreibend gegenübergestellt.

Stoffinhalt des Stochastikcurriculums (Aspekt 1): Herr D behandelt den *klassischen Block* der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bestehend aus den Begriffen Zufallsexperiment, frequentistischer und klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff, Kombinatorik sowie die Binomialverteilung und ihre Momente. Innerhalb der beurteilenden Statistik behandelt er ebenfalls einen *klassischen Block*, bestehend aus Konfidenzintervallen und Hypothesentests, die auf der Binomialverteilung basieren. Ein Zusatz besteht in der die Hypothesentests vorbereitenden Betrachtung von Vierfeldertafeln und dem exakten Vierfeldertest. Schließlich betrachtet Herr D in einem Exkurs (bezogen auf die Konzeption, nicht auf den zeitlichen Umfang) Ansätze der Bayes-Statistik.

Bei den Schülerinnen und Schülern von Herrn D lassen sich folgende Phänomene hinsichtlich ihres realisierten Curriculums feststellen, das im Sinne von Krauss et al. (2004) in die Kategorien deklaratives, konzeptionelles und prozedurales Wissen eingeteilt ist:

- deklaratives Wissen: Die Schüler unterschieden sich hinsichtlich der Anzahl erinnerter Begriffe und der Fähigkeit, Beispiele für die Begriffe zu nennen. „Starke" Schüler erinnern gleichermaßen viele Begriffe und können diese jeweils mit verschiedenen Beispielen belegen. „Mittelstarke" Schüler erinnern entweder eine ganze Anzahl von Begriffen, ohne Beispiele nennen zu können, oder erinnern eine größere Anzahl von Beispielen, ohne diese einem Begriff zuordnen zu können. „Schwächere" Schüler können nach einem halben Jahr Stochastik weder auf begrifflicher noch auf beispielsbezogener Ebene argumentieren. Interessant ist, dass die größten Lücken im Exkurs zur bedingten Wahrscheinlichkeit bzw. der Bayes-Statistik bestehen.
- konzeptionelles Wissen: Bei allen Schülern sind eine mehr oder minder große Anzahl der erinnerten Begriffe und Beispiele unverbunden. Diese

werden quasi kapitelweise reflektiert: „Zufallsexperiment, ich glaube das haben wir ganz am Anfang gemacht“ (Anna). Ebenso werden etwa die Binomialverteilung nicht mehr in Verbindung mit den Hypothesentests oder die Begriffe Abhängigkeit/Unabhängigkeit in Verbindung mit der Vierfeldertafel gebracht.

- prozedurales Wissen: primär können zu dieser Kategorie grafische oder halbgrafische Verfahren wie der Wahrscheinlichkeitsbaum oder die Vierfeldertafel rekonstruiert werden. Wesentlich vager ist die Beschreibung zu Algorithmen wie etwa dem standardisierten Vorgehen beim Hypothesentest. Konkrete Formeln jeglicher Art werden nicht erinnert. Das gilt sowohl für komplexe Formeln wie etwa für die Binomialverteilung, aber auch für ‚einfache’ wie die Formel von Laplace.

Die hier skizzierten Ergebnisse wie auch die Verbindungen zwischen den anderen Aspekten individueller und realisierter Curricula zeigen zunächst nur die Unterschiedlichkeit auf der gleichen Basis entstandenen realisierten Curricula, die nicht immer mit den vom Lehrer intendierten Ergebnissen übereinstimmen. Für die Identifizierung von Zusammenhangs-Mustern zwischen individuellen, tatsächlichen und realisierten Curricula ist dagegen die Erhebung weiterer Fälle notwendig.

Literatur:

Chapman, O. (1999). Researching Mathematics Teacher Thinking. *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 23, Vol. 2, 385-392.

Danner, H. (1998): *Methoden geisteswissenschaftlicher Pädagogik*. Tübingen: UTB.

Eichler, A. (2005): *Individuelle Stochastikcurricula von Lehrerinnen und Lehrern*. Hildesheim: Franzbecker.

Groeben, N., Wahl, D., Scheele, B., Schlee, J. (1988): *Forschungsprogramm Subjektive Theorien*. Tübingen: Franke.

Hofer, M. (1981): *Informationsverarbeitung und Entscheidungsverhalten von Lehrern*. München: Urban und Schwarzenberg.

Kelle, U., Kluge, S. (1999). *Vom Einzelfall zum Typus*. Opladen: Leske + Buderich.

König, E. (1975). *Theorie der Erziehungswissenschaft*, Bd. 1-3. München: Wilhelm Fink Verlag.

Krauss, S. Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J. Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A., Löwen, K. (2004): COACTIV: Professioneswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In Doll, J., Prenzel, M. (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule* (S.31-53). Münster: Waxmann.

Scheele, B., Groeben, N. (1988). *Dialog-Konsens-Methoden zur Rekonstruktion Subjektiver Theorien*. Tübingen: Franke.

Vollstädt, W., Tillmann, K.-J., Rauin, U., Höhmann, K., Tebrügge, A. (1999): *Lehrpläne im Schulalltag*. Opladen: Leske + Buderich.

Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Düsseldorf

Lernmethoden-Kompetenzen, auch im MU

In der Folge von TIMMS und PISA gab es mit den Bildungsstandards der KMK grundlegende bildungspolitische Änderungen. Die Fokussierung auf Inhalte (Was soll gelehrt werden?) wurde durch die Fokussierung auf Kompetenzen (Was sollen die Schüler gelernt haben?) abgelöst. Dies bringt Klieme in seiner Expertise auf den Punkt: Die Bildungsstandards „benennen präzise, verständlich und fokussiert die wesentlichen Ziele der pädagogischen Arbeit, ausgedrückt als erwünschte Lernergebnisse der Schüler. […] Sie legen fest, welche Kompetenzen die Kinder oder Jugendlichen bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe mindestens erworben haben sollen."

Für das Fach Mathematik wurden von der KMK zwei Kompetenzbereiche benannt: *allgemeine mathematische Kompetenzen* und *inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen*. Erwartet man, dass dies in Deutsch und Englisch analog gehandhabt wird, erlebt man eine Überraschung. In Englisch gibt es drei Kompetenzbereiche (*funktionale kommunikative Kompetenzen, interkulturelle Kompetenzen, methodische Kompetenzen*) und in Deutsch vier Kompetenzbereiche (*Sprache und Sprachgebrauch untersuchen, Sprechen und Zuhören, Schreiben, Lesen – mit Texten und Medien umgehen*). Ein ähnlich buntes Bild – aber nicht ganz so überraschend – zeigen auch die Aussagen der Bildungsstandards zum Arbeiten mit Medien (siehe Übersicht in Elschenbroich 2006).

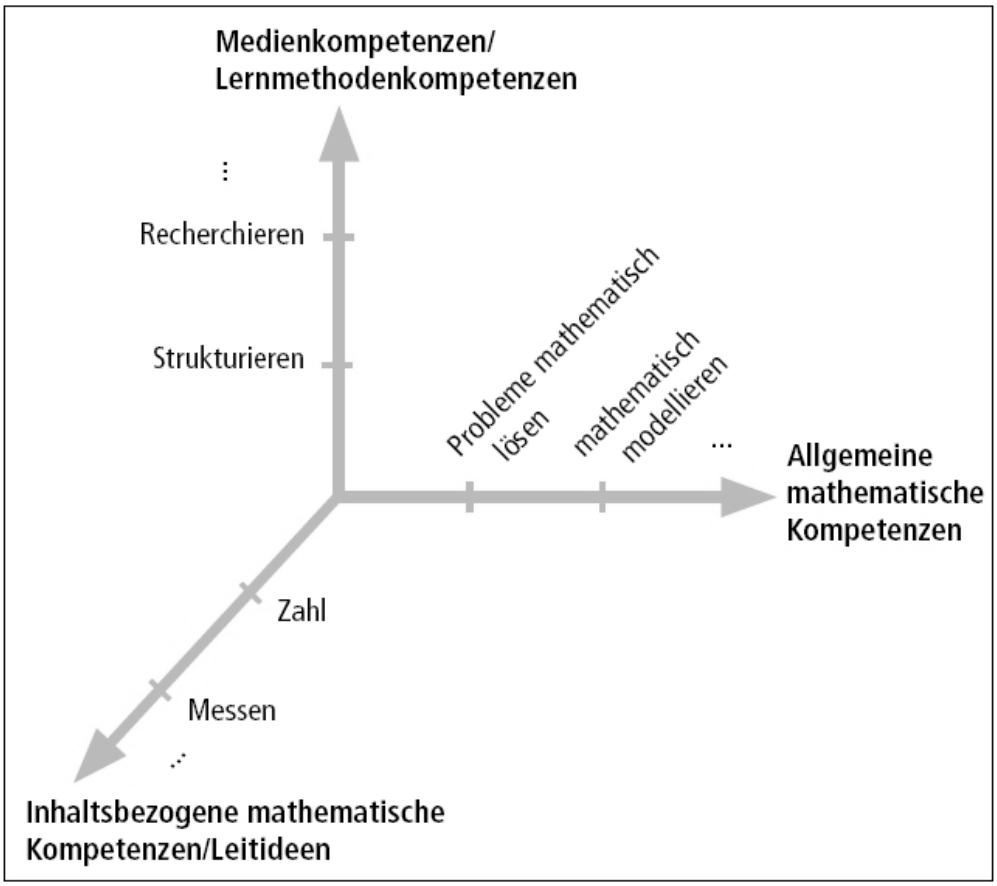
Wenn man sich diese Vielfalt bei den fachlichen Kompetenzen und den Aussagen zur Mediennutzung anschaut, so stellt sich die Frage, ob es da überhaupt einen ‚roten Faden' gibt. Die Beschäftigung mit dieser Frage ist naturgemäß (auch) eine Aufgabe von Mediendidaktik und Medienberatung. Die Antwort liegt in so genannten Lernmethoden-Kompetenzen (vgl. Jonas 2003), die sich überfachlich (aber nicht unfachlich!) identifizieren lassen. Oft wird stattdessen auch von Medienkompetenzen gesprochen. Das ist eine Frage der Sichtweise: aus der Perspektive der Lernenden oder aus der Perspektive der Medien.

Die Medienberatung NRW[1] hält folgende Lernmethoden-Kompetenzen für fundamental: Strukturieren, Recherchieren, Kooperieren, Produzieren, Präsentieren. Diese kann man zu den jeweiligen fachspezifischen Kompetenzbereichen als einen zusätzlichen, über die Fächer hinweg glei-

[1] www.medienberatung.nrw.de/FachThema/Schule/Unterrichtsentwicklung/

chen Kompetenzbereich auffassen. Für das Fach Mathematik möchte ich dies in einer dreidimensionalen Matrix veranschaulichen (vgl. Elschenbroich 2005).

Betrachtet man die Fächer einzeln, so könnte man sicher auch versuchen, diese Lernmethoden- und Medienkompetenzen in die fachlichen Kompetenzen zu integrieren. Damit nähme man sich jedoch die Chance, diese Kompetenzen immer wieder in den einzelnen Fächern zu identifizieren und über die Fächer hinweg ein schlüssiges Medien- und Methodenkonzept für die ganze Schule zu entwickeln und damit dem Allgemeinbildungsauftrag der Schule durchgängig Rechnung zu tragen.



Schnell befürchten Kolleginnen und Kollegen, hier käme ein weiterer Berg an Zusatzanforderungen auf sie zu. Doch dies ist weitgehend unberechtigt, denn es geht dabei weitgehend um Aktivitäten, die sowieso im Mathematikunterricht gemacht werden (oft nur nicht mit dieser konzeptionellen Klarheit). Dies soll am Beispiel einer Unterrichtsreihe zur Satzgruppe des Pythagoras verdeutlicht werden:

- *Strukturieren*: Die Schüler erstellen eine Mindmap zur Satzgruppe des Pythagoras, die die Sätze und Anwendungen gliedert und vernetzt.

- *Recherchieren*: Mit Hilfe von Suchmaschinen im Internet, in digitalen und klassischen Bibliotheken tragen die Schüler Informationen zum Leben des Pythagoras und zu den Pythagoräern zusammen.
- *Kooperieren*: In Stationen-Lernen, Arbeitsgruppen oder Partnerarbeit bearbeiten die Schüler konventionelle und elektronische Arbeitsblätter, entdecken Zusammenhänge und entwickeln Begründungen, vertiefen Themen z.B. zu Anwendungen, zu Beweisen, zur Geschichte des Satzes von Pythagoras.
- *Produzieren*: Zu den Arbeitsblättern erstellen die Schüler Konstruktionen, geometrische Puzzles, Lernplakate oder Webseiten.
- *Präsentieren*: Vom Vorstellen der Hausaufgaben und Lösungen der Arbeitsblätter innerhalb der Klasse geht die Spannweite bis zur Präsentation von Produkten an einem Tag der offenen Tür oder auf der Schul-Website für eine größere Öffentlichkeit.

Auch für einen stark methodenorientierten Unterricht bieten die Lernmethoden-Kompetenzen Hilfen und Orientierung. Klippert beschreibt in seinen Lernspiralen die Schülerrolle durch „selbstständig und planvoll Aufgaben und Probleme zu lösen, Verantwortung zu übernehmen und Eigeninitiative zu zeigen, Wissen gekonnt zu erwerben und sinnfällig zu strukturieren, moderne Medien zu nutzen und gezielt zu recherchieren, in Gruppen zu arbeiten und überzeugend zu präsentieren.“ Die Verwandtschaft zu den Lernmethoden-Kompetenzen ist offensichtlich. Seine Lernspirale zum Satz des Pythagoras konkretisiert obige Überlegungen durch den Dreischritt *Vorwissen/ Voreinstellungen aktivieren, neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten, komplexere Anwendungs-/ Transferaufgaben* und konkrete Vorgaben zur jeweiligen Arbeitsform (*Einzelarbeit, Partnerarbeit, Gruppenarbeit, Doppelkreis, Schülervorträge*).

Genauso sind die Lernmethoden-Kompetenzen hilfreich für einen stark medienorientierten Unterricht mit 'alten' und 'neuen' Medien (vgl. Elschenbroich 2001) und verdeutlichen darin die Rolle des Kooperierens, Produzierens und Präsentierens.

Aus der Gliederung durch die Lernmethoden-Kompetenzen ergeben sich zunächst Konsequenzen fachspezifisches Lernmittelkonzept. Die Fachkonferenz sollte festlegen, welche Lernmittel vom Schulbuch über Arbeitshefte bis hin zu Software und Internet-Angeboten genutzt werden.

Auf diesen fachlichen Lernmittelkonzepten basierend muss die Schule ein Medienkonzept entwickeln. Es muss nicht jedes Fach eine Einführung in

das Recherchieren, Präsentieren etc. und die Handhabung entsprechender Software leisten. Es muss aber klar sein, welches Fach in welcher Stufe sich womit beschäftigt und welche konkrete Textverarbeitung, welche Tabellenkalkulation, welches Präsentations-Programm, welches Mindmap-Programm eingesetzt werden soll, damit dies dann auch verlässlich zur Verfügung steht. Das Medienkonzept festzulegen ist Aufgabe des Gesamtkollegiums und der Schulkonferenz im Rahmen der Erarbeitung des Medienkonzepts innerhalb des Schulprogramms. Es zu überprüfen und zu sichern ist dann Aufgabe der Schulleitung.

Damit sich die Medienkonzepte und Lernmittelkonzepte der einzelnen Schulen innerhalb eines Schulträgers nicht völlig auseinander entwickeln, ist es weiter dessen Aufgabe, die Medienkonzepte seiner Schulen zu sammeln und daraus einen kommunalen Medienentwicklungsplan erstellen. Dies geht bis zur Festlegung von technischen und baulichen Vorgaben, zur Definition von Service-Level-Agreements bei IT-Support und ggfs. zur Anschaffung von Schulträgerlizenzen für Software.

Ohne ein planmäßiges und umfassendes Angehen aller Aspekte, die mit Lernen, Lernmitteln und Lernbedingungen zu tun haben, werden wir nicht in überschaubarer Zeit die Defizite bewältigen können, die durch TIMMS und PISA offenbar geworden sind. Der adäquate und professionelle Einsatz Neuer Medien im Unterricht wird dabei eine bedeutsame Rolle spielen.

Literatur

Elschenbroich, H.-J. (2006): Lernmethoden-Kompetenzen und Fachkompetenzen. In: L.A. Multimedia Heft 1/2006
www.medienberatung.nrw.de/FachThema/Schule/Unterrichtsentwicklung/69_nrw.pdf

Elschenbroich, H.-J. (2005): Bildungsstandards und neue Medien im Mathematikunterricht. In: Praxis der Mathematik Heft 4/2005

Elschenbroich, H.-J. (2001): Der Satz des Pythagoras mit Schere und Computer. Mathe-Welt. In: mathematik lehren Heft 109

Henrichwark, C./ Vaupel, W. (o. Jg.): Auf dem Weg zum Medienkonzept. Eine Planungshilfe für Schulen. e-nitiative.nrw, Düsseldorf
www.medienberatung.nrw.de/FachThema/publikationen/schriften/planung_medienkonzept.htm

Jonas, H. (2003): Lernmethoden-Kompetenz. In: Computer + Unterricht Heft 52

Klieme, E. et al. (2003): Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards – Eine Expertise. BMBF, Bonn

Klippert, H. (2004): Eigenverantwortliches Arbeiten und Lernen. Bausteine für den Fachunterricht. Beltz Verlag, 4. Auflage

KMK: Bildungsstandards. www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/bildungsstandards-neu.htm

Joachim ENGEL, Hannover

Modellierung von Wachstumskurven und dynamisch-interaktive Lernsoftware

Wachstumsprozessen bieten neben interessanten zu entdeckenden innermathematischen Strukturen herausragende Gelegenheiten den gesamten Modellierungsprozess einschließlich Modellbildung und kritischer Evaluation ins Zentrum der Schüleraktivitäten zu stellen. Interaktive dynamische Software nimmt dabei eine zentrale Rolle ein, um ein explorierendes und handlungsorientiertes Vorgehen zu ermöglichen.

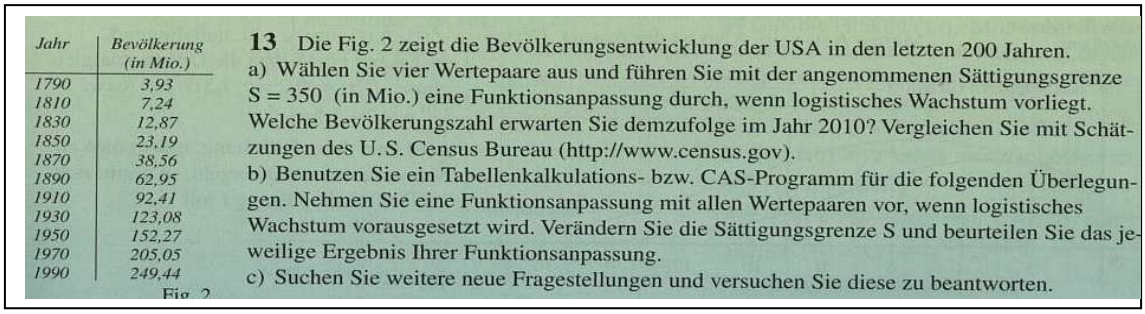
1. Warum Wachstumskurven?

Wachstumskurven sind Kurven die die Änderung eines Phänomens oder Sachverhaltes über die Zeit beschreiben. Oft werden Wachstumsvorgänge durch eine Spezifizierung ihres lokalen Änderungsverhaltens in Form von Differenzen- oder Differenzialgleichungen spezifiziert. Unter didaktischen Gesichtspunkten nimmt dabei logistisches Wachstum eine besondere Rolle ein, weil es einerseits noch relativ leicht zu charakterisieren und zu motivieren ist, andererseits aber auch hinreichend komplex ist, um interessante Strukturen (bis hin zum Chaos im Feigenbaum-Diagramm) aufzuzeigen.

- Diskretes logistisches Wachstum
  $y_{n+1} = y_n + k y_n (S - y_n)$, mit Anfangswert y_0
- Kontinuierliches logistisches Wachstum
  $y'(t) = k y(t)\big(S - y(t)\big)$ mit Anfangswert $y(0)=y_0$ (1)

2. Ein Schulbuchbeispiel zum Logistischen Wachstum

Neuere Schulbücher und Unterrichtsmaterialien greifen den Themenbereich logistisches Wachstum auf, weil sich hier interessante Beispiele für einen datenorientierten Unterricht ergeben, der Inhalte aus Analysis und Stochastik verbindet, z.B. bei der Modellierung von Hefewachstum (Kohorst & Portscheller, 1999), Wachstum einer Sonnenblume (Hull & Langkamp), Entwicklung der PKW-Dichte in Deutschland, des Schienennetzes der Bahn oder der Nutzung und Verbreitung moderner Technologien wie z.B. Mobiltelefone oder Internetrechner (siehe Lambacher Schweizer). Ohne den Einsatz didaktisch geeigneter Software droht aber das didaktische Potenzial derartiger Aufgaben zu verkümmern. Betrachten wir das folgende Beispiel aus Lambacher Schweizer LK Analysis (Abbildung 1), so ist zunächst positiv hervorzuheben, dass im Gegensatz zu vielen Aufgaben aus traditionellen Schulbüchern mit realen (und nicht fingierten, erfundenen) Daten gearbeitet wird.



Jahr	Bevölkerung (in Mio.)
1790	3,93
1810	7,24
1830	12,87
1850	23,19
1870	38,56
1890	62,95
1910	92,41
1930	123,08
1950	152,27
1970	205,05
1990	249,44

Fig. 2

13 Die Fig. 2 zeigt die Bevölkerungsentwicklung der USA in den letzten 200 Jahren.
a) Wählen Sie vier Wertepaare aus und führen Sie mit der angenommenen Sättigungsgrenze S = 350 (in Mio.) eine Funktionsanpassung durch, wenn logistisches Wachstum vorliegt. Welche Bevölkerungszahl erwarten Sie demzufolge im Jahr 2010? Vergleichen Sie mit Schätzungen des U. S. Census Bureau (http://www.census.gov).
b) Benutzen Sie ein Tabellenkalkulations- bzw. CAS-Programm für die folgenden Überlegungen. Nehmen Sie eine Funktionsanpassung mit allen Wertepaaren vor, wenn logistisches Wachstum vorausgesetzt wird. Verändern Sie die Sättigungsgrenze S und beurteilen Sie das jeweilige Ergebnis Ihrer Funktionsanpassung.
c) Suchen Sie weitere neue Fragestellungen und versuchen Sie diese zu beantworten.

Allerdings stecken in der Aufgabenformulierung viele Vorgaben, die einer Herausbildung von Modellierungskompetenzen eher im Wege stehen: Wieso liegt hier überhaupt logistisches Wachstum vor? Gibt es dazu inhaltliche Gründe? Zur Anpassung des logistischen Modells sind drei Parameter, nämlich der Anfangswert y_0, die Sättigungsgrenze S, und der Wachstumsfaktor k aus den Daten zu schätzen. Für S aber wird hier ein Wert vorgegeben. In Aufgabenteil b) soll dann offensichtlich eine Methode angewandt werden, die auf den vorangegangenen Seiten eingeführt wurde: Linearisierung durch Datentransformation. Aus (1) folgt nämlich

$$\ln\left(\frac{1}{y(t)}-\frac{1}{S}\right)=\ln\left(\frac{S-y_0}{Sy_0}\right)-kSt\,, \qquad (2)$$

woraus geschlossen werden kann, dass – falls das logistische Modell gilt und S angemessen spezifiziert wurde – das Streudiagramm der transformierten Daten (t_i, y_i^*) mit

$$y_i^*=\ln\left(\frac{1}{y_i}-\frac{1}{S}\right) \qquad (3)$$

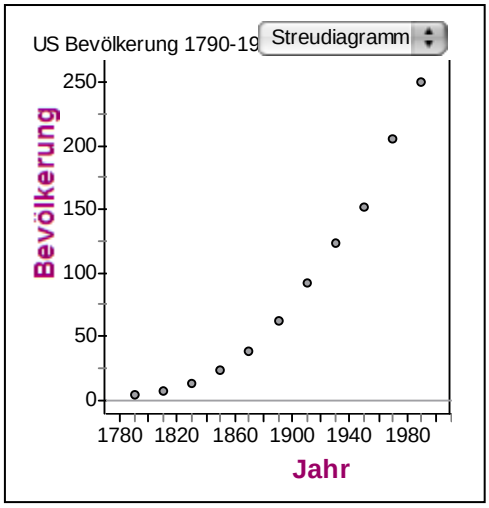
eine lineare Struktur hat. Mit Hilfe einer Geradenanpassung lassen sich dann die fehlenden Parameter y_0 und k aus dem Achsenabschnitt und Steigung der eingepassten (kleinsten-Quadrate-) Gerade schätzen.

3. Dynamisch-interaktive Lernsoftware

Die Modellierung realer Daten erfordert folgende Schritte: 1. Wahl eines geeigneten Modells 2. Schätzen und Interpretieren der Modellparameter 3. Validierung des Modells

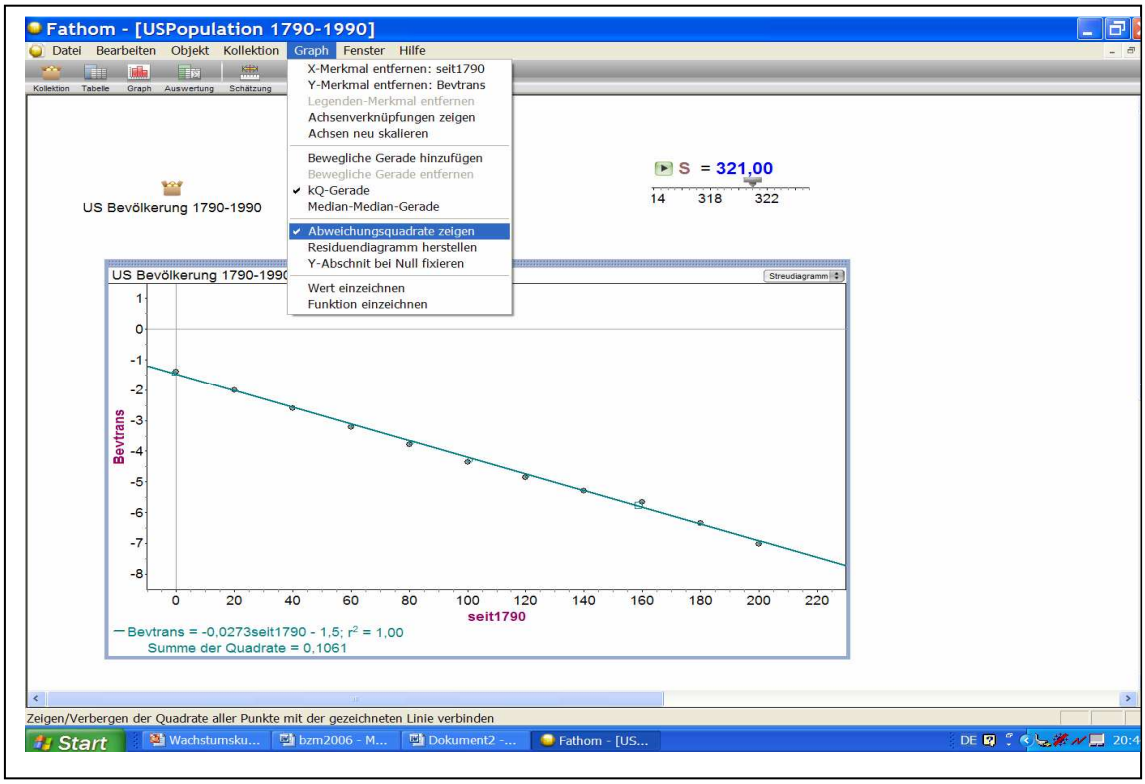
Da bei obiger Schulbuchaufgabe das Modell a priori vorgegeben ist, besteht für Schüler offensichtlich auch kein Anlass zur Validierung. Auch für den Parameter S wird ein Wert direkt vorgegeben. Lediglich die beiden anderen Parameter k und y_0 sollen geschätzt werden. Der Einsatz geeigneter Technologie bietet hingegen die Möglichkeit, allen obigen Anforderungen an Modellierungen gerecht zu werden.

Fathom (siehe Biehler, 2006) ist eine dynamisch-interaktive Lernsoftware zum Anwenden von Mathematik (Simulation, Datenanalyse, Modellbilden etc.). Zu den Charakteristika des Programms gehören ein Zugmodus zum Datahandling und Erstellung oder Änderung neuer Grafiken und Tabellen, ein simultanes Verändern von Daten in miteinander verbundenen Tabellen und Grafiken, die Möglichkeit über den Formeleditor flexibel eigene Modelle zu definieren, leichtes Durchführen von Simulationen, erstellen von Residuenplots, Einzeichnen von Abweichungsquadraten u.v.a.m.



Ein Streudiagramm der vorliegenden Daten kann mit quasi jedem CAS oder Tabellenkalkulationsprogramm erfolgen, und lässt den für logistisches Wachsen typischen Verlauf erahnen, der durch schnelles Wachsen zu Beginn, das das zunehmend gebremst wird, gekennzeichnet ist.

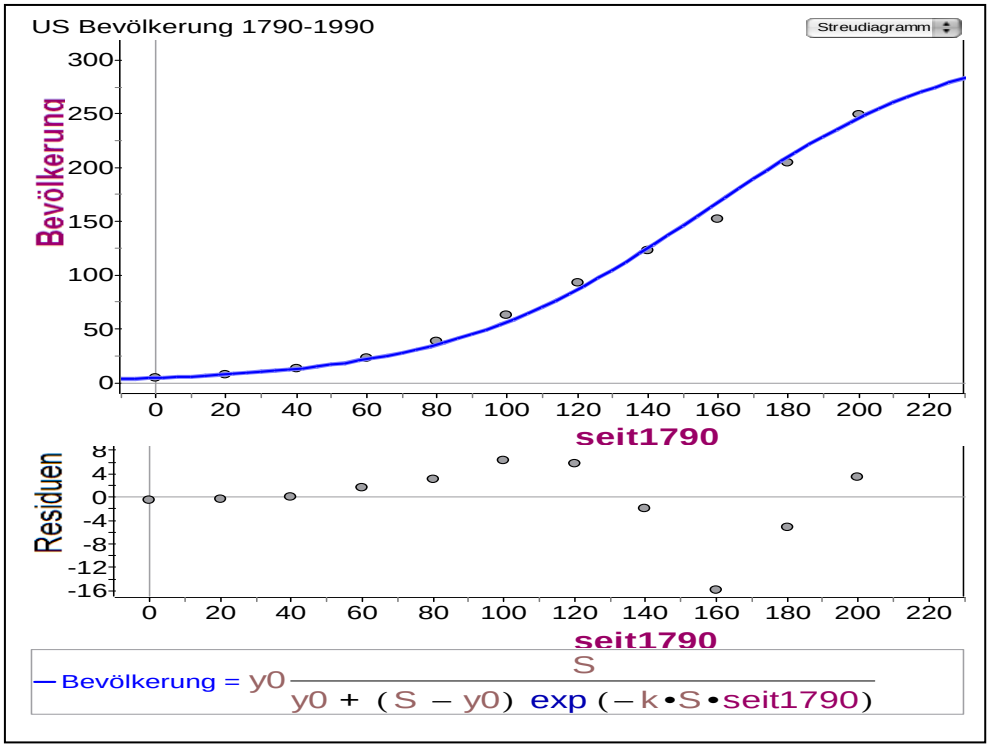
Bei der datengesteuerten Schätzung der Sättigungsgrenze *S* kommt das interaktiv-dynamische Potenzial von Fathom voll zur Geltung: Man definiert einen Schieberegler mit Namen *S*, und führt die zur Linearisierung führende Datentransformation (3) durch. Wegen der Verankerung der Daten im Jahre



1790 empfiehlt es sich, die Zeit-Achse zu reskalieren: $t^*= t\text{-}1790$. Dann passt man die kleinste-Quadrate Gerade in das (t^*, y^*) Streudiagramm ein, und wählt über die Schaltfläche von Fathom die Option `Abweichungs-quadrate zeigen`. Eine Veränderung des Reglers S verändert auch das verlinkte Streudiagramm der transformierten (t, y^*) Daten. Jetzt wird solange der Regler verändert, bis ein Minimalwert für die Abweichungsquadrate gefunden ist. Dieser Wert wird als Schätzwert für die Sättigungsgrenze gewählt. Aus der kleinsten-Quadrate Gerade, hier $y^*=-0{,}0273\ t^* +47{,}38$, und dem oben bestimmten Wert für S lassen sich jetzt mittels Vergleich mit der Gleichung (2) Schätzwerte für k und y_0 herleiten.

$$k = -\frac{-0{,}0273}{S} = 0{,}000085, \qquad y_0 = \frac{S}{1 + S\exp(-1{,}5)} = 4{,}43$$

Jetzt kann die eingepasste logistische Funktion in das Streudiagramm eingezeichnet und zur Modellvalidierung ein Residuenplot erstellt werden.



Literatur:

Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C., Prömmel, A. (2006): *Fathom 2. Eine Einführung.* Springer

Lambacher Schweizer (2000): *LK Analysis*, Klett Verlag Ausgabe Baden Württemberg

Kohorst, Helmut& Portscheller, Philipp (1999): Vom exponentiellen zum logistischen Wachstum. Wozu Hefe nicht alles gut ist: *Mathematiklehren* 97

Hull, Joe & Langkamp, Greg (2001): Quantitative Environmental Learning Project. Online http://www.seattlecentral.org/qelp

Marei FETZER, Frankfurt a. M.

Schreibanlässe im Mathematikunterricht – Wie lernen die Kinder dabei?

Die Arbeit mit Schreibanlässen im Mathematikunterricht verbessert das mathematische Lernen der Kinder. Seit nunmehr 25 Jahren ist man sich in Wissenschaft und Praxis einig, dass dieser Aussage zuzustimmen sei. Wie aber kommt es dazu, dass die Kinder vom Verschriftlichen des Aufgabenbearbeitungsprozesses profitieren? Wie beeinflusst eine Diskussion, deren Basis schriftlich fixierte Lösungsansätze sind, das Lernen der Kinder? Aus einer interaktionistischen Perspektive werde ich mich im Folgenden diesen Fragestellungen annähern und versuchen, die Emergenzbedingungen besonders lernförderlicher Situationen zu beschreiben. Grundlage der Interaktionsanalysen ist eine empirische Untersuchung.

Die meisten Ansätze zum Schreiben im Mathematikunterricht (z.B. Ruf/ Gallin 2003; Selter 1994; Pugalee 2005) fokussieren auf den Schreibprozess und verorten dort die lernförderlichen Aspekte. Grundlage der Untersuchungen sind in diesen Fällen die fertigen Schreibprodukte der Kinder. In meinen Augen gehört zur Arbeit mit Schreibanlässen im Mathematikunterricht jedoch neben dem Schreiben auch das wiederholte Lesen des eigenen Textes. Außerdem ist das Schaffen eines Werkes auf Rezeption ausgelegt. Fertig Schülertexte werden (vor)gelesen und/oder vorgestellt und damit der Diskussion zugänglich. Entsprechend sind meine empirischen Untersuchungen auf zwei Phasen hin angelegt. In der ersten, der *Verschriftlichungsphase*, bearbeiten die Kinder mathematischen Problemaufgaben und fixieren ihren Aufgabenbearbeitungsprozess schriftlich. In der zweiten Phase, der *Veröffentlichungsphase*, stellen einzelne Kinder ihre Lösungswege vor. Meistens nehmen sie dazu die Tafel zu Hilfe. Auf diese Weise werden die unterschiedlichen Ansätze der Diskussion zugänglich. In dieser Phase hat jedes Kind sein eigenes schriftlich fixiertes Werk jeder Zeit zur Hand und vor Augen (s. z.B. Krummheuer/Fetzer 2005; Fetzer 2005).

Wie also lernen Kinder im Zusammenhang mit der Arbeit mit Schreibanlässen? Wie entstehen besonders lernförderliche Interaktionssituationen? Zur Annäherung an diese Fragen erläutere ich zunächst einige Begriffe.

Begriffserläuterungen

Turnannahme und Turnergreifung

Im Interaktionsprozess übernehmen wechselnde Personen die Rolle des jeweils Sprechenden (Sacks 1996). Im Mathematikunterricht lassen sich vier Varianten beobachten, wie Beteiligte der Interaktion zum aktuell Sprechenden werden. Hier stelle ich zwei dieser Alternativen vor. Typisch für

unterrichtliche Interaktionssituationen ist die *Turnannahme*. Dabei zeigen Kinder durch Melden ihren Redewunsch an. Falls sie ‚drangenommen' werden, können sie in der Folge den ihnen zugewiesenen Turn annehmen. Es besteht aber auch die Möglichkeit, das Rederecht im Interaktionsprozess einfach ‚an sich zu reißen' und das Wort zu ergreifen. In diesem Fall spreche ich von einer *Turnergreifung*.

Konsistenz und Inkonsistenz
Während der Veröffentlichungsphase hat jedes einzelne Kind sowohl sein eigenes schriftlich fixiertes Werk als auch das jeweilige Tafelbild vor Augen. Diese beiden grafischen Elemente können entweder *konsistent* sein, oder aber Unstimmigkeiten oder Brüche aufweisen. Im letzteren Fall beschreibe ich Schülerwerk und Tafelanschrieb als *inkonsistent*.

Einfacher Schluss und vertiefte Argumentation
Nach Toulmin (1969) besteht die kürzest denkbare Argumentation, ein *einfacher Schluss*, aus Datum und Konklusion. Eine Argumentation gewinnt an Tiefe, wenn Garanten hinzu kommen, welche den Schluss legitimieren. Noch komplexer wird die Argumentation, wenn der Garant zusätzlich gestützt wird. Eine solche Argumentation lässt sich mit Toulmin als *vertiefte Argumentation* beschreiben (S. a. Krummheuer/Fetzer 2005; Fetzer 2004; Fetzer/Schreiber/Krummheuer 2004).

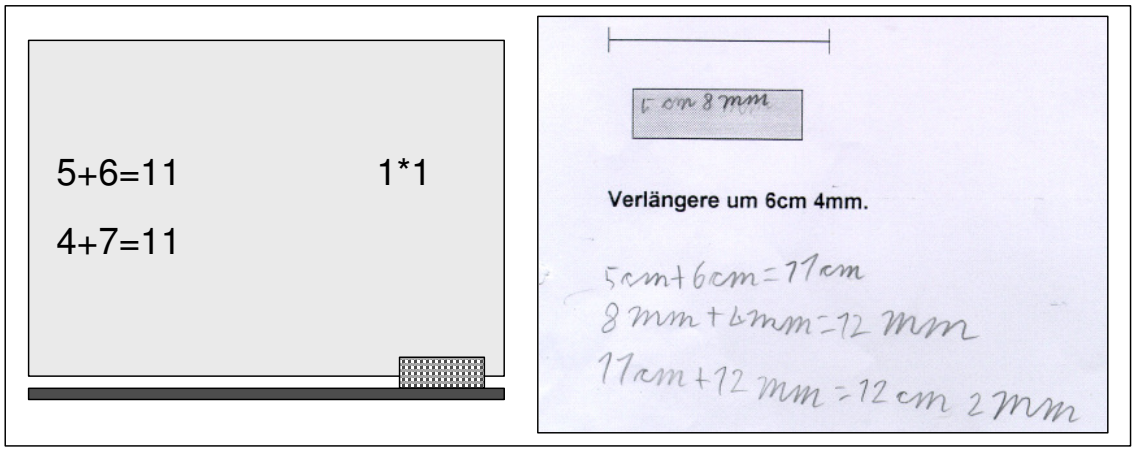
Auf der Basis dieser Begriffe werde ich im Folgenden versuchen zu beschreiben, wie im Zusammenhang der Arbeit mit Schreibanlässen besonders lernförderliche Unterrichtssituationen entstehen und wie Kinder im Rahmen einer solchen Arbeitsweise lernen.

Illustrierendes Beispiel

Zur Illustration ziehe ich ein empirisches Beispiel aus dem Unterricht einer dritten Klasse hinzu (Transkriptionslegende s. Krummheuer/Fetzer 2005). Aufgabenstellung ist es, eine gezeichnete Strecke von 5cm7mm Länge um 6cm und 4mm zu verlängern. In der Veröffentlichungsphase ist Sonja die erste, die ihren Aufgabenbearbeitungsprozess vorstellt. In ihrem Tafelanschrieb reduziert sie die Aufgabenstellung auf ein arithmetisches Problem (s. u. Tafelbild). Auf Sabinas Nachfrage hin beginnt Sonja einen erneuten Erklärungsversuch. Während ihrer Ausführungen

Person	**Aktivität**
Sabina	Ich kapier des irgendwie net -
Sonja	*Wendet sich Richtung Tafel,*
	nachdrücklich Isch hab- **fünf**/+
	deutet dabei mit re gestreckten Arm auf Tafel,
	nimmt Arm runter
<Martina	*Meldet sich*
<Sonja	# des ergabs ja oben fünf\ *geht beim Sprechen*
	zum Tisch, greift ihr Blatt mit beiden Händen
	ohne es vom Tisch zu nehmen und schaut darauf
Benno	Des wam **acht** Zen *leiser* Millimeter - +

reißt Benno das Rederecht ungefragt an sich und äußert: „Des warn acht Millimeter.“ Er *ergreift* den Turn. Dabei bringt er etwas auf den ersten Blick ‚Unpassendes` ein. Sonja äußert sich zur Rechenzahl 5, Benno dagegen nennt die Maßzahl 8mm. Wie kommt es dazu, dass Benno in diesem Moment diese ‚unerwartete‘ Aussage hervorbringt? Benno hat allzeitigen Blick auf zwei grafische Elemente: Vor ihm liegt sein eigenes, schriftlich fixiertes Werk (hier ein Ausschnitt). An der Tafel präsentiert Sonja, wie sie beim Lösen der Aufgabe vorgegangen ist.



In Sonjas Tafelbild kommt die Rechenzahl 7 vor, in Bennos Werk hingegen die Maßzahl 8. Das Identifizieren dieser *Inkonsistenz* lässt Benno aktiv tätig werden: Er ergreift den Turn. Explizit weist er auf die Unstimmigkeiten zwischen Rechen- und Maßzahlaspekt hin und spricht die Inkonsistenz von 7(mm) und 8mm Messergebnis an. Damit macht er diese Brüche für alle Beteiligten der Interaktionssituation auf interaktiver Ebene zugänglich. Sonja hat zu einem einfachen Schluss angesetzt, kann ihren Erklärungsversuch aber nicht ungehindert fortsetzen. Es entsteht Aushandlungsbedarf bezüglich der von Benno angesprochenen Aspekte. Der Anspruch an hervor zu bringende Argumentationen erhöht sich. *Vertiefte Argumentationen* sind gefordert, um den Interaktionsprozess voran zu bringen.

Empirische Forschungsergebnisse

Aus lerntheoretischer Perspektive sind diese erhöhten Anforderungen an hervor zu bringende Argumentationen das entscheidende Moment. Davon profitiert zum Einen der Vortragende, der zum Überdenken seiner Präsentation angeregt wird (hier Sonja), und zum Anderen derjenige, welcher zum Entstehen der argumentatorisch verdichtete Situation beiträgt (hier Benno). Auch andere Kinder sind aufgerufen, sich aktiv in das Interaktionsgeschehen ein zu bringen und wieder andere profitieren durch das Rezipieren dieser argumentatorisch verdichteten Situation. Entsprechend fasse ich solche Interaktionssituationen als besonders lernförderlich auf, in welchen der Anspruch an hervor zu bringende Argumentationen hoch ist. Die Emergenz-

bedingungen solcher argumentatorisch verdichteten Situationen im Rahmen der Arbeit mit Schreibanlässen lassen sich im Zusammenspiel der Begriffe Turnannahme und Turnergreifung, Konsistenz und Inkonsistenz beschreiben. Allgemein lässt sich auf Grund der Analyse zahlreicher Beispiele formulieren:

Argumentatorisch verdichtete Interaktionssituationen entstehen insbesondere dann,

(1) wenn Kinder *Inkonsistenzen* zwischen dem eigenen schriftlich fixierten Werk und dem Tafelanschrieb identifizieren und in der Folge aktiv tätig werden.
(2) wenn sich Kinder durch das Ergreifen eines Turns aktiv in das Interaktionsgeschehen einbringen.

Ausschlaggebend sowohl für das Entdecken von Inkonsistenzen (1) als auch für das Ergreifen eines Turns (2) ist die Tatsache, dass die Kinder während der gesamten Veröffentlichungsphase die grafischen Elemente Tafel und Werk (ein)sehen können. Aus dem sonst für den (Mathematik)unterricht so typischen „Ich habe es genauso wie…“ wird im Zusammenhang der Arbeit mit Schreibanlässen „Ich habe es anders“ oder „Erklär' mal.“. Dadurch erhöhen sich in der Folge die Anforderungen an hervor zu bringende Argumentationen. Um zum Interaktionsgeschehen aktiv beitragen zu können, müssen Argumentationen eine gewisse Breite und Tiefe aufweisen. Die Lernbedingungen optimieren sich.

Literatur

Fetzer (2004): Partizipation an diskursiven Präsentationssituationen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Franzbecker, Hildesheim.

Fetzer (2005): Wie beeinflussen schriftlich fixierte Schülerwerke den Interaktionsprozess? – Ein Analyseproblem. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Fetzer/Schreiber/Krummnheuer (2004): An Interactionistic Perspective on Externalization in Mathematics Classes Based on Writing and Grafic Representation. ICME Copenhagen, TSG 25: Language and Education In Mathematics Education .

Krummheuer/Fetzer (2005): Der Alltag im Mathematikunterricht. Beobachten, Verstehen, Gestalten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Pugalee (2005): Writing to Develop Mathematical Understanding. Christopher-Gordon Publishers: Norwood, Massachusetts

Ruf/Gallin (Hrsg.) (2003): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen. Kallmeyer, Seelze-Velber

Sacks (1996): Lectures on Conversation. Cornwall: Blackwell Publishers.

Selter (1994): Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden

Toulmin (1969): The uses of argument. Cambridge University Press, Cambridge

Astrid FISCHER, Essen

Die Konstruktion von Vorstellungen zur Linearen Algebra

Das Forschungsprojekt

Die Theorie der modernen Linearen Algebra zeichnet sich durch ein hohes Maß an Formalisierung aus,[1] zu deren Verständnis eine Reihe von unterschiedlichen Formen des Abstrahierens notwendig ist. Diese Anforderungen werden von der didaktischen Literatur zur Linearen Algebra als eine Hauptursache für frustrierende Erfahrungen angesehen, die viele Studienanfängerinnen und –anfänger beim Besuch einer Vorlesung zur Linearen Algebra machen.

Das Forschungsprojekt, das hier vorgestellt wird,[2] beschäftigt sich mit zwei Fragenkomplexen. Der erste bezieht sich auf kognitive Vorgänge des Lernens Studierender: Welche Vorstellungen bilden sie zu einzelnen Begriffen der Linearen Algebra heraus? Wie gehen sie vor, wenn sie interne Repräsentationen der dargebotenen mathematischen Strukturen aufbauen? Wie nutzen sie diese Repräsentationen? Als Zweites wird nach dem epistemologischen Gehalt einzelner Begriffe der Linearen Algebra gefragt: Welche Grundvorstellungen[3] liegen zentralen Begriffen der Theorie zugrunde? Welche kognitiven Schwierigkeiten sind beim Lernen zu überwinden? Unterscheiden sich diese für Lernende, die unterschiedliche Denkstile bevorzugen?[4]

Empirische Studien zum Lernen einzelner Studierender und Sachanalysen zu sachimmanenten epistemologischen Bedingungen des Lernens in der Linearen Algebra werden in dem Projekt abwechselnd angestellt und befruchten sich gegenseitig: Eine erste Sachanalyse fragte danach, wo Abstraktionsschritte auftreten und welcher Art sie sind. Die gewonnenen Erkenntnisse bestimmten die Auswahl der Themen und die Konstruktion der Aufgabenstellungen einer ersten empirischen Studie. Die Analyse der Daten lies Vorstellungen bei Studierenden vermuten, welche auf ihre Eignung als Grundvorstellungen hin beleuchtet wurden. Die Ergebnisse

[1] Vgl. Dorier (2000).
[2] Vgl. Fischer (2006).
[3] Dieser Begriff wird im Sinne vom Hofes (1995) verwendet. Er bezieht sich auf konstituierende Aspekte eines Begriffs, welche auf einer mittleren Abstraktionsebene zwischen dem formalen mathematischen Begriff und relativ konkreten Anschauungen von Lernenden liegt.
[4] Es wurden die Denkstile des prädikativen und funktionalen Denkens nach Schwank (2003) betrachtet.

dienten als Leitlinien zur Konzipierung einer neuen Aufgabensequenz, die Studierende darin unterstützen sollte, sich mit verschiedenen Grundvorstellungen auseinander zu setzen. Eine anschließende zweite empirische Studie fragte nach den Vorstellungen, die in diesem Rahmen von Studierenden aufgebaut wurden. Die Beobachtungen aus dieser Studie verfeinerten und ergänzten nochmals die Sachanalyse.

Design der empirischen Studien

Bislang gibt es nur wenige empirisch belegte Erkenntnisse zu Vorstellungen von Lernenden über Inhalte der Linearen Algebra, auf die dieses Projekt zurückgreifen konnte.[5]

Ziel der empirischen Untersuchungen dieser Forschungsarbeit war es, Einsichten in das Lernen von Studierenden der Linearen Algebra zu gewinnen. Die Untersuchungen zielten nicht darauf ab, das Verhalten in Bezug auf ein einzelnes, isoliertes Merkmal der mathematischen Theorie zu betrachten. Vielmehr sollte die Komplexität des Gegenstandes mit seinen vielzähligen horizontalen und vertikalen Verbindungen berücksichtigt werden.
Um eine große Vielfalt von Vorstellungen und Strategien zur Verarbeitung von Informationen in den empirischen Studien zuzulassen, fiel die Entscheidung auf qualitativ auszuwertende Studien mit geringen standardisierten Vorgaben: Die erste Untersuchung bestand aus drei explorativen Fallstudien mit jeweils mehreren Einzelinterviews zu den Themen

„Mengen von Restklassen“,

„Die Beschreibung von Vektorräumen mit Hilfe von Basen“ und

„Der Dualraum als abstrakter Vektorraum“.

Die zweite Untersuchung erfasste eine größere Zahl von Personen: Sie analysierte schriftliche Erläuterungen von 39 Studierenden zur Menge der Restklassen modulo fünf.

[5] Einige Untersuchungen wurden von der Forschergruppe um Dorier (vgl. Dorier (2000)) durchgeführt, die vorwiegend anhand von Tests vergleicht, welche gewünschten Verhaltensweisen die Lernenden aufweisen. Sierpinska (2000) zeigt anhand des Lernverhaltens in der Linearen Algebra Unterschiede in Denkhaltungen auf. Marracci (2003) untersucht mit Hilfe von Interviewanalysen Fehlvorstellungen von Studierenden am Thema des Erzeugens von Untervektorräumen.

Ergebnisse des Forschungsprojekts

Auf zwei Arten von Ergebnissen soll hier exemplarisch eingegangen werden, nämlich auf Grundvorstellungen, auf die individuelle Vorstellungen der Probandinnen und Probanden verweisen, und auf grundsätzliche Strategien im Umgang mit Vorstellungen, die sie anzuwenden scheinen.

Grundvorstellungen am Beispiel des Vektorraumbegriffs

Es zeigten sich Hinweise auf drei Grundvorstellungen zum Vektorraum[6], die in der folgenden Tabelle gegenübergestellt werden:

Beschreibung	Beispiel	Bemerkung
	„Elementtypvorstellung“ V_E	
Ein VR ist durch die Wesensart seiner Elemente charakterisiert.	- Lösungsmenge eines LGS - Menge von Pfeilklassen	- Es gibt verschiedene V_E. - Die VR-Eigenschaften müssen erschlossen werden.
	„Komponentenvorstellung“ V_K	
Die Elemente eines VR besitzen eine Struktur in fest vorgegebenen Komponenten.	Die 2 Positionen in den 2-Tupeln des R^2	V_K impliziert die Idee einer kanonischen, ausgezeichneten Basis.
	„Baukastenvorstellung“ V_B	
Ein VR ist ein Bauprinzip, nach dem seine Elemente konstruiert werden.	Die von (1, 1, 1) und (4, -1, 2) erzeugte Ebene in R^3	V_B impliziert die Idee eines Erzeugendensystems.

Strategien im Umgang mit kognitiven Modellen

In den Problemlöseprozessen, die in den Interviews stattfanden, spielten die Vorstellungen bei den verschiedenen Probanden unterschiedliche Rollen. Es fielen drei Grundstrategien auf, die nicht immer in Reinform auftraten:

[6] Diese Vorstellungen werden in Fischer (2003) ausführlicher beschrieben.

- Die Informationen und Fragen aus einer Aufgabenstellung werden in ein bestehendes, in sich stimmiges kognitives Modell übertragen, soweit das möglich ist. Informationen, die nicht eingepasst werden können, werden nicht berücksichtigt. Mit Hilfe der Strukturen des internen Modells wird dort nach einer Lösung gesucht und diese dann in eine äußere Darstellung zurückübersetzt.
- Mehrere kognitive Modelle, die jeweils einige Aspekte eines mathematischen Sachverhalts widerspiegeln, und die sich in einzelnen Merkmalen widersprechen können, stehen als Hilfsmittel zur Aufgabenlösung zur Verfügung. Informationen aus einer Aufgabenstellung werden nach einander versuchsweise in verschiedene interne Modelle integriert, bis eines gefunden ist, in dem eine Lösung konstruiert werden kann.
- Kognitive Modelle repräsentieren Strukturen nicht unmittelbar, sondern indirekt in Form von Handlungsabläufen, die auf bestimmten Objekten oder Zeichen möglich sind. Informationen aus einer Aufgabenstellung dienen als Indikatoren für die Anwendung bestimmter Handlungsprinzipien. Problemlösung findet bevorzugt auf passenden äußeren Zeichensystemen statt.

Literatur:

Dorier, Jean-Luc (2000). On The Teaching of Linear Algebra. Dordrecht 2000.

Fischer, Astrid (2003). Mentale Modelle zum Vektorraumbegriff. Erste Ergebnisse einer empirischen Untersuchung unter Studierenden. In: mathematica didactica 26(2). 2003. S. 91-114.

Fischer, Astrid (2006). Vorstellungen zur linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und –ergebnisse von Studierenden. Universität Dortmund. Dissertation. Dortmund 2006.

Maracci, Mirco (2003). Difficulties in Vector Space Theory: A Compared Analysis in Terms of Conceptions and Tacit Models. In: Proceedings of the 27th Conference on the International Group for the Psychology of Matheamtics Education. Bd. 3. Honolulu 2003. S. 229-236.

Schwank, Inge (2003). Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In: ZDM 2003. Bd. 35 (3). S. 70-78.

Sierpinska, Anna (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. In: Dorier, Jean-Luc (Hrg). On The Teaching of Linear Algebra. Dordrecht 2000. S. 209-246.

Vom Hofe, Rudolf (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Texte zur Didaktik der Mathematik. Heidelberg 1995.

Pascal R. FISCHER & Rolf BIEHLER, Kassel

VEMA - Virtuelles Eingangstutorium Mathematik

Projektrahmen

Im Jahr 2003 wurde im FB Mathematik der Universität Kassel das Projekt "Multimedia Vorkurs MatematiK" ins Leben gerufen, das - gefördert durch die dortige Multimediakommission sowie die Fachbereiche 14 - 17 - das Ziel hat, einen multimedialen Vorkurs als Ergänzung zur Präsenzlehre zu entwickeln. Dass Kooperationsprojekt zwischen Mathematikern (Wolfram Koepf & Walther Strampp) und Mathematikdidaktikern (Rolf Biehler) hat alle Studienanfänger, deren Studium einen mathematischen Anteil aufweist, als Zielgruppe, zunächst vorrangig solche aus ingenieurwissenschaftlichen Studienrichtungen, die sich aus Abiturienten und Fachabiturienten zusammensetzen. Im Oktober 2004 konnte den Studierenden eine Vorabversion mit den ersten drei Kapiteln auf CD zur Verfügung gestellt werden, zum Vorkurs ein Jahr später lag bereits eine fertige Version 1.0 des interaktiven Kurses vor, der von über 600 Studierenden belegt wurde. Dieser ermöglicht den Studierenden ein selbstständiges, computergestütztes Üben und Nacharbeiten der innerhalb des zweiwöchigen Vorkurses gelehrten Inhalte und war damit zu Beginn des Projekts vor allem eine Ergänzung zur Präsenzlehre.

Seit Ende 2004 werden die Materialien in Kooperation mit der TU Darmstadt (Regina Bruder) unter dem Projekttitel „Virtuelles Eingangstutorium Mathematik" kurz VEMA - gefördert durch das HMWK (Virtuelle Hochschule Hessen) – weiter entwickelt. Die den Kasseler Vorkurs begleitenden Evaluationen aber auch der Anstieg der Teilnehmerzahlen selbst zeigten stets ein reges und wachsendes Interesse seitens der Studierenden sowohl an der Präsenzlehre wie auch an der E-learning-Komponente des Multimediakurses. Während die Version 1 noch stark an der Metapher eines linearen interaktiven Buches orientiert war, arbeiten wir jetzt an einer Version 2, die wesentlich erweiterte Navigationsstrukturen umfasst und eine multifunktionale Nutzung unterstützt.

Zum Multimediakonzept und zu den Entwicklungswerkzeugen

Inhaltlich orientierte sich das Projekt zu Beginn auf Precalculus. Die im Oktober 2005 fertig gestellte Version 1.0 des Multimediaskriptes umfasst die vier Kapitel „Rechengesetze", „Potenzen“, „Funktionen“ und „Höhere Funktionen“. Der Kursteilnehmer soll dabei vor allem an symbolisches Rechnen und Argumentieren herangeführt werden.

Die Inhaltstruktur ist untergliedert in Kapitel und Unterkapitel, die sich wiederum aus Textbausteinen kategorisiert nach verschiedenen Wissenstypen (Infokästen, Beispiele, Aufgaben, Visualisierungen, Verweise und Interaktionen) zusammensetzen.

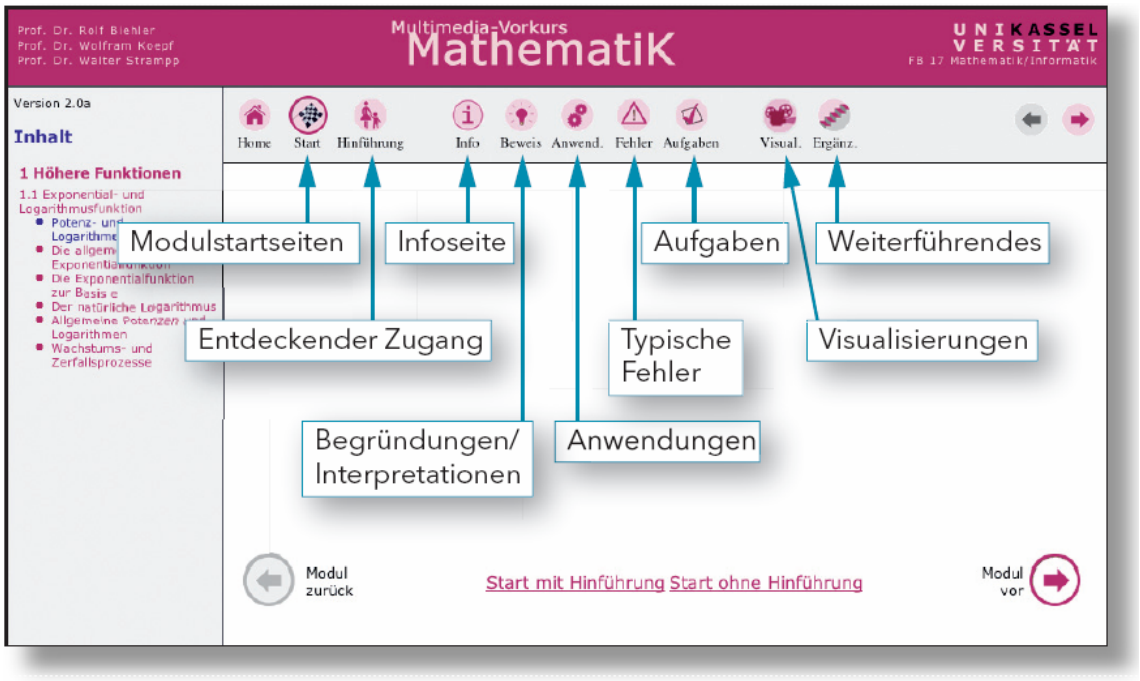
Jeder Wissenstyp hat dabei in der html-Version des Skriptes auch ein eigenes Design. Verfasst werden die Inhalte jedoch unabhängig vom Design in LaTex. Während einerseits mathematischen Formeln so zu einer adäquaten Darstellung verholfen wird, kann der Text andererseits durch die Verwendung speziell eingerichteter LaTex-Umgebungen bereits bei der Entstehung in die unterschiedlichen Wissenstypen eingeteilt werden. Der von unserem Mitarbeiter Ruben Debeerst speziell auf die Projektbedürfnisse zugeschnittene Konverter Tex-to-MathML sorgt anschließend für die automatische Generierung und Gestaltung der html-Seiten. Auf diesem Weg kann eine Änderung der Inhalte unabhängig von Änderungen am Design durchgeführt werden, sodass die Autoren lediglich über Kenntnisse in Latex verfügen müssen.

Eine weitere, noch wesentlichere Multimediakomponente des Skriptes ist die Verwendung unterschiedlicher Visualisierungen, interaktiver Animationen und interaktiver Aufgaben, die das selbstgesteuerte Lernen gezielt unterstützen. So sind neben vertonten Flash-Filmen auch interaktiv steuerbare Flash-Animationen eingebaut, bei denen der Lernende aufgrund der Zerlegung der Visualisierung in Teilschritte selbst Einfluss auf das Lerntempo nehmen und sich einzelne Teilschritte auch mehrmals anzeigen lassen kann. Interaktive Aufgaben lassen sich sowohl in Form von Eingabefeldern finden, zum Teil sind aber auch Drag-and-Drop-Komponenten sowie interaktive Multiple-Choice-Aufgaben jeweils mit der Möglichkeit zur direkten Selbstkontrolle verwendet worden. Bei der Erstellung dieser Visualisierungen kamen Flash und Java-Applets, aber auch GeoNext, sowie CAS-Programme in Verbindung mit Camtasia Screenrecording zum Einsatz.

Wissens- und Navigationsstrukturen

Bilinguale Version. Ab Ende 2004 wurden die Weiterentwicklungen unter dem Projekttitel VEMA und in Kooperation mit der TU Darmstadt vorangetrieben. Neben einer inhaltlichen Erweiterung des Skriptes um ein fünftes Kapitel „Analysis“ wurde mit der vollständigen Übersetzung der Texte und Visualisierungen begonnen, sodass ausländische Studierende mit dieser bilingualen Version nicht nur inhaltliche sondern auch sprachliche Defizite gezielt ausgleichen können.

Neue Navigations- und Wissensstruktur. Der folgende Screenshot illustriert die neue Wissensstruktur.



Eine *Hinführung*, die optional anwählbar ist, bietet dem Lernenden einen entdeckenden Zugang zu den Sätzen und Inhalten. Wer ein Modul nur als „Lexikon“ nutzt, findet alles auf der *Info-Seite.* Im Bereich *Begründung/ Interpretation/ Herleitung* wird nicht nur formal bewiesen sondern auch auf unterschiedlichen Wegen interpretiert und visualisiert. Im Bereich *Anwendungen* sind dann inner- und außermathematische Einsatzmöglichkeiten zum Modulthema gesammelt. Unter *Typische Fehler* werden die Studierenden mit häufig auftretenden Fehlern konfrontiert, die nicht nur sichtbar gemacht, sondern deren Hintergründe auch erläutert werden. Im Bereich *Aufgaben* findet sich eine nach didaktischen Kriterien ausgewählte Sammlung von maximal 6 Aufgaben inklusive Lösungen, die dem Studenten eine Übungsmöglichkeit und zugleich Rückmeldung bieten, inwieweit er die Inhalte verstanden hat. Weitere Aufgaben können aus der Datenbank VEMADA abgerufen werden.

Besonders interessierte Studenten finden im Bereich *Ergänzungen* komplexere weiterführende Inhalte. Der Bereich *Visualisierung* ist eine automatisch generierte, separate Sammlung aller innerhalb eines Moduls verwendeter Visualisierungen und Interaktionen und ermöglicht dem Lernenden wie auch dem Lehrenden einen schnellen nachträglichen Zugriff. Der große Vorteil dieser modularisierten Wissensstruktur liegt somit nicht nur in den didaktischen Erweiterungen sondern auch in den individuellen Zugängen.

Die Aufgabendatenbank VEMADA

Die Aufgabendatenbank VEMADA stellt eine Ergänzung mit Blick auf gezieltes Üben dar. VEMADA ist online verfügbar und ermöglicht es dem Nutzer, die hier gespeicherten Aufgaben in englischer und deutscher Sprache nach unterschiedlichen Kriterien systematisch auszuwählen und mittels einer Warenkorbfunktion in einem pdf-Dokument zu sammeln. Mehrere Zusatzoptionen ermöglichen die Erstellung von Aufgabenblättern mit unterschiedlicher Anordnung, bei denen Metainformationen der Aufgaben sowie deren Lösungen optional beigefügt werden können. Durch die differenzierte Kategorisierung nach Thema (orientiert an der Inhaltsstruktur des Multimedia-Vorkurses), Tätigkeit (Technik/ Kalkül, Begründen, Modellieren, …), Heuristik (Vorwärtsarbeiten, Rückführungsprinzip, …) und Schwierigkeit (4-Sterne-System, z. T. verfeinert nach Formalisierungsgrad, Komplexitätsgrad und Ausführungsparameter) wird so das gezielte Überwinden spezifischer Lernschwierigkeiten und ein optimiertes Üben von Inhalten und Strategien möglich. VEMADA wurde aus der bereits existierenden Aufgabendatenbank madaba (TU Darmstadt) weiter entwickelt. Sie verfügt nun über eine Autoren-, Dozenten und Studierendenschnittstelle. Seitens der Lehrenden können einerseits Kurse mit vorselektierten Aufgaben angelegt aber auch spezielle, auf die spezifischen Bedürfnisse der Lerngruppe zugeschnittene Aufgabenblätter entworfen werden. Auch die Eingabe von Aufgaben funktioniert direkt online durch eine einfache, selbsterklärende Aufgabenmaske, sodass hier kaum technische Vorkenntnisse notwendig sind.

Perspektiven

Bis zu den Vorkursen im Oktober 2006 ist eine vollständige Überarbeitung aller Komponenten im Sinne der neuen Navigationsstruktur und im Hinblick auf die Integration von VEMADA geplant. Die Überarbeitung soll auch den unterschiedlichen Studierendengruppen (z.B. Lehramt Mathematik verschiedener Schulformen und – stufen, Ingenieurwissenschaftliche Studien) differenzierend Rechnung tragen.

Weitere Informationen

Homepage http://www.mathematik.uni-kassel.de/~vorkurs (Gastzugang auf Anfrage)

Kontakt: vorkurs@mathematik.uni-kassel.de

Torsten FRITZLAR, Lüneburg

Lässt sich Sensibilität für die Komplexität problemorientierten Mathematikunterrichts „messen“?

Einleitung

Unterrichten ist Entscheiden und Handeln in einem komplexen Realitätsbereich (für den Mathematikunterricht u.a. Jaworski & Gellert, 2003; Kießwetter, 1994). Davon ausgehend wird oftmals die Bedeutung von Routinen hervorgehoben, die die Komplexität der Unterrichtskonstellation reduzieren, den Handelnden entlasten und so eine Bewältigung der Situation ermöglichen. Das Verfügen über Routinen erscheint dann als wesentliches Element der Professionalität des Lehrers (z.B. Schlöglmann, 2005). Allerdings sieht SCHLÖGLMANN auch die damit verbundene Gefahr der Selbststabilisierung eines unbefriedigenden Status quo.

Im Vergleich zum eher traditionellen, aber wohl immer noch dominierenden Mathematikunterricht bringt eine stärkere Problemorientierung eine zusätzliche Komplexität vor allem hinsichtlich mathematisch-kognitiver Aspekte mit sich, die gerade nicht durch hergebrachte Routinen unangemessen reduziert werden darf. Will die universitäre Lehrerausbildung einen nachhaltigen Beitrag zu einer stärkeren Problemorientierung des Mathematikunterrichts leisten, so scheint es unter anderem angebracht, bei den Studierenden die mit großer Wahrscheinlichkeit aus der Schulzeit mitgebrachten simplifizierenden Routinen aufzubrechen und zunächst einmal für die Komplexität des (stärker problemorientierten) Mathematikunterrichts zu sensibilisieren.

Als erster Schritt auf diesem Weg wurde ein Instrumentarium konstruiert und erprobt, mit dem sich Hinweise auf den Grad der Sensibilität eines Akteurs für die Komplexität problemorientierten Mathematikunterrichts gewinnen lassen.

Eine empirische Untersuchung zur Sensibilität für Komplexität

Möchte man den Grad der Sensibilität für Komplexität eines Akteurs bestimmen, scheinen reale Situationen als Untersuchungsumgebung schon aus praktischen Gründen ungeeignet. Darüber hinaus ist gegen diese einzuwenden, dass es beim Konzept der Sensibilität nicht um ein erfolgreichen Agieren in komplexen Konstellationen, sondern (nur) um angemessene grundlegende Vorstellungen des Akteurs von diesen geht, die beispielsweise aufgrund von Könnensaspekten nicht notwendig handlungswirksam

werden müssen. Ich habe daher (ausgehend von etwa 50 videografierten und analysierten Unterrichtsversuchen und Befragungen von Studierenden, Lehrern und Didaktikern) ein realitätsbezogenes, interaktives Computerszenario entwickelt, das vor allem mathematisch-kognitive Aspekte der Bearbeitung einer mathematischen Problemstellung (des Faltproblems, vgl. Kießwetter & Nolte, 1996) im Unterricht der fünften Jahrgangsstufe hinreichend komplex modelliert. Dabei erlaubt das Szenario für den Programmnutzer eine systematische Exploration von Entscheidungssituationen mit Zeitrafferfunktionalität sowie Entscheidungen ohne Zeit- und Realisierungsdruck. Für den Untersuchenden werden eine systematische Variation der zu bearbeitenden Situationen und eine beliebige Wiederholbarkeit möglich.

Ausgehend von theoretischen Vorüberlegungen, den Arbeitsmöglichkeiten des Programms und den empirischen Befunden einer ersten explorativen Studie mit 20 Lehramtsstudierenden konnten zunächst vier Merkmale abgeleitet werden, die die Auseinandersetzung des Nutzers mit dem Szenario beschreiben und so Hinweise auf dessen Grad der Sensibilität geben können.

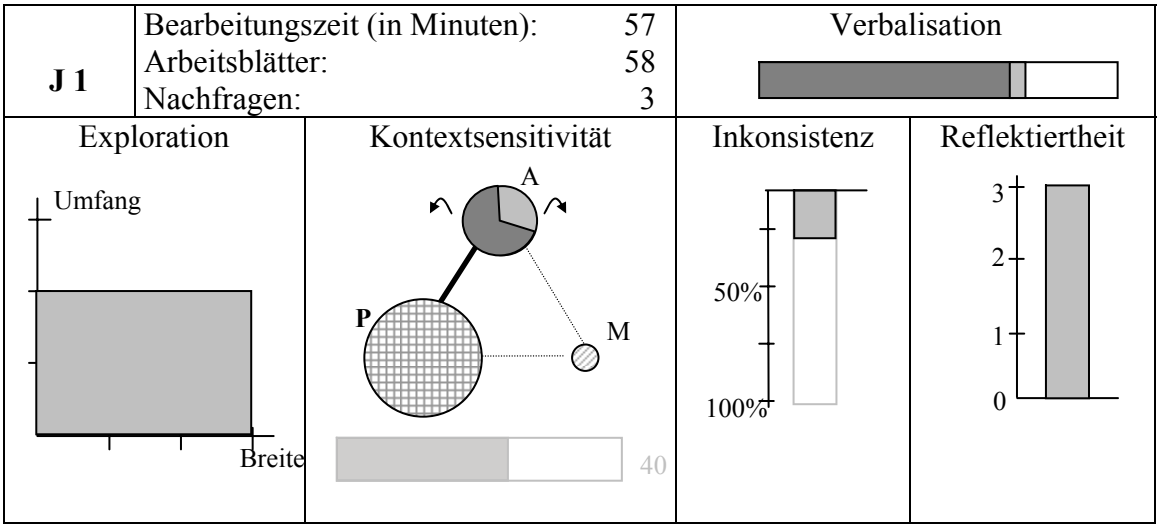
Merkmal	zur Begründung
Exploration erfasst sowohl quantitative (Anzahl der Rücksprünge und Programmdurchläufe) als auch qualitative Aspekte (Verschiedenheit jeweils gewählter Optionen) der Szenarioexploration durch den Nutzer.	Ein sensibler Nutzer versucht, den unbekannten Realitätsbereich besser kennen zu lernen und ist dabei auch bereit, sich von eigenen Vorstellungen zu lösen, Entscheidungen kritisch zu hinterfragen und bei Bedarf zu korrigieren.
Kontextsensitivität erfasst, inwieweit der Nutzer bei seinen Entscheidungen Merkmale von Problembearbeitungsprozessen der Schüler, fachliche, soziale und affektive Aspekte berücksichtigt.	Ein sensibler Nutzer beachtet bei seinen Entscheidungen insbesondere auch die mathematisch-kognitiven Aspekte und in vielen Situationen Aspekte aus verschiedenen Bereichen gleichzeitig.
Inkonsitenz erfasst qualitative Aspekte der Entscheidungen des Programmnutzers.	Ein sensibler Nutzer ist in der Lage, konsistent zu den im Szenario dargestellten Merkmalen der Problembearbeitungsprozesse und Unterrichtssituationen zu agieren.
Reflektiertheit erfasst Reflexionen des Programmnutzers zu modellierten Zusammenhängen und deren Hinterfragen, Ansätze zur Metakognition und die Suche nach zusätzlichen Alternativen.	Ein sensibler Nutzer versucht, im Laufe der Auseinandersetzung mit dem Szenario ein adäquates mentales Modell der Zusammenhänge zwischen den Elementen des Programms aufzubauen.

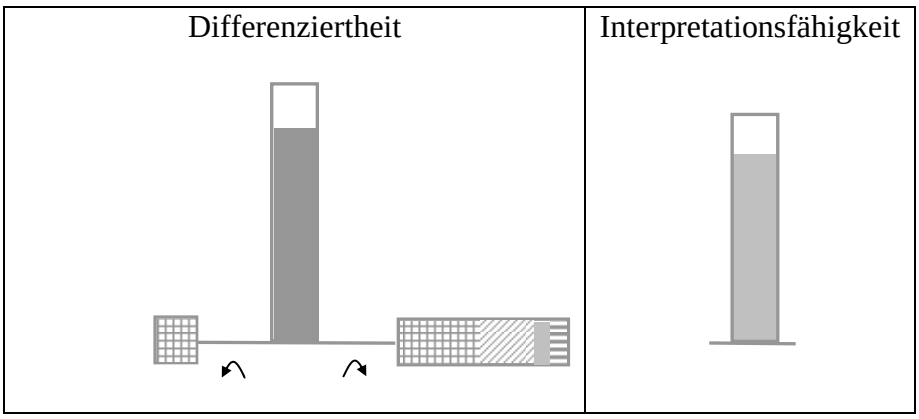
Allerdings ist ein solches Computerszenario als Diagnoseinstrument auch mit Nachteilen verbunden. Insbesondere hat sich in der empirischen Studie

gezeigt, dass die Verbalisationsfähigkeit oder -bereitschaft vieler Studierenden während der Bearbeitung des Szenarios teilweise gering ist. Daher wurde als zweiter Teil eines Diagnoseinstrumentariums eine Befragung zu spezifischen Entscheidungssituationen im Zusammenhang mit der Bearbeitung des Faltproblems im Unterricht entwickelt. Dabei setzt sich der Bearbeiter auch mit einem weiteren wichtigen Typ von Entscheidungssituationen (vgl. auch Rieskamp & Hoffrage, 1999) auseinander: Während im Szenario aus jeweils angebotenen Handlungsoptionen *ausgewählt* werden kann, sollen in der Befragung mögliche Handlungsoptionen *beurteilt* werden.

Wiederum unter Einbezug empirischer Befunde aus der Pilotstudie können zwei Merkmale abgeleitet werden, die die Sensibilität des Befragten für die Komplexität problemorientierten Mathematikunterrichts weiter beschreiben.

Merkmal	zur Begründung
Differenziertheit erfasst, wie differenziert und unter Beachtung welcher Aspektbereiche angebotene Handlungsoptionen hinsichtlich möglicher Vor- und Nachteile durch den Akteur beurteilt werden.	Ein sensibler Akteur berücksichtigt bei der Beurteilung von Handlungsoptionen zahlreiche mögliche Auswirkungen auf verschiedene Aspektbereiche. Dabei geht er nicht nur von seinen Zielen und Absichten aus, sondern insbesondere auch von der aktuellen Situation. Oftmals gibt es für ihn keine „beste Lösung“.
Interpretationsfähigkeit erfasst, inwieweit es dem Akteur gelingt, dargestellte „Zwischenprodukte“ bei der Bearbeitung des Faltproblems durch die Schüler angemessen zu interpretieren.	Ein sensibler Akteur kann trotz der allgemein geringen Verbalisationsfähigkeit junger Schüler zu angemessenen Interpretationen von Problembearbeitungsprozessen und -ergebnissen kommen.





Zusammenfassend ergibt sich ein „Sensibilitätsvektor“ mit sechs Komponenten, gegen deren weitgehende Unabhängigkeit aufgrund bislang vorliegender Daten nichts eingewendet werden kann. Obige Abbildung zeigt für einen ersten Eindruck den „Sensibilitätsvektor“ einer Studentin, die für alle Komponenten gute bis sehr gute Ergebnisse erreichte. Insgesamt deuten die Ergebnisse meiner Untersuchung jedoch eine sehr geringe Sensibilität für Komplexität der Teilnehmer an, die als Herausforderung zu einer entsprechenden Weiterentwicklung der Lehrerausbildung verstanden werden kann. Für weitere Details zum Computerszenario und dessen Einsatz als Diagnoseinstrument muss auf (Fritzlar, 2004) verwiesen werden.

Literatur

Fritzlar, T. (2004). *Zur Sensibilität von Studierenden für die Komplexität problemorientierten Mathematikunterrichts.* Hamburg: Kovač.

Jaworski, B., & Gellert, U. (2003). Educating New Mathematics Teachers: Integrating Theory and Practice, and the Roles of Practising Teachers. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leungs (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 829-875). Dordrecht: Kluwer.

Kießwetter, K. (1994). Unterrichtsgestaltung als Problemlösen in komplexen Konstellationen. In F. Padberg (Ed.), *Beiträge zum Lernen und Lehren von Mathematik* (pp. 106-116). Seelze: Kallmeyer.

Kießwetter, K., & Nolte, M. (1996). Können und sollen mathematisch besonders befähigte Schüler schon in der Grundschule identifiziert und gefördert werden? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 28*(5), 143-157.

Rieskamp, J., & Hoffrage, U. (1999). When do people use simple heuristics, and how can we tell? In G. Gigerenzer, P. M. Todd & the ABC Research Group (Eds.), *Simple heuristics that make us smart* (pp. 141-167). New York: Oxford University Press.

Schlöglmann, W. (2005). Warum sind Unterrichtsformen so stabil? – Zur individuellen wie sozialen Funktion von Routine. *Journal für Mathematikdidaktik, 26*(2), 143-159.

Lutz FÜHRER, Frankfurt am Main

„Siehe“-Beweise für elementare Volumenbestimmungen

Traditionell wurden (und werden noch) am Ende der Mittelstufe Volumenformeln mit heuristischen Grenzwertbetrachtungen für einige nichttriviale Körper hergeleitet. Offensichtlicher Zweck war und ist die Vorbereitung einer echten „Infinitesimalrechnung“ auf Oberstufen, die – etwa im Geiste des angelsächsischen Calculus – numerische Anwendungsbezüge einer streng(er)en Analysistheorie vorordnet. Leider werden viele Schüler – heute, nach einhundert Jahren, auch wieder an Gymnasien – kaum noch approximative Betrachtungen bei räumlichen Integrationen erleben, geschweige denn lernen. Es macht also nicht nur für Haupt- und Realschüler wieder Sinn, über anschaulich-informelle und weitgehend grenzwertfreie Herleitungen für das traditionelle Arsenal nichttrivialer Volumenberechnungen neu nachzudenken. Gegenstand des Vortrags waren entsprechend „höhere“, aber elementare[1] Volumenbestimmungen für eine recht große Klasse von Körpern mithilfe des Ähnlichkeits- und des Cavalieri-Prinzips. Die Argumentationen wurden durchweg so gewählt, dass sie sowohl abschluss- als auch (auf einer Oberstufe oder im Studium) anschlussfähig sind.

Zugegeben, Stereometrie gehört nicht (mehr) zu den Favoriten des Mittelstufenunterrichts, und es steht zu befürchten, dass an höheren Schulen die Vorverlegung der Oberstufe in 10. Klassen ein Übriges tun wird. Außerdem machen Volumenberechnungen natürlich nur einen Teil jeder halbwegs sinnvollen Schulung in Raumgeometrie aus, denn Lagebeziehungen, innere Maßverhältnisse, Darstellungstechniken und Oberflächenbestimmungen sind auch nicht von jetzt auf gleich zu lernen. Immerhin bieten aber Rauminhaltsbestimmungen der heutigen Lehrplansituation besondere Vorteile:

- Sie sind auf numerische Ergebnisse ausgerichtet, und passen damit gut zur kurzatmigen, aber modisch-aktuellen „Outputorientierung“.
- Sie trainieren und flexibilisieren Raumanschauung. Dabei können heute Darstellungs- und Variationsmöglichkeiten auf dem PC in nie da gewesener Weise helfen und anregen.[2]
- Sie vermitteln handwerksnahe Grundfertigkeiten und -kenntnisse.
- Sie wiederholen und verbinden gewissermaßen „vollautomatisch“ stereometrische und planimetrische Kenntnisse mit algebraischen.

---

[1] „Elementar“ meint hier Verzicht auf Begriffs-, Definitions- und Grenzwertprobleme.

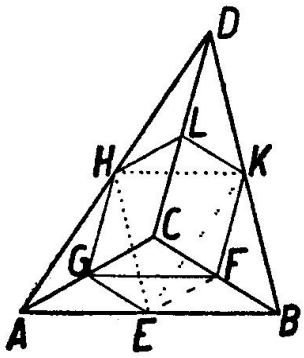
[2] Der Vortrag stützte sich weitgehend auf MuPAD-Video-Animationen.

- Sie erlauben vielfältig differenzierte Aufgabenstellungen mit gut dosierbaren Anteilen einerseits von handgreiflicher Anschaulichkeit, andererseits algebraisch-geometrischer Durchdringung.

1. Pyramiden und Pyramidenstümpfe

Im Papyrus Moskau wird ein spezieller Pyramidenstumpf so berechnet, als gelte es, in die heute bekannte Formel einzusetzen. VAN DER WAERDEN 1966 bietet eine Abbildung und Übersetzung sowie den Versuch einer anschaulichen Herleitung. Am Ende heißt es dort (S. 57): „Wie dem auch sei, jedenfalls müssen die Ägypter den Inhalt der Pyramide gekannt haben." Wahrscheinlich war dem so, denn die Pyramiden standen ja schon lange zuvor am Nil, aber die Wörtchen „jedenfalls müssen" sind zweifelhaft, denn der hier behandelte Pyramidenstumpf hat eine besondere Eigenschaft: Die fehlende Ergänzungspyramide passt so gut in ihn hinein, dass nur noch zwei Prismen und eine quadratische Säule überstehen. Diese einfacheren Überstandkörper erlauben die Volumenberechnung ohne Kenntnis des Pyramideninhalts, weil die ergänzte Pyramide nach dem Ähnlichkeitsprinzip[3] das Achtfache der ausgeschnittenen füllt.

Die gleiche Zerschneidungstechnik über Mittelparallelen findet sich in EUKLID XII, 3, wo der Restkörper aus zwei Prismen freilich nur abgeschätzt wird. WEITBRECHT wies (meines Wissens erstmals) darauf hin, dass sich mit dem Streckungsargument aus dem Restkörper die Volumenformel für beliebige Pyramiden und Pyramidenstümpfe fast zwanglos ergibt.



2. Prismatoide

Von STEINER 1842 stammt die Idee, das Volumen von (später sog.) „Prismatoiden" mittels der Simpson-Regel zu bestimmen. Diese Polyeder haben als Grund- und Deckfläche Polygone in parallelen Ebenen und als Seiten Dreiecke.[4] Prismatoide müssen nicht konvex sein. Mithilfe eines Parallelschnitts und eines inneren Punktes auf halber Höhe zerfällt jedes Prismatoid in zwei Pyramiden halber Höhe über der Grundfläche bzw. unter der Deckfläche sowie in Dreieckspyramiden mit den Dreiecksseiten als Hilfs-Grundflächen. Zerlegt man letztere durch Mittelparallelen, so zerfällt jede

---

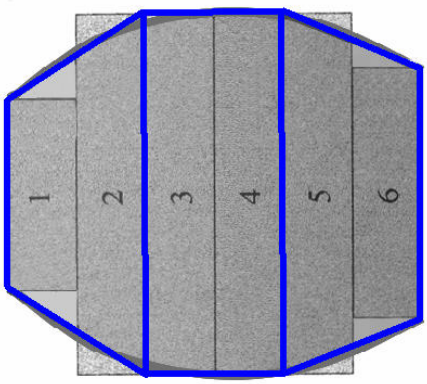
[3] Körper oder Flächen mit k-fach gestreckten Maßen haben den k^3- bzw. k^2-fachen Inhalt. (Vgl. EUKLID XI, 33)

[4] Jeder Polyeder lässt sich natürlich als schichtenweise prismatoid vorstellen und berechnen.

zugehörige Dreieckspyramide in vier raumgleiche, von denen eine als über oder unter dem Mittelschnitt stehend (hängend) und von halber Ausgangshöhe angesehen werden kann, so dass folgt:

$$V_{Prismatoid} = \frac{Bodenfläche + 4 \cdot Mittelschnitt + Deckfläche}{6} \cdot Höhe$$

3. Die Fassregel



Die für Prismatoide hergeleitete Formel wird oft (unberechtigt) als „Keplersche Fassregel“ oder „Simpson-Regel“ bezeichnet. Sie ist bekanntlich für eine sehr viel größere Klasse von Körpern exakt (insbesondere für fast alle in der Mittelstufe vorkommenden), und sie ist immer noch eine der besten Integrationshilfen in der mathematischen Numerik. Eine plausible Herleitung für typische Fassformen benutzt[5] zusätzlich zu KEPLERs Kegelstumpfpaar noch einen Zylinder (gleicher Breite) mit Bauchdurchmesser und wertet die Kegelstümpfe mit der babylonischen (und im Forstwesen lange üblichen, etwas zu kleinen) Näherung

$$V_{Kegelstumpf} \approx \frac{Bodenfläche + Deckfläche}{2} \cdot Höhe$$

aus. Die Fassregel und ihr approximativer Charakter sind sofort zu „sehen“.

4. Nutzung des Cavalieri-Prinzips

Historisch hat das Cavalieri-Prinzip sehr wesentlich zur Entwicklung der Integralrechnung beigetragen. Am Ende der Mittelstufe kommt es heute aber nur noch bei der Herleitung des Kugelvolumens nach VALERIOs Variante des zweiten ARCHIMEDischen Beweises vor (1604).[6] Dass hier zentrale Ideen der Integralrechnung antizipert werden, lernen Schüler kaum noch – jedenfalls dann nicht, wenn Integrale lange nur mit ebenen Flächen und Stammfunktionen assoziiert werden und wenn Integrale von Querschnittsfunktionen sofort auf eine Rotationskörperformel reduziert werden. Das eigentliche Potenzial des Cavalieri-Prinzips, nämlich das Denken in flächentreuen Gestaltdeformationen, bleibt in der Regel ungenutzt, und das sowohl

---

[5] wegen der Bogenschmiegung im Maximum

[6] Eine Halb- oder Vollkugel wird schichtenweise mit einem konisch ausgeborten Zylinder verglichen.

auf der Mittelstufe als auch in der Sekundarstufe II (und im Lehramtsstudium). Die folgenden Beispiele zeigen wohl deutlich genug, dass ein bescheidenes Maß einschlägiger „Formengymnastik“ der „mathematical literacy“ unser Schüler und Studierenden durchaus zuträglich wäre:

Die Funktion $f(x) := x^2$ ordnet jedem x des Einheitsintervalls ein „Quadrat“ zu. Stellt man es sich senkrecht zur x-y-Ebene vor, so entstehen bei variablem x die Querschnitte einer quadratischen Pyramide, die sich zum umgebenden Würfel wie 1:3 verhält, und folglich verhält sich – so im Wesentlichen die Argumentation von FRANS VAN SCHOOTEN um 1650[7]– auch die erzeugte ebene Fläche unter der Parabel wie 1:3 zum Einheitsquadrat. (Durch Bewegungen und Scherungen sind daraus alle Parabelflächen erhältlich.) Deformiert man im Geiste ARCHIMEDES' die quadratischen Pyramidenschnitte zu Rechtecken konstanter Breite, so erhält man das Volumen eines parabolischen Zylinders[8]; deformiert man die Höhenflächen eines quadratischen Keils flächentreu zu Kreisen, so erhält man das Volumen eines Paraboloids[8]; überträgt man VAN SCHOOTENS Argument auf die quadratische Funktion $g(x) := 1– x^2$, so bekommt man aus der Parabelfläche das Kugelvolumen. Usw.

Mithilfe des Flächenhalts von Parabelsegmenten erhält man bekanntlich nach dem Cavalieri-Prinzip eine exakte Herleitung der Simpson-Regel (NEWTON, Principia) und über einfache Interpolationsbetrachtungen deren Fehler „durch scharfes Hinsehen“.

Literatur:

EUKLID: Die Elemente. (Übers. C. Thaer). Darmstadt: Wiss. Buchges. 1980.

HOLZMÜLLER, G.: Elemente der Stereometrie, Band II. Leipzig: Göschen 1900.

STEINER, J.: Über einige stereometrische Sätze. In: Crelles J. r. a. Mathematik 23 (1842), 275-284.

STURM, J. C.: Des unvergleichlichen Archimedes Kunstbücher … Nürnberg: C. Gerhard 1670.

VAN DER WAERDEN, B. L.: Erwachende Wissenschaft. Basel: Birkhäuser (2. Aufl.) 1966.

WEITBRECHT, T.: Zur Berechnung des Pyramideninhalts. In: UBl. 32 (1926), 244-246.

Eine ausführlichere Darstellung kann beim Autor angefordert werden:
http://www.math.uni-frankfurt.de/~fuehrer

---

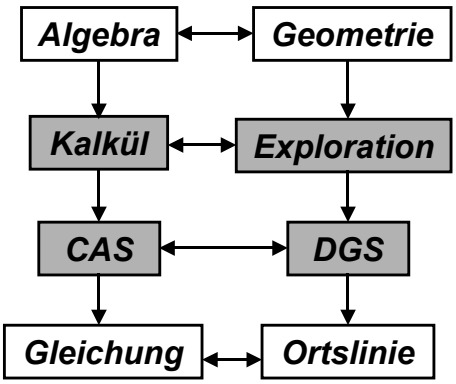
[7] nach dem Bericht von STURM 1670

[8] Vgl. etwa HOLZMÜLLER 1900.

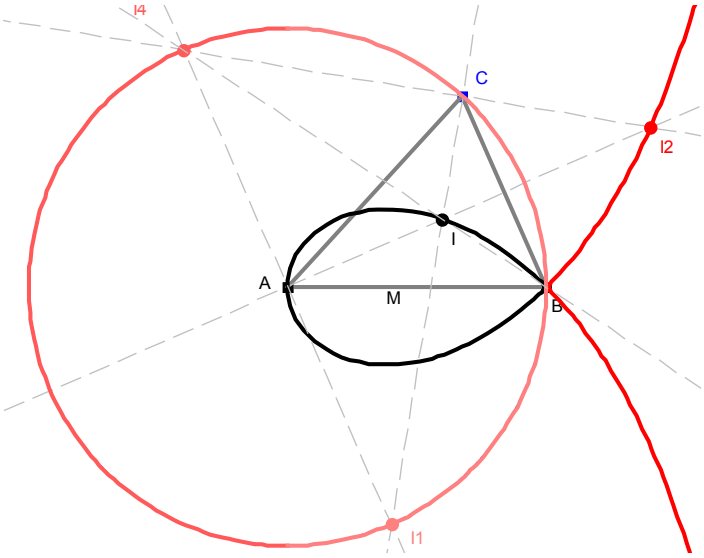
Thomas GAWLICK; Landau

Benchmarks zur Verknüpfung von CAS und DGS

R. Oldenburg stellte im JMD 3/4(2005) das seinem Programm Feli-X zugrunde liegende Konzept zur "bidirektionalen" Verknüpfung von CAS und DGS vor. In der Literatur gibt es diverse Beispiele für "new possibilities, for instance in the simultaneous processing of several different representations." (Tall 1991). So zeigt z.B. Gawlick (2001c) an den zuerst von Hölzl untersuchten Ortskurven $\mathcal{H}$ des Höhenschnittpunkts H das nebenstehende fruchtbare Wechselspiel von CAS und DGS. Die Exploration von $\mathcal{H}$ per DGS alterniert mit dem Kalkül der analytischen Geometrie im CAS. So erhält man eine computergestützte Kartesische Korrespondenz: Punkt ↔ Koordinaten, Ortslinie ↔ Gleichung, Konstruktion ↔ Funktion! Entscheidend ist dabei ein Repräsentationswechsel: von der *funktionalen* Sicht (bewegter Punkt H ↔ Parametrisierung x=x(t), y=y(t)) zur *relationalen* Sicht (geometrischer Ort $\mathcal{H}$ ↔ Gleichung f(x,y)=0) durch ***Elimination*** des Parameters. Als Technik ist dies auch der Schlüssel zur Wirkmacht von CAS (via Gröbner-Basen).



Allerdings sieht man schon bei H: die Kartesische Korrespondenz ist gestört, die geometrische **Orts*linie*** nur ein echter Teil der algebraischen **Orts*kurve***! Bei der Orts*kurve* $\mathcal{I}$ des Inkreismittelpunkts I, wenn C auf dem Kreis K um A durch B läuft, zeigt sich: $\mathcal{I}$ besteht aus einer Strophoide *und* einem Kreis, die ihrerseits je zwei Örter von I und den Ankreismittelpunkten I1..I3 enthalten. Der *geometrische* Ort von I lässt sich also nur als eine **semialgebraische Menge** beschreiben !



Das verdeutlicht, dass so mächtige Werkzeuge wie CAS in Kopplung mit DGS ungeahnte fachliche und damit auch didaktische Herausforderungen stellen. Diese durchdenke man vor einem schulischen Einsatz und sinnvoller Weise auch schon bei der darauf abzielenden Genese eines solchen **ADGS** (Oldenburg 2005). Vorschläge dazu gibt es diverse, vgl. Strand 5 von ICTMT 5 (2001) sowie Botana&Valcarce (2004): „Considerable attention and efforts are being

given to an emerging field which can be termed *Symbolic Dynamic Geometry Environment* (SDGE), a synthesis of CAS and DGS."

NB: Es liegt nahe, mit diesen Bezeichnungen die verschiedenen Systeme nach ihrer internen Funktionsweise zu differenzieren (ADGS: numerisch, SDGE: symbolisch). Zu unterscheiden sind beide Klassen von Systemen mit bloß extern benutzbarem Algebra-Fenster – wobei Feli-X derzeit das einzige System ist, das bidirektional operiert, also auch algebraische Veränderungen an geometrischen Objekten zulässt. Dagegen rechnet Feli-X intern aus Zeitgründen numerisch und nicht symbolisch. Welche Art von System man benötigt, hängt natürlich von den intendierten Anwendungen ab. Hier dienen elementargeometrische Beispiele als **Benchmarks (BM)** für ADGS und zur Verdeutlichung. mathematischer und didaktischer **Knackpunkte (KP)**.

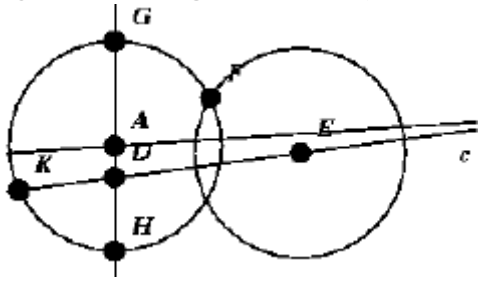
Fenster:

Geometrische Eigenschaften	Algebraische Eigenschaften

Bauweise:
- *nur Fenster:* DGS (Euklid, Geogebra)
- *numerisch:* ADGS (Feli-X)
- *symbolisch*: SDGE (Lugares?)

KP1: Was ist Stetigkeit? Wie Oldenburg (2005) schreibt, „können Artefakte der algebraischen Modellierung an der Oberfläche sichtbar werden. Bei DGS ist das z.B. bei den springenden Punkten der Fall (Kortenkamp 1999). Ein Grundverständnis der algebraisch-rechnerischen Arbeitsweise eines DGS kann deshalb zum kompetenten Umgang mit diesem Werkzeug beitragen." Sic! Und ein Grundverständnis der Hintergrund-Theorie ebenso: **Die „springenden Punkte" sind *keine* Artefakte der algebraischen Modellierung**! Sie sind auch nicht unbedingt unstetig! Zur Theorie siehe Gawlick (2003) und die Langfassung. Aus Platzgründen hier nur eines der zugrundeliegenden Phänomene:

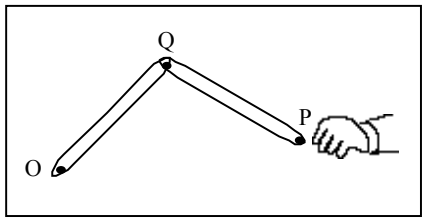
KP2: Verhalten von Schnittpunkten im Ausartungsfall Gegeben seien zwei Einheitskreise um A und E mit Schnittpunkt F. Bewegt man E längs einer Geraden über A hinweg, springt F in deterministischen DGS. Das ist nur scheinbar unstetig: Denn die Lage von F für A=E ist ja (nach Euklid!) undefiniert. Bei Cinderella springt F nicht – aber das bewirkt, dass eine „kontinuierliche Lageveränderung" des Zugweges **unstetig** verläuft (Gawlick 2001a): Zieht man *E* längs *c* durch *D*, bewegt *F* sich auf *G* zu, kehrt dann um und läuft über *H* bis *K*. Für $D \to A$ muss *F* bei stetigem Grenzübergang von *G* nach *H* springen. Also:



KP3: Stetigkeit *punkt-* oder *wegweise*?

Was für eine Dynamik braucht die Praxis? Das illustriert folgendes Beispiel:

BM1: Modellierung eines Gelenkarms Für diesen einfachen Gelenkmechanismus gibt es *zwei* statisch äquivalente Konstruktionen mit unterschiedlicher Dynamik! **Beide** sind physikalisch sinnvoll und sollten **modellierbar** sein. Das geht derzeit *nur* mit deterministischen DGS.

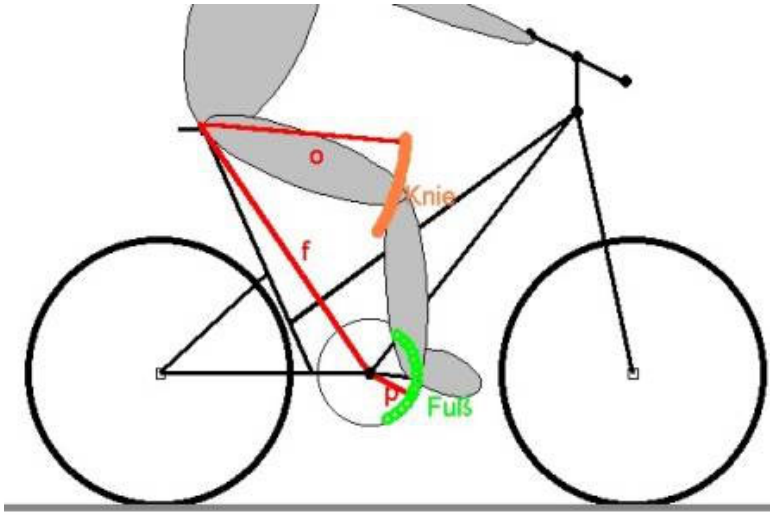


KP4: Reelle oder komplexe Geometrie? Gawlick (2004) zeigt: Beim Drehen einer **komplexen** Winkelhalbierenden *kann* jeder Punkt stetig in sich überführt wird, *ohne* dabei das Drehzentrum zu treffen. Wie soll man sich das vorstellen? Oder gar im Unterricht vermitteln? Das wäre aber nötig, damit die *visuell sprungfreie* Bewegung auch keine *epistemologischen Brüche* verursacht! Also:

BM2: Halbfreie Punkte Ein SDGE soll entweder deren **Freiheitsgrade *benutzbar* oder** ihre **Einschränkungen *transparent machen,*** sowie das **Zugverhalten begründen (**und es im komplexen Fall **interpretieren).** Insbesondere sollen **Punkte auf einer Kardioide** oder auf einer **logarithmischen Spirale** mathematisch korrekt behandelt werden, dito die **Variation des Trägers**. Schon Punkte auf Kegelschnitten sind ein ungelöstes Problem (Genevès 2004).

KP5: Reale vs. virtuelle Dynamik Deterministische DGS zeigen oft auch nur einen Teil des reellen Orts, relational-stetige DGS dagegen oft auch komplexe Teile, die real/reell gar nicht auftreten können. Ein einfaches Beispiel:

BM3: Der Radfahrer als Gelenkviereck aus Oberschenkel *o* und Unterschenkel *u* des Fahrers, Pedalstange *p* und Fahrradstange *f* des Rades. Der Zugmodus erlaube es, die **Bewegung** so **einschränken**, dass *oupf* fortbesteht („das Knie nicht kaputt geht“). Sie sei sowohl von *o* als auch von *p* **erzeugbar** (*beide* Füße treten.) Dieses „reverse dragging“ als ein Umkehren der Konstruktionsreihenfolge ist ein wesentlich neues Element von ADGS, da bei DGS i.d.R. nicht möglich (in Euklid begrenzt mit Strecken fester Länge).



BM4: Reelle Ortslinien Die Wege von Knie und Pedal seien ***algebraisch* als Ortslinien darstellbar** und ***geometrisch* durch *eigenes* Ziehen vollständig erfahrbar.** Bei Cinderella ist der reelle Ort nur in der Animation sichtbar – beim händischen Ziehen „zerreißt“ das Knie.

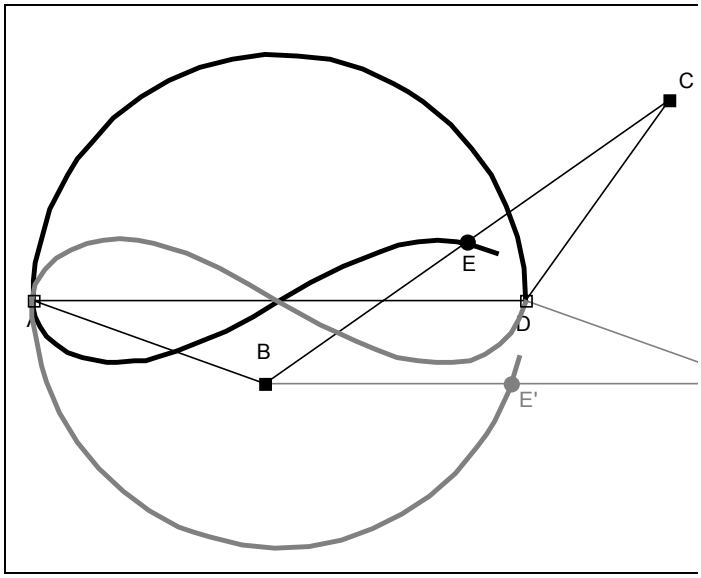
BM5: Koppelkurve des überschlagenen Gelenkparallelogramms *ABCD*. Für $|\overline{AB}| = a = |\overline{BE}| / \sqrt{2}$ durchläuft der Mittelpunkt *E* von *BC* bei festem *AD* eine **Bernoullische Lemniskate.**

a) (*geom.*) *ABCD* lasse sich (wie ein Mechanismus!) in ein Parallelogramm überführen. *E* durchläuft dann den **Pferchkreis** der Lemniskate.

b) (*alg./geom.*) Berechne und zeige die vollständige **Koppelkurve** *O* von *E*.

c) (*alg.)* Zerlege die Gleichung von *O* entsprechend zu den Komponenten von *O*: $f(x,u) = ((x^2+u^2)^2 - a^2(x^2-u^2))(x^2+u^2-a^2) = 0$.

Kein DGS kann *O* komplett zeigen – wohl aber Feli-X! BM 5c) erfordert ein SDGE.



BM6: Konsistente Kartesische Korrespondenz für I

a)Man definiere *algebraisch* nutzbare Objekte für die Orts*linien* von I, I1..I3.

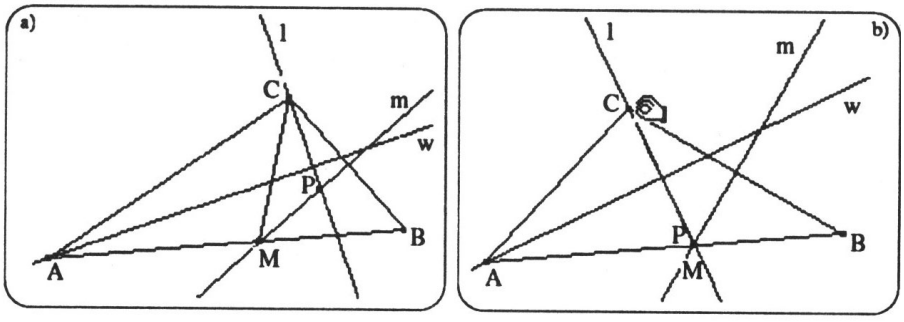
b) Man spezifiziere, wie sich Punkte auf Orts*kurven* wie $\mathcal{H}$ und $\mathcal{I}$ verhalten..

c)Wenn man I auf eine andere Komponente von $\mathcal{I}$ zieht – was macht dann C? Und wie verhalten sich dabei die Winkelhalbierenden?

BM7: *Voll* ziehbares Dreieck Euklid hat *beidseitig* ziehbare Strecken fester Länge, kann *daraus* aber kein Dreieck mit festen Seitenlängen bilden. Ein ADGS wie Feli-X ermöglicht das Ziehen an allen seinen Ecken.

BM8: „Die konstruierten Punkte noch binden“ (Hölzl 1994) Häufig entsteht bei Problemaufgaben der Wunsch, einen konstruierten Punkt einer zusätzlichen Bedingung zu unterwerfen – bei Hölzl z.B. möchte Igor sehen, wann P mit M zusammenfällt, um zu überschauen, wann ABC in zwei gleichschenklige Teildreiecke zerlegbar ist. Anders als mit DGS ist es mit ADGS möglich, durch die *algebraische* Zusatzbedingung d(P,M)=0 die Beweglichkeit der Konstruktion einzuschränken und so im Zugmodus den Lösungsraum zu durchlaufen.

Literatur In der Langfassung: mit Beispieldateien erhältlich unter gawlick@uni-landau.de .



Peter GEERING, Zürich

Lernbücher Mathematik

Die Lernbücher „Ich kann Mathematik“ enthalten eine Sammlung von offenen Aufgaben, die nach einem einfachen Einstieg auch weiterführende Fragen enthalten und so ein breites Anforderungsspektrum abdecken. Sie bieten allen am Lernen Beteiligten: Kindern, Eltern und Lehrenden, einen einfachen Einstieg in die Welt der Mathematik und vermitteln ein dem heutigen Wissen entsprechendes Bild von Mathematik und vom Mathematik-Lernen.

(Wunsch-) Bilder von Mathematik

- Mathematik hilft beim Verstehen der Welt.
- Jeder Mensch hat seine eigene Mathematik, Begriffe und Regeln dienen der Verständigung.
- Mathematik ist etwas, dass man „betreibt“, Mathematik ist Denk-Sport.
- Mathematik „funktioniert“ – das gängige Bild für viele.

Mathematik-Lernen heißt

- die Schönheit von Mustern und Strukturen erkennen,
- Begriffe bilden, Regeln finden und formulieren,
- Fertigkeiten erwerben, verfeinern und pflegen - wie im Sport,
- sich mit Fragen auseinandersetzen.

Für unbefangene Betrachter sind Schulbücher die „Mathematik“ schlechthin und bieten oft ein anderes Bild: Freiraum besteht keiner, alles ist genau vorgeschrieben. Lernen besteht im Nachvollziehen, im ungünstigsten Fall im Auswendiglernen von unverstandenen Rechensätzen.

Was brauchen Kinder, um Mathematik zu lernen?

Die Lernbücher sind keine Lehrgänge sondern als „Lesebücher“ Hilfsmittel für einen offenen und zielorientierten Unterricht. Sie bieten das, was Kinder zum Mathematik-Lernen brauchen:

- Fragen, die sie zu weiteren Fragen anregen.
- Herausforderungen und Ziele, die für sie erreichbar sind, an denen sich zu arbeiten lohnt.
- Antworten, die sie verstehen können.
- Anerkennung für ihre Leistungen.
- Freiräume um sich entfalten zu können.

Hinter den Lernbüchern „Ich kann Mathematik“ steht die Vorstellung von selbstbestimmtem eigenständigem Lernen. Auch bekannte Aufgaben und Übungen erscheinen daher in einem neuen Gewand. Bei der Gestaltung galten die folgenden Leitideen:

- Im Zentrum stehen Fragen.
- Die Kinder werden immer direkt angesprochen.
- Die Seiten sind thematisch nach Zielen geordnet.
- Alle Anleitungen sind möglichst kurz aber vollständig.
- Die Bearbeitung erfolgt mit Hilfe oder selbstständig.
- Auf “Kulissen” wird verzichtet.
- Nur ein Minimum an didaktischen Materialien wird verwendet.
- Alle Seiten sind “nach oben offen”.

- Im Zentrum stehen die Fragen.

Jede Seite/Doppelseite beginnt mit einer an die Kinder gerichteten Kernfrage. Mit der Frage wird das Ziel der Seite in einer den Kindern verständlichen Form ausgedrückt. Sie ermöglicht es ihnen auch, ihr Vorwissen einzubringen.

- Die Kinder werden immer direkt angesprochen.

Alle zur Bearbeitung notwendigen Informationen stehen auf den Seiten, ebenso die Ziele. Sie sind in einer den Kindern zugänglichen Sprache geschrieben, das heißt einer Sprache die im Verlauf der Arbeit mit den Lernbüchern erworben wird. Auch Fachbegriffe wie „Addition“, „addieren“ usw. gehören dazu.

- Die Seiten sind thematisch nach Zielen geordnet.

Die Lernbücher sind thematisch nach Zielen aufgebaut. Ab dem 2. Schuljahr dienen die Ziele – Ausschnitte aus dem Lernbegleitbogen – auch als Inhaltsverzeichnis. Ein Lernbuch präsentiert sich somit nicht als Lehrgang sondern als Bilderbuch zu „Was ist Mathematik?“ für Leserinnen und Leser aller Alters- und Schulstufen. Die Lernbücher sind kein „Einwegmaterial“, das bearbeitet und weggelegt wird. Viele Übungen erscheinen als Spiele, die immer wieder gespielt werden können – auch später. Gerade für den Erwerb und die Pflege der Grundfertigkeiten ist es sehr wichtig, dass **dieselben** Aufgaben- und Übungsformate immer wieder bearbeitet werden. Der kompetenzorientierte Aufbau der Lernbücher erleichtert solche Wiederholungen. Die Frage lautet dann: „Kann ich das schon?“ oder „Kann ich das noch?“

- Alle Anleitungen sind möglichst kurz aber vollständig.

Die Lernbücher sind ohne „Gebrauchsanleitung“ lesbar – für Erwachsene und Kinder mit gutem Textverständnis. Das Begleitheft „Unterrichten mit dem Atlas Mathematik“ hilft Lehrenden bei der Gestaltung des Unterrichts.

- Die Bearbeitung erfolgt mit Hilfe oder selbstständig.

Mit Lernbüchern arbeiten zu können, d. h. selbstständig mathematischen Fragen nachgehen zu können, ist ein Ziel für die ganzen Schulzeit. Daraus ergibt sich, dass die Kinder bei der Arbeit mit den Lernbüchern mehr oder weniger Hilfe benötigen. Diese Hilfe wird im Unterricht von der Lehrperson der Klasse, Gruppen oder einzelnen Kindern nach Bedarf geleistet. Die Lernbücher sind aber so formuliert, dass auch schulfremde Personen, insbesondere Eltern, den Kindern helfen können.

- Auf “Kulissen” wird verzichtet.

Die Seiten der Lernbücher enthalten viel freien Raum, der die Kinder zu Notizen und Zeichnungen einlädt. Das Bildmaterial beschränkt sich auf Dokumente von Kindern und Fotografien. Die mathematischen Fragen sollen die Kinder ansprechen und animieren, nicht lustige Zeichnungen.

- Nur ein Minimum an didaktischen Materialien wird verwendet.

Didaktische Materialien können das Lernen unterstützen, sind aber keine notwendige Bedingung dafür. Damit auch schulfremde Personen mit den Lernbüchern arbeiten oder die Kinder bei der Arbeit unterstützen können, werden in den Lernbüchern vorzugsweise Materialien verwendet, die in vielen Haushalten verfügbar sind oder leicht beschafft werden können, beispielsweise Knöpfe oder Münzen an Stelle von Plättchen.

- Alle Seiten sind “nach oben offen”.

Wer sich mit den Fragen der Lernbücher auseinandersetzt, kommt von selbst auf Folgefragen. Viele Seiten enthalten auch Tipps dazu. Der Zahlenraum für Aufgaben und Spiele ist grundsätzlich immer nach oben offen. Eigene Überlegungen und Rechenwege oder Ausweitungen von Fragen und Aufgaben so zu formulieren, dass auch andere es verstehen können, ist auch für Fortgeschrittenere immer wieder eine Herausforderung.

Unterricht gestalten mit dem „Atlas Mathematik“

Beim Schuleintritt bringen die einen Kinder fast gar nichts, andere fast den ganzen Schulstoff des ersten Jahres mit. Zudem denken und lernen Kinder unterschiedlich (vgl. SPIEGEL/SELTER). Allein diese Tatsachen bedeuten für Lehrende in der Grundschule eine große Herausforderung.

Hinter den Lernbüchern steht ein kompetenzorientiertes Planungsmodell für den Unterricht. Als primäre Planungsgrundlage dient ein Lernbegleitbogen mit den im Schuljahr zu bearbeitenden Zielen. Die Lernbücher sind so aufgebaut, dass sie ab dem 2. Schuljahr zu allen diesen Zielen eine oder mehrere Aufgaben enthalten. Damit bieten sie ein Grundgerüst auch für den Stütz- und Förderunterricht. Für den Unterricht im Klassenverband steht im Begleitmaterial für Lehrerinnen und Lehrer zusätzlich eine Fülle aufbereiteter Ideen für die Arbeit in der Klasse und in Gruppen zur Verfügung.

Thematisch gegliederte Musterplanungen für die einzelnen Schuljahre ersetzen die starren Lehrgänge. „Etappen“ genannte Planungseinheiten konzentrieren sich je auf eine kleine Auswahl von Zielen. Die zugehörigen Kommentare gehen jeweils von den Interessen der Kinder aus, enthalten Beobachtungsfragen, didaktische Anmerkungen und Erfahrungsberichte aus dem Unterricht von Marianne Kunath. Anhand dieser Berichte können sich interessierte Lehrerinnen und Lehrer ein Bild davon machen, wie ein mit den vorgeschlagenen Materialien gestalteter Unterricht aussehen kann.

Zu jeder Etappe gehören auch Standortbestimmungen. Diese bilden einerseits die Grundlage für die Planung des weiteren Unterrichtsverlaufs, anderseits stellen sie sicher, dass bei allen Kindern die wichtigen Ziele erreicht oder zumindest im Auge behalten werden.

Beobachten als Grundlage der gezielten Förderung

Eine ressourcenorientierte Förderung der Lernenden geht davon aus, was diese mitbringen. Für die dazu nötigen Schritte bieten die Lernbücher das geeignete Material. Vorgehen im Förderunterricht:

- Den Lernstand der erfassen: Geeignete **offene Aufgaben stellen**.
- **Beobachten**, Beobachtungen in Lernbegleitbogen eintragen.
  Was kann das Kind? Was kann es noch nicht?
- Leistungen **anerkennen**.
- Aufgaben und Hilfen **anpassen**, zu weiteren Aktivitäten **ermuntern**.

Ist eine Aufgabe für ein Kind zu anspruchsvoll, wird sie soweit vereinfacht, bis das Kind sie lösen kann.

Literatur:

Geering Peter, Kunath Marianne: Ich kann Mathematik, Lernbücher 1 und 2. Seelze 2006: Friedrich/Lernbuchverlag

Spiegel Hartmut, Selter Christoph: Kinder & Mathematik – Was Erwachsene wissen sollten. Seelze 2003: Kallmeyer

Daniela GÖTZE, Paderborn

„Ich kapier auch kein Prinzip“ – Zum Einfluss sozialer Interaktion von Grundschulkindern beim Lösen komplexer Aufgaben

Theoretische Rahmung

In den letzten Jahren sind die Forderungen nach einem Mathematikunterricht, in dem Kinder mehr Spielraum für die Verständigung über ihre Lösungswege untereinander haben, immer lauter geworden. Die dahinter stehenden konstruktivistischen Konzepte des Lernens wenden sich von der zentralen Rolle des Lehrerhandelns ab und betonen, dass Lernen ein vom Kind gesteuerter und in einem sozialen Kontext eingebetteter Prozess ist (vgl. Quasthoff & Steinbring 2000). Ein Unterricht gemäß den Leitideen des individuellen und zugleich sozialen Lernens beinhaltet, dass Kinder sich über ihre Rechenwege und -strategien im Rahmen von gemeinschaftlichen Reflexionsphasen austauschen können, und es entwickelt sich „eine Kultur des wechselseitigen Bemühens um Verstehen und Verstanden werden“ (Bauersfeld 2002). Dass ein derartig gestalteter Unterricht anscheinend auch zu einem größeren mathematischen Verständnis führen kann, zeigen diverse Arbeiten aus der Psychologie, die sich mit den Effekten des lauten Denkens (z.B. Chi 1994) und des kooperativen Lernens (z.B. Webb 2002) auseinandersetzen. Aus den Ergebnissen dieser psychologischen Forschungsarbeiten kann man schlussfolgern, dass er wünschenswert wäre, wenn sich möglichst alle Kinder mit ihren Mitschülern über ihre Rechenstrategien und Lösungswege im Mathematikunterricht austauschen. Die Unterrichtspraxis zeigt aber, dass sich häufig nur wenige Kinder an reflektierenden Unterrichtsgesprächen beteiligen. Bei einem Teil der Kinder scheinen die mündlichen Erklärungen ihrer Mitschüler überhaupt nicht anzukommen. Auch wenn sie den Eindruck vermitteln, dass sie durchaus zuhören, bleibt das Hören eher passiver Natur (vgl. Röhr 2002). Dieser Problematik bewusst mutmaßt Hengartner (1992), dass vielleicht in der durch reichhaltige Aufgaben ausgelösten Interaktion unter den Kindern in Kleingruppen der wohl wirkungsvollste Weg zu produktivem Denken liegt, den wir in der Schule anzubieten vermögen.

Zielsetzung und Design der Studie

Im Rahmen eines mehrmonatigen Forschungsprojekts standen folgende Forschungsfragen im Mittelpunkt des Interesses:

- Führt eine durch komplexe Aufgaben ausgelöste Interaktion unter Kindern in heterogenen Kleingruppen wirklich zu mehr Erkenntnis?
- Welche spezifische Form sozialer Interaktion innerhalb der Gruppen erscheint besonders wirkungsvoll oder hinderlich für den Erkenntnisgewinn zu sein?

Um diesen Fragen nachzugehen, wurden von Anfang September 2004 bis Ende Februar 2005 Kinder zweier dritter Klassen in regelmäßigen Abständen Aufgaben gestellt, über deren Lösung sie sich in heterogenen Kleingruppen verständigen sollten. Dabei eignete sich nicht jede Aufgabe aus den einzelnen Lerninhalten des 3. Schuljahres zur Diskussion in Kleingruppen (vgl. Röhr 1995). Die Aufgaben ...

- müssen eine Vielfalt an unterschiedlichen Lösungswegen zulassen
- sind hinreichend anspruchsvoll und komplex, damit Kinder sich die Lösungswege gegenseitig erklären müssen. Einfache Rechenaufgaben eignen sich in dem Sinne nicht für eine Kleingruppendiskussion
- sind herausfordernd, so dass die Kinder einen Sinn darin sehen, mit anderen Kindern die Lösung der Aufgabe zu diskutieren und zu überprüfen

Für den speziellen Zweck der Untersuchung mussten die Aufgaben darüber leicht abwandelbar sein, damit ein Lernerfolg bei den Kindern anhand einer abgewandelten Aufgabe überprüft werden kann.

Um einen Eindruck über die Effektivität von Kleingruppengesprächen zu bekommen, haben nicht immer alle Kinder in Kleingruppen diskutieren dürfen und die Zusammensetzung der Kleingruppen wechselte. Manchmal durften die Kinder der einen Klasse in Gruppen arbeiten, die anderen nicht, ein anderes Mal durfte nur ein Teil jeder Klasse in Gruppen arbeiten, während dem anderen Teil dies nicht gestattet wurde. Im Anschluss an jede Kleingruppenarbeitsphasen wurden die Ergebnisse der einzelnen Gruppen vor der ganzen Klasse präsentiert. Die Kinder ohne Gruppenarbeit haben dahingegen – gemäß der gängigen Unterrichtspraxis – lediglich im Rahmen einer gemeinschaftlichen Reflexionsphase mit der ganzen Klasse unterschiedliche Lösungswege kennen lernen und hinterfragen können. Anschließend haben die Kinder anhand von in Einzelarbeit zu lösenden Transferaufgaben ihre Erkenntnisfortschritte zeigen können.

Erste Resultate

Im Verlauf dieser Studie konnte festgestellt werden, dass die Kinder, die ihre Lösungswege mit ihren Mitschülern in Kleingruppen diskutieren durften, immer deutlich bessere Leistungen in den Transferaufgaben zeigten,

als die Kinder, die nur an einer Reflexionsphase im Klassenverband teilgenommen haben. Dieser Befunde lässt sich folgender Maßen erklären:

- durch die Arbeit in Kleingruppen im Vergleich zum Plenum der Klasse kann eine größere sprachliche Beteiligung an mathematischen Gesprächen pro Kind erreicht werden
- durch die „Interaktionsverdichtung“ in den Kleingruppen werden die Kinder zu aktiven Zuhörern der Erklärungen ihrer Mitschüler
- die Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten in Kleingruppen hat dabei vergleichsweise „intimen“ Charakter und einen geringeren Öffentlichkeitsgrad zur Äußerungen von Unklarheiten, Nachfragen, Fehllösungen etc.

Zudem war es erstaunlich, dass in den unterschiedlichsten Kleingruppengesprächen häufig ähnliche Gesprächsstrukturen zu beobachten waren bzw. sich die unterschiedlichen Gespräche häufig durch bestimmte Gesprächsmerkmale ähnelten. Nach einer genaueren Analyse dieser Merkmale zeigte sich, dass sie Hinweise darauf geben, ob das Gespräch für die einzelnen Kinder erkenntnisgewinnend zu sein scheint oder eher nicht. Folgende Gesprächsmerkmale konnten in den Transkripten der Kleingruppengespräche mehrfach identifiziert werden:

1. Die Kinder haben unterschiedlich große Redeanteile an den einzelnen Kleingruppengesprächen.
2. Der Lösungsweg zu einer Aufgabe wird im Sinne eines „Lehrervortrags“ strukturiert vorgetragen.
3. Die eigentlich zuhörenden Kinder werden durch das erklärende Kind interaktiv in die Erklärungen einbezogen.
4. Die einzelnen Schritte zur Lösung einer Aufgabe werden von den zuhörenden Kindern paraphrasierend erneut vorgetragen.
5. Die Thematisierung falscher oder unvollständiger Lösungen führt zu reichhaltigen Diskussionen.
6. Es werden gezielte Rückfragen gestellt und diese auch wirklich beantwortet.

Bezogen auf das erste Gesprächsmerkmal konnte gezeigt werden, dass es keinen signifikanten Zusammenhang zwischen Anzahl der Gesprächsbeiträge und Anzahl korrekter Lösungen bei den anschließenden Transferaufgaben gibt. Demnach haben die Kinder mit den größten Redebeiträgen nicht zwangsläufig auch bessere Ergebnisse bei den Transferaufgaben gezeigt.

Läuft ein Gespräch im Sinne des zweiten Merkmals ab, so treten die einzelnen Kinder nicht in Interaktion mit ihren Mitschülern und damit auch nicht in Interaktion mit der Aufgabe, so dass ein bloßes Vortragen von Lösungswegen wenig erkenntnisgewinnend für die beteiligten Kinder ist.

Anders ist das bei den Merkmalen drei bis sechs. Läuft ein Kleingruppengespräch in diesem Sinne ab, so treten alle beteiligten Kinder in Interaktion miteinander und mit der Aufgabe, so dass ein Kleingruppengespräch, welches gekennzeichnet ist durch eines oder mehrere der Merkmale drei bis sechs, besonders erkenntnisgewinnend für alle beteiligten Kinder erscheint.

Die Rolle der Lehrperson

Sollen Kinder im Mathematikunterricht mehr Gelegenheiten bekommen, sich mit ihren Mitschülern über ihre Lösungswege auszutauschen, bedarf es eines Unterrichts, in dem die Lehrperson weder eine zu große Dominanz ausübt noch die Kinder ungesteuert sich selbst überlässt. Vielmehr bedarf es einer Lehrperson, die im Sinne der neosokratischen Gesprächsmethode nach Nelson (vgl. Loska 1995) sich in Zurückhaltung übt, die Gruppengespräche der Kinder im Sinne der obigen Erkenntnisse behutsam moderiert, ggf. Stellungnahmen und Begründungen einfordert oder Prüfprozesse einleitet, bei unsicheren Kindern Beiträge verstärkt und nicht zuletzt Irrwege, Sonderwege und Umwege der Kinder zulässt.

Literatur

BAUERSFELD, HEINRICH (2002): Interaktion und Kommunikation. In: Grundschule, 34 (3), 10-14

CHI, M. et al. (1994): Eliciting self-explanations improves understanding. In: Cognitive Science, 18, 439 – 477

HENGARTNER, ELMAR (1992): Für ein Recht der Kinder auf eigenes Denken. In: Die neue Schulpraxis, 18 (7/8), 15-27

LOSKA, RAINER (1995): Lehren ohne Belehrung: Leonard Nelsons neosokratische Methode der Gesprächsführung. Bad Heilbrunn: Klinkhardt

QUASTHOFF, UTA; STEINBRING, HEINZ (2000): Diskurseinheiten im Mathematikunterricht. In: Grundschule, 32 (12), 57-59

RÖHR, MARTINA (1995): Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe: Entwicklung und Evaluation eines fachdidaktischen Konzepts zur Förderung der Kooperationsfähigkeit von Schülern. Wiesbaden: DUV

RÖHR, MARTINA (2002): Kommunikation anregen – Verstehen fördern. In: Grundschulunterricht, 49 (1), 3-8

WEBB, N.M., FARIVAR, S., MASTERGEORGE, A. (2002): Productive helping in cooperative groups. In: Theory Into Practice, 41, 13 – 20

Günter Graumann, Bielefeld

Zugänge zu Werten trigonometrischer Funktionen im Bereich 90° bis 360°

Die Einführung und Behandlung trigonometrischer Funktionen erfolgt – wenn überhaupt – meist ohne Begründung und Hinterfragung der damit zusammenhängenden Definitionen. Lediglich die nachträglich erfolgenden Anwendungen können den Sinn der Begriffsbildungen aufleuchten lassen. Meiner Meinung nach sollte man aber auf die Hintergründe der Definitionen mit eingehen.

Für die ***Motivation der Einführung trigonometrischer Funktionen*** bietet sich u. a. ein genetischer Zugang[1] an, bei dem historische Gesichtspunkte mit einbezogen werden können. Schon seit Thales hat man mittels der Dreieckslehre unmessbare Entfernungen ermittelt, indem ähnliche Dreiecke gezeichnet, die gewünschte Entfernung in der Zeichnung gemessen und dem Maßstab entsprechend umgerechnet wurden, so wie man es heutzutage im Geometrieunterricht der Klasse 7/8 oft auch tut. Dieses Verfahren stößt aber an Grenzen, wenn das Verhältnis der gegebenen zur gesuchten Seite sehr klein bzw. sehr groß ist wie z. B. bei Dreiecken in der Astronomie. Dieses Problem ist bekanntermaßen auch der Auslöser für die Entwicklung der Trigonometrie (bei Aristarch um 270 v. Chr. und vor allem bei Hipparch um 150 v. Chr. und Ptolemaus um 150 n. Chr.) gewesen[2].

Bei der Einführung trigonometrischer Funktionen am rechtwinkligen Dreieck sollte auch diskutiert werden, dass die Ähnlichkeit aller rechtwinkligen Dreiecke[3] mit einem vorgegebenen Winkelmaß α (mit $0° < \alpha < 90°$) die Grundlage dafür bietet, einem Winkelmaß eindeutig eine Zahl (als Verhältnis zweier Seitenlängen) zuzuordnen.

Dass man aus kombinatorischen Gründen nun sechs verschiedene trigonometrische Funktionen bilden kann, wie diese voneinander abhängen und wie man die Werte dieser Funktionen für Winkelmaße zwischen 0° und 90° (außer durch Taschenrechnerdruck) ermitteln kann, ist ein weiteres Thema in diesem Zusammenhang, auf das ich aber hier nicht weiter eingehen kann. Vielmehr möchte ich jetzt auf mein eigentliches Thema zu sprechen kommen.

---

[1] Vgl. etwa: Graumann, G. (1987). Eine genetische Einführung in die Trigonometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987, Bad Salzdetfurth 1987, S. 146 - 149.

[2] Vgl. etwa: Braunmühl, A. v. (1900). Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Nachdruck 1971 Teubner: Stuttgart, S. 7ff.

[3] Hipparch und Ptolemäus benutzten zwar gleichschenklige Dreiecke, in der Schule wird man (wie seit den Indern ab ca. 400 n. Chr.) mit dem rechtwinkligen beginnen.

Spätestens bei der Behandlung stumpfwinkliger Dreiecke stößt man auf die ***Erweiterung trigonometrischer Funktionen*** auf den Bereich der Winkelmaße 90° bis 180°. Hierbei taucht eine Situation auf, die in der Mathematik häufiger vorkommt: ***Ein bekannter Begriff soll auf einen neuen Bereich erweitert werden***. Im Sinne einer nicht kurzsichtigen mathematischen Bildung sollte man es sich im Unterricht nicht entgehen lassen, diesen Aspekt (an dem konkreten Beispiel) ausführlicher zu behandeln. Dabei ist zunächst einmal hervorzuheben, dass man in der Mathematik prinzipiell eine Definition (bis auf logische Widersprüche) völlig frei gestalten kann. Andererseits soll eine Definition sich auch sinnvoll in den bekannten Rahmen einfügen und bei der Erweiterung eines Begriffs auf einen größeren Bereich ist es üblich, dass bestimmte ***Gesetzmäßigkeiten im erweiterten Bereich ihre Gültigkeit erhalten sollen***.

In unserem Fall können wir die Suche nach solchen Gesetzen und deren Diskussion den Lernenden zur selbsttätigen Arbeit überlassen. Dabei werden erfahrungsgemäß Gesetze wie „$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$“ oder andere Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen, der Sinus- und Cosinussatz für beliebige Dreiecke sowie die Definitionen am Einheitskreis wie etwa „$\sin\alpha$ = y-Koordinate“ oder (sofern schon behandelt) „$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$“ genannt. In arbeitsteiliger Gruppenarbeit können alle diese (oder auch noch andere) Vorschläge näher daraufhin untersucht werden, ob sie zum Problem etwas beitragen können.

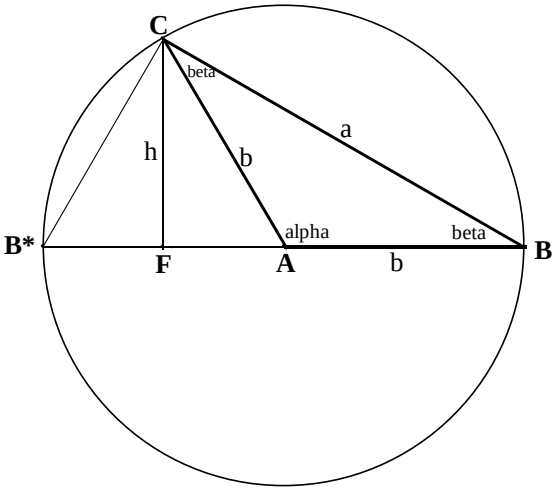
Beim ***Vorschlag „$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$“*** wird man sehr schnell feststellen, dass damit das Problem nur auf die Definition trigonometrischer Werte für negative Winkelmaße verschoben wird.

Bei der ***Definition am Einheitskreis***, die in den Schulbüchern meist zu finden ist, tritt die Frage auf, ob die Vorzeichen der Koordinaten zu berücksichtigen sind oder nicht? Bei den Definitionen am rechtwinkligen Dreieck hatten wir es ja immer nur mit Verhältnissen von Längen zu tun; und die sind immer positiv. Das Kreismodell allein gibt keine Antwort auf die Frage des Vorzeichens.[4]

Die Erweiterung des ***Sinus- und Cosinussatzes*** auf den neuen Bereich liefert uns dann eine Lösung, wenn man stumpfwinklige Dreiecke genauer

[4] Dieser Aspekt wird oft einfach übergangen, so dass kritisch denkende Menschen verunsichert werden und sich nicht mehr trauen, intuitiv vorhandene Unklarheiten explizit zu äußern, während andere Schüler und Schülerinnen darin bestärkt werden, nur auf den algorithmischen Aspekt der Mathematik zu achten.
Dadurch dass – wie es in einigen Schulbüchern zu finden ist – das Kreismodell mit den Koordinaten zur Einführung der trigonometrischen Funktionen verwendet wird, ändert sich an dem genannten Problem im Prinzip nichts, außer dass es noch weniger zu erkennen ist und eine Motivation für eine solche Definition gänzlich fehlt.

betrachtet. Der Einfachheit halber gehen wir dabei von einem gleichschenklig- stumpfwinkligen Dreieck aus und betten dieses in einen Kreis mit einer der beiden gleichlangen Seiten als halben Durchmesser ein.



Setzen wir nun den Sinussatz auch für stumpfwinklige Dreiecke voraus, so ergibt sich $a/\sin\alpha = b/\sin\beta$ bzw. nach Umformung $\mathbf{\sin\alpha = \frac{a}{b} \cdot \sin\beta}$,

womit wir den Sinus eines stumpfen Winkels berechnen können.
Hiermit ergibt sich auch, dass $\sin\alpha$ positiv ist, da alle drei Größen a, b und $\sin\beta$ positiv sind.

Wir können an der Figur aber noch weitere Tatsachen entdecken: Einmal gilt im Dreieck ABC wegen der Winkelsumme $2\cdot\beta = 180°-\alpha$ und damit $\beta = 90°-\frac{\alpha}{2}$, womit wir $\sin\alpha = \frac{a}{b} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$ erhalten und damit den Sinus

für stumpfe Winkel auf den Cosinus für spitze Winkel zurückführen können. Wollen wir nun aber $\frac{a}{b}$ nicht messend ermitteln, so ergibt sich z. B. bei Betrachtung des von ABC halben Dreiecks[5] $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\beta = \frac{a}{2 \cdot b}$, d. h. es ist $\frac{a}{b} = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. Insgesamt gilt also[6] $\mathbf{\sin\alpha = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}$.

Weiterhin können wir den Winkel $180°-\alpha$ ins Auge fassen. Über die Dreiecke ACF sowie BCF erhalten wir die Gleichungen $\sin(180°-\alpha) = h/b$ und $h = a \cdot \sin\beta$, womit sich $\sin(180°-\alpha) = \frac{a}{b} \cdot \sin\beta$ ergibt. Mit dem

Ergebnis aus dem Sinussatz folgt daraus $\mathbf{\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha}$.

---

[5] Man kann auch das Dreieck BCB* betrachten und erhält nach dem Thalessatz einen rechten Winkel bei C. Dann folgt auch diese Beziehung sowie $|CB^*| = 2b\cdot\sin\beta$ und nach dem Satz von Pythagoras $|CB^*|^2 = 4b^2 - a^2$.

[6] Eine Formel, die man auch mittels des Halbwinkeltheorems erhalten könnte.

Setzen wir nun den Cosinussatz für das stumpfwinklige Dreieck ABC voraus, so erhalten wir $a^2 = b^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot b \cdot \cos\alpha$ und damit $\cos\alpha = 1 - \frac{a^2}{2 \cdot b^2}$, wobei (wie wir oben mit Dreieck BCB* gesehen haben oder im halbierten Dreieck ABC erkennen können) $\frac{a}{2 \cdot b} = \cos\beta$ gilt, so dass sich **$\cos\alpha = 1 - 2 \cdot \cos^2\beta$** ergibt. Mit dem trigonometrischen Pythagoras folgt daraus dann $\cos\alpha = -(1-2 \cdot \sin^2\beta)$ oder $-(\cos^2\beta - \sin^2\beta)$. Wegen $\beta < 45°$ d.h. $\sin^2\beta < 0.5$ oder $(\cos^2\beta - \sin^2\beta) = \cos 2\beta$ können wir schon ersehen, dass **cos α negativ** sein muss, also nicht als Längenverhältnis allein definiert sein kann, sondern mit Vorzeichen (wie bei den Koordinaten) behaftet ist.
Fassen wir wieder den Winkel $180° - \alpha$ ins Auge, so ergibt sich im Dreieck ACF $\cos(180° - \alpha) = |AF|/b$ wobei nach Pythagoras $|AF|^2 = b^2 - h^2$ mit $h = a \cdot \sin\beta$ (im Dreieck BCF) gilt, d. h. $\cos^2(180° - \alpha) = 1 - \frac{a^2}{b^2} \cdot \sin^2\beta$.

Mit dem obigen Ergebnis des Sinussatzes folgt dann
$\cos^2(180° - \alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ und wegen des festgestellten Vorzeichens haben wir damit **$\cos(180° - \alpha) = -(\cos\alpha)$**.

Die Tangensfunktion erweitern wir nun durch Fortführung des Gesetzes $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$, womit sich ergibt, dass $\tan(180° - \alpha) = -(\tan\alpha)$ ist.

Für den Bereich 180° bis 360° empfiehlt es nun, die Symmetrien am Einheitskreis zu nutzen und die Vorzeichen entsprechend den Koordinatenvorzeichen des zugehörigen Kreispunktes zu wählen.

Über die ***Summen- und Differenzregeln*** können wir ebenfalls die trigonometrischen Funktionen erweitern, wobei wir sofort den ganzen Bereich von 90° bis 360° (und sogar darüber hinaus) erfassen können. Z. B. ist
$\sin(90° + \varphi) =$ $\sin 90° \cdot \cos\varphi + \cos 90° \cdot \sin\varphi = 1 \cdot \cos\varphi + 0 \cdot \sin\varphi =$ **$\cos\varphi$** oder
$\cos(90° + \varphi) =$ $\cos 90° \cdot \cos\varphi - \sin 90° \cdot \sin\varphi = 0 \cdot \cos\varphi - 1 \cdot \sin\varphi =$ **$-(\sin\varphi)$** .
Weitere Gleichungen (z.B. für $\sin(180° - \alpha)$ etc.) sollten untersucht werden und sind gute Übungen. Auch die Verwendung der Formeln für den halben Winkel sind dabei geeignet, wie wir schon oben fest festgestellt hatten.
Falls die Summen- und Differenzregeln erst später behandelt werden, so stellen diese dann eine gute Möglichkeit zur Überprüfung der früher gemachten Festlegungen dar. Ich halte es aber für angebracht, die Summen- und Differenzregeln zunächst für den Bereich 0° bis 90° zu beweisen und die Erweiterung der trigonometrischen Funktionen auf den Bereich 90° bis 360° danach zu behandeln, wobei dann – wie oben erwähnt – verschiedene Zugänge miteinander verglichen werden können.

Gilbert GREEFRATH, Wuppertal

Prozessanalysen von Modellierungsaufgaben

Einleitung

Offene Aufgaben werden in den letzten Jahren besonders beachtet, da sie beim Erwerb von Modellierungskompetenzen eine besondere Bedeutung haben. Diese Arbeit behandelt eine Untersuchung zu speziellen offenen Aufgaben in der Sekundarstufe I, bei denen Modellierung eine wichtige Rolle spielt. Im Folgenden werden Ergebnisse detaillierter Fallstudien mit solchen Aufgaben vorgestellt. Besonders interessiert dabei die Planung von realen und mathematischen Modellen durch die Schülerinnen und Schüler.

Verwendete Aufgaben

Für die Untersuchung wurden offene Aufgaben mit Realitätsbezug verwendet. Diese Aufgaben können nach Anfangszustand, Transformation und Endzustand in verschiedene Typen eingeteilt werden (s. Wiegand & Blum, 1999 u. Greefrath, 2004). Für die Untersuchung wurden zwei Aufgaben mit unklarem Anfangszustand und unklarer Transformation ausgewählt. Eine Aufgabe dagegen hatte nur einen unklaren Endzustand. Ein Beispiel für eine verwendete Aufgabe ist die folgende:

■ *Was kostet das Verputzen dieses Hauses?*

Interviewdesign

Insgesamt wurden bisher 14 Interviews (28 beteiligte Schülerinnen und Schüler) ausgewertet. Diese Interviews wurden an 3 Hauptschulen, 3 Realschulen und 2 Gesamtschulen in verschiedenen Regionen Nordrhein-Westfalens durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler konnten sich freiwillig zur Teilnahme an den Interviews melden. Sie hatten die zu bearbeitenden Aufgaben, bzw. ähnliche Aufgaben, vor dem Interview nicht gesehen. Die Schülerinnen und Schüler wurden aufgefordert die Aufgaben zu zweit – ohne weitere Hilfen – zu lösen. Die Entscheidung, zwei Schülerinnen oder Schüler gemeinsam zu interviewen, wurde getroffen, um durch

die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler untereinander mehr Informationen zum Lösungsprozess zu erhalten. Die Arbeit der Schülerinnen und Schüler an den Aufgaben wurde mit einer Videokamera aufgezeichnet.

Auswertungsmethoden

Zur Auswertung wurden die Interviews komplett transkribiert. Auf Grundlage der Transkripte wurden die Handlungen und Gespräche der Schüler in Abschnitte eingeteilt, die dann einer von fünf Prozesskategorien zugeordnet wurden:

- Planung,
- Datenbeschaffung,
- Datenverarbeitung,
- Kontrolle,
- Restkategorie

Die Prozesskategorie *Planung* beschreibt Textstellen, in denen die Schülerinnen und Schüler über den Weg der Aufgabenlösung diskutieren oder die, im weitesten Sinne, den Weg der Aufgabenlösung betreffen. Zur Kategorie *Datenbeschaffung* zählen Textstellen, in denen Schülerinnen und Schüler Daten für die weitere Arbeit an der Aufgabe beschaffen. Die kann durch raten, abzählen, schätzen, messen oder durch das Aufrufen von vorher ermittelten Zwischenergebnissen geschehen. Die Prozesskategorie *Datenverarbeitung* beschreibt das Berechnen mit konkreten Werten. Dies kann ohne oder mit Taschenrechner geschehen. Die Prozesskategorie *Kontrolle* umfasst Textstellen, bei denen die Datenverarbeitung, Datenbeschaffung oder Planung angezweifelt oder überprüft wird. Allen anderen Textstellen wurden der *Restkategorie* zugeordnet.

Die Codes werden Textstellen möglichst geringer Länge zugeordnet, um eine spätere Auswertung der Code-Anzahlen zu ermöglichen. In der Regel beziehen sie sich auf eine Aussage eines Schülers oder einer Schülerin. Sie können aber auch kurze Abschnitte von Text beinhalten, wenn sonst eine sinnvolle inhaltliche Zuordnung der Textpassagen nicht möglich ist.

Die Codierung in die genannten Prozesskategorien erfolgte zu Beginn der Untersuchung durch drei unabhängige Rater. Dabei wurde überprüft, ob das Codierungsschema allgemein nachvollziehbar ist und ob ein Rater allein zuverlässig ist. Die Übereinstimmung wurde exemplarisch mit Hilfe einer Konkordanzanalyse (vgl. Bortz et al. 1990, S. 460 f.) überprüft.

Eine besondere Rolle für den Ablauf der Aufgabenlösungen spielt die Prozesskategorie Planung. Deshalb wurde diese Planungskategorie zur genaueren Untersuchung in die folgenden Unterkategorien eingeteilt:

- Orientierung
- Planung der Datenbeschaffung
- Planung der Datenverarbeitung
- Planung eines Modells
- Sonstige Planung

Des Weiteren wurden alle Textstellen der Planungskategorie parallel daraufhin untersucht, ob eine *Argumentation in der Realität*, in der *Mathematik* oder in *Realität und Mathematik* festzustellen ist. Einige Stellen konnten allerdings nicht zugeordnet werden.

Zunächst werden, die Interviews durchgeführt und codiert. Anschließend werden die Interviews auf Basis der Anzahlen von Codes vergleichen. Zusätzlich werden die Codes für Argumentationen in Mathematik und Realität verglichen. Auf Grund dieser Werte werden Interviews gesucht, die besonders auffällig sind und somit einen bestimmten Typ von Lösungsprozessen repräsentieren können.

Auswertung

Im ersten Schritt werden die Anzahlen der Codes für Planung, Datenbeschaffung, Datenverarbeitung und Kontrolle in den einzelnen Interviews verglichen.

Insbesondere interessieren bei der Untersuchung von Aufgaben mit Modellierungsanteil die Überlegungen von Schülerinnen und Schülern zu realen und mathematischen Modellen. Diese Stellen können durch die Kombination der Prozessunterkategorie *Planung des Modells* mit der Kategorie *Argumentation in der Realität* bzw. *Mathematik* gefunden werden. Die gefundenen Mathematischen Modelle sind in der Regel geometrische Figuren wie Dreieck, Viereck, Rechteck und Quadrat sowie rechter Winkel und Schrägsicht. Die realen Modelle beziehen sich in der oben genannten Beispielaufgabe auf die zu verputzende Fläche und die Fenster. Es wurden an drei Stellen auch Mischformen gefunden.

Ergebnisse

Es zeigt sich für die untersuchten Interviews, dass die Einzelanteile von Planung am jeweiligen Gesamtprozess aufgabenspezifisch sind. Dieser Planungsanteil liegt bei der oben dargestellten Aufgabe beispielsweise bei ca. 36 %. Auf diese Weise können – nach hinreichend vielen Interviewauswertungen – Aufgaben mit Hilfe des zu erwartenden Planungs- oder Datenbeschaffungsanteils etc. charakterisiert werden. So können Aufgaben für den Unterrichtseinsatz zur gezielten Übung von Datenbeschaffung, Planung oder auch Datenverarbeitung bereitgestellt werden.

Bezogen auf alle Interviews ist mit sinkendem Planungsanteil – mit einer Ausnahme – auch eine sinkende Zeit pro Code zu beobachten. Planungsphasen haben also einen großen Einfluss auf die Dauer des Interviews.

Es ist festzustellen, dass in den untersuchten Interviews die Planung zu einem großen Teil mit Argumenten aus der Realität stattfindet. In den Hauptschulinterviews wird an bestimmten Stellen weniger in der Realität argumentiert. Insbesondere die Planung eines Realmodells konnte in den Interviews mit Hauptschülerinnen und -schülern seltener festgestellt werden.

Für die Arbeit mit Modellen sind verschiedene Typen zu erkennen. Dies sind zum einen ein *häufiger Wechsel zwischen Mathematik und Realität* und zum anderen *Argumentation überwiegend in der Realität.* Ebenso war in einem Interview eine *Argumentation überwiegend in der Mathematik* feststellbar.

Besonders interessant erscheinen die Interviews mit einem akzeptablen Ergebnis und höheren Modellierungsanteilen. Solche Interviews zeichnen sich nach bisherigen Ergebnissen durch mittleres Planungsniveau, geringeren Datenverarbeitungsanteil, höheren Kontrollanteil und höhere Codezahlen als die Vergleichsinterviews aus. Zwei nicht erfolgreiche Lösungen dagegen hatten den höchsten Planungsanteil, während zwei sehr kurze Lösungen den geringsten Planungsanteil hatten. Die Mischform (aus Mathematik und Realität) in der Argumentation kommt in den Interviews mit einem akzeptablen Ergebnis und höheren Modellierungsanteilen am seltensten vor. Die Schülerinnen und Schüler haben jeweils relativ klar zwischen Argumentation in Realität und Mathematik unterschieden.

Das Argumentationsverhalten in der Mathematik war in diesen Interviews mit höheren Modellierungsanteilen und einem besseren Ergebnissen ausgeprägter als in den nicht erfolgreichen Interviews. Es scheint eine untere Grenze für den nötigen Anteil mathematischer Argumentation zu geben, um erfolgreich sein zu können.

Literatur

Bortz, J. & Lienert, G.A. & Boehnke, K. [1990]: Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik, Berlin Heidelberg: Springer.

Greefrath, G. [2004]: Offene Aufgaben mit Realitätsbezug. Eine Übersicht mit Beispielen und erste Ergebnisse aus Fallstudien. In: *mathematica didactica*, 27(2004) 2, 16–38.

Wiegand, B. & Blum, W. [1999]: Offene Probleme für den Mathematikunterricht – Kann man Schulbücher dafür nutzen? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999 Bern*, 590–593

Für die sorgfältige Erstellung der Interview-Transkripte bedanke ich mich bei Stephanie Albers, Verena Meyer, Annette Neukirch und Benjamin Falkner.

Christian GROSS und Marianne MOORMANN, Augsburg/München

Ergebnisse der ersten Erprobung der Lernsoftware LeActiveMath in der Praxis

1. Einleitung und Rahmen

Die Studien, über die im Vortrag berichtet wurde, sind Teil der so genannten "Midterm-Evaluation" im Rahmen des EU-Projekts LeActiveMath. In den ersten 1,5 Jahren dieses dreijährigen Projekts haben wir die Inhalte für eine Lernsoftware zur Differentialrechnung erstellt. Sowohl die Technologie als auch die Inhalte werden nun seit Herbst 2005 mit dem Ziel ihrer Verbesserung evaluiert.

In der Literatur (vgl. Tergan, 2002) werden im Zusammenhang mit dem Einsatz neuer Medien schon seit Ende der 80er Jahre immer wieder dieselben Probleme genannt. Zwei Gefahren für die Lernenden sind dabei für immer komplexer werdende Lernumgebungen zentral,

- der Orientierungsverlust und
- die kognitive Überlastung.

In der Konsequenz stellen sich daher Fragen nach einer intelligenten Navigation und Benutzerführung, nach einem geeigneten Maß der Anleitung und nach angemessenen Formen der Adaptivität. Diesen Problemen möchten wir uns mit unserer Forschung annähern. Die ersten Ergebnisse, die wir hier präsentieren, betreffen jedoch "nur" den Bereich der Akzeptanz.

2. Fragestellungen und Design der Erhebung

Im Einzelnen stellen sich folgende Fragen:

- Wie wird die Benutzerfreundlichkeit eingeschätzt?
- Wie werden einzelne Komponenten bewertet (Texte, Applets, Bildmaterial, etc.)?
- Wie werden die Inhalte bewertet?
- Welchen Einfluss hat die Arbeit mit dem System auf das mathematikbezogene Interesse?

In zwei 11. Klassen an bayerischen Gymnasien füllten insgesamt 46 Schülerinnen und Schüler unter anderem Fragebögen zu Motivation und Interesse aus. Dann arbeiteten sie mindestens etwa fünf Schulstunden mit der Lernsoftware und füllten erneut einen leicht abgeänderten

Fragebogen aus. Zusätzliche Online-Fragensets waren in die Software integriert, die Beantwortung allerdings optional, so dass hier die Antwortzahlen schwanken.

Der Papierfragebogen beinhaltete in seiner Prä- und Postversion z. B. Aussagen zum bevorzugten Vorgehen im Mathematikunterricht ("Im Mathematikunterricht mag ich besonders gern, wenn wir sehr viele ähnliche Übungen rechnen.", "… wenn wir am Computer arbeiten."). Auf einer vierfachen Likert-Skala gaben die Teilnehmenden Wertungen zwischen "stimmt genau" und "stimmt gar nicht" ab.

Insgesamt elf Studierende (5 Lehramtsstudierende in München und 6 Informatik-Studenten in Saarbrücken) nahmen an einer zusätzlichen Laborstudie teil. Zum Vergleich verschiedener Formen der Nutzung der Software wurden hier die Studierenden beider Standorte in zwei Gruppen eingeteilt: In einer 90-minütigen Sitzung wiederholte ein Teil der Studierenden einen Ausschnitt des Schulstoffs anhand der kompletten Materialsammlung, ein anderer Teil mit Hilfe eines generierten Kurses. Abschließend wurden alle Studierenden per Online-Fragebogen zur Bedienbarkeit des Systems, zu den Inhalten und zur Eignung ihrer Bearbeitungsart für das erstmalige Erlernen eines Themenbereichs befragt.

3. Auswertungen und Ergebnisse

Für die Beliebtheit bestimmter Vorgehensweisen im Mathematikunterricht ergaben sich auf einer Skala von 1 bis 4 in der Prä-Version Mittelwerte zwischen 1,68 ("Zeit aufs Verstehen verwenden") bis 2,7 ("historische Infos über Mathematiker, Rechenverfahren").

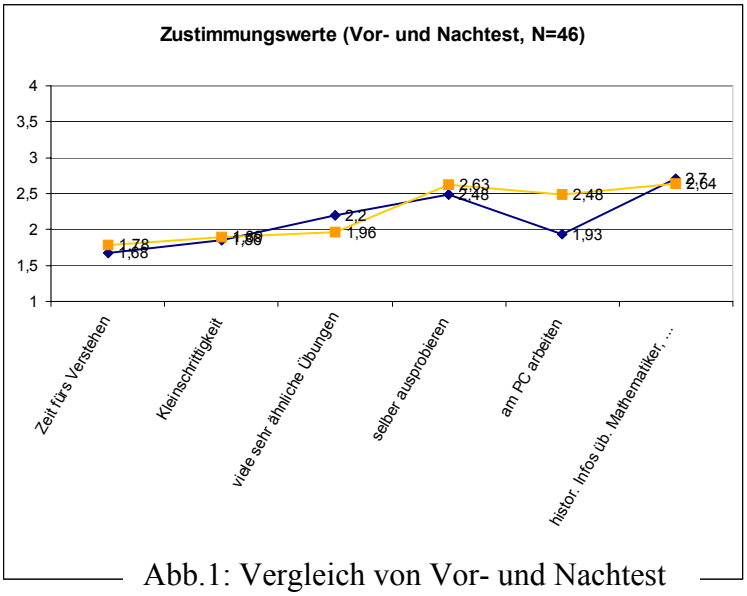


Abb.1: Vergleich von Vor- und Nachtest

In der Graphik verbindet die dunkle Linie die Mittelwerte des Prä-Fragebogens, beginnend mit dem beliebtesten Vorgehen ganz links.

Zum Vergleich sind die Daten der Post-Version eingefügt (hell).

Die Unterschiede sind – mit einer Ausnahme – zu vernachlässigen: ausgerechnet das Arbeiten am PC büßt an Beliebtheit ein (von 1,93 auf 2,48).

Die folgende Übersicht zeigt einige Resultate der Evaluation der Online-Fragen, die Wertungen wurden dabei teils zu Kategorien zusammengefügt und auf 1 normiert (1 = volle Zustimmung):

Aspekt	**Wertung**	**Anzahl**	**Standardabweichung**
Benutzerfreundlichkeit	0,5 – 0,75	31/32	0,25 – 0,3
Inhalte	0,52 – 0,73	29 - 33	0,2 – 0,3
Hilfen	0,31	32	0,31
Spaß	0,55	33	0,25
Effizienz	0,4	33	0,28

Tabelle 1: Bewertung der einzelnen Komponenten

Unter den Inhalten schnitten die Bilder am besten ab (0,73), dicht gefolgt von den Multiple-Choice-Aufgaben (0,69); die Verständlichkeit der Texte bildet das Schlusslicht (0,52). Dabei korreliert die Schülereinschätzung der Texte jeweils auf einem 1 ‰-Niveau mit ihren Einschätzungen von Benutzerfreundlichkeit, Spaß und Effizienz.

Aufgaben und Beispiele konnten auch einzeln bewertet werden, was zur gezielten Verbesserung der einzelnen Elemente genutzt wird. Insgesamt haben hier z. B. Beispiele ohne „Applets“ im Durchschnitt besser als solche mit diesen interaktiven Elementen abgeschnitten; die gleichzeitig abgegebenen Schüler-Kommentare deuten hier darauf hin, dass dies wohl auf eine kognitive Überlastung bei einzelnen Applets zurückgeführt werden kann.

Im offenen schriftlichen Feedback trat Folgendes immer wieder zutage:

- Inhalte:
  - Einschätzung als teils zu kompliziert, formal
  - Wunsch nach mehr (ähnlichen) Aufgaben und Beispielen
- Technisches:
  - Serverprobleme, lange Ladezeiten
- weitere Features:

- zu allgemeine Hinweise

- Mängel in der Lernstandsanzeige (farbwechselndes Icon vor den Titeln der Abschnitte im Inhaltsverzeichnis)

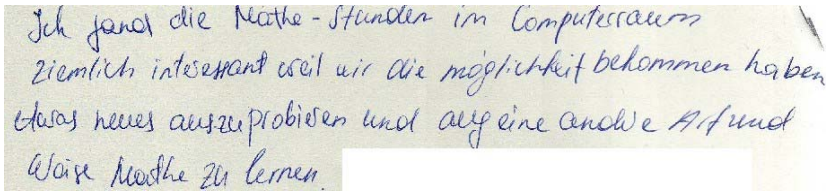


Abb.2: Beispiel Schülerfeedback

Die Untersuchung mit den Studierenden zeigte ähnliche Ergebnisse. Das gesamte System empfehlen die Studierenden vor allem zur Auffrischung oder für sehr selbstständige Lerner. “Neulerner” sollten dagegen nach ihrer Meinung Kursen durch das System folgen.

Den Studierenden aus Saarbrücken war das System bereits gut bekannt. Sie bemängelten die Darstellung von Formeln, bewerteten jedoch das System insgesamt positiver als die Münchner Studierenden.

4. Schlussfolgerungen und Ausblick

In der Gestaltung der Bedienungs- und Navigationselemente sehen wir uns durch die Resultate der Evaluation bestätigt. Probleme macht nach wie vor die technische Ausstattung in den Schulen (den Eindruck bestätigen die zahlreichen Rückmeldungen dazu). Wir vermuten, dass das abnehmende Interesse der Schülerinnen und Schüler am PC zu arbeiten sehr stark mit diesem Punkt zusammenhängt.

Großen Wert legen die Lernenden auf die Lernstandsanzeige und die Hinweise. (Letztere sind als gestufte Hinweise autoriert, von denen jedoch systembedingt bisher nur der erste von den Nutzern abgerufen werden kann.) Dies lässt sich interpretieren als ein Wunsch nach mehr Anleitung und Rückmeldung, dem wir nachkommen wollen.

Wesentlich ist weiterhin eine Optimierung der Inhalte dahingehend, dass sie besser das Interesse der Lernenden und möglichst auch ihre Lust am Ausprobieren recht verschiedener Aufgabentypen wecken. Komplizierte Formulierungen müssen zum Teil "entschärft" werden.

Weitere und detailliertere Studien sind beabsichtigt.

Literatur:

Tergan, S.-O. (2002). Hypertext und Hypermedia: Konzeption, Lernmöglichkeiten, Lernprobleme und Perspektiven. In: L. J. Issing & P. Klimsa (Hrsg.), Information und Lernen mit Multimedia und Internet, S. 99 – 112. Weinheim: Beltz

Richter, T. et al (2005). Strategische Verarbeitung beim Lernen mit Text und Hypertext. Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, Jg. 19, Heft 1,2, S. 5 - 22

Annemarie GUBLER-BECK, Dortmund

Portfolio als alternatives Beurteilungsinstrument im angelsächsischen und im deutschen Sprachraum – ein Vergleich

Portfolios werden in der Schulpraxis neben anderen Funktionen (vgl. Häcker 2002, S. 211) vor allem als *eine* Form alternativer Leistungsfeststellung und –bewertung eingesetzt. Im angelsächsischen Sprachraum findet man Hinweise zum Portfolio daher oft unter dem Stichwort „alternative assessment“. Zur Definition des Portfolios, seinen Inhalten und Funktionen siehe auch Gubler-Beck (2005).

1. Traditionelle Formen der Leistungsfeststellung und –bewertung

Portfolios kommen aus den angelsächsischen Ländern und wurden als eine Alternative zu den dort üblichen externen, standardisierten Papier-und-Bleistift-Tests entwickelt. Diese sind durch folgende Merkmale gekennzeichnet (vgl. Rowan/Thompson/Briars 1989, S. 24; Watt 2005, S. 24):
- starke Betonung von Rechenfertigkeiten,
- Wiederholung bekannter und geübter Verfahren,
- kleine Aufgabenpäckchen,
- Erwartung einer vorgegebenen besten Antwort,
- Produktorientierung,
- begrenzte Zeit.

Im deutschsprachigen Raum haben standardisierte Tests zur Leistungsfeststellung keine vergleichbare Tradition. Hier spielen klasseninterne, schriftliche Klassenarbeiten bei der Zensurenvergabe und bei Versetzungsentscheidungen die entscheidende Rolle. Die oben genannten Merkmale treffen auf traditionelle Klassenarbeiten jedoch ebenfalls zu. Trotz unterschiedlicher Traditionen liest sich die Kritik an der jeweils dominierenden Form der Leistungsbewertung erstaunlich ähnlich (vgl. Maier 1995; Selter 2000; Winter 2004, S. 30 – 36; Watt 2005, S. 23): Die Konzentration auf eine einzige Form der Leistungsüberprüfung unter besonderen und beschränkten Bedingungen benachteiligt Schüler, die ihre Leistung unter anderen Umständen besser demonstrieren könnten. Zudem erfordern verschiedene Ziele unterschiedliche Methoden der Leistungserfassung. Die starke Betonung von Rechenfertigkeiten, die Wiederholung geübter Verfahren und die Tendenz zu kleinen, gut korrigierbaren Aufgabenpäckchen verführen zum kurzfristigen Lernen arithmetischer und algebraischer Verfahren notfalls auch ohne Verständnis. Höhere kognitive Prozesse wie Anwenden oder Problemlösen werden vernachlässigt. Lernprozesse spielen durch die ausschließliche Bewertung von Lernprodukten eine untergeordnete Rolle. Dazu gehört auch, dass meist nur Defizite betrachtet, die Stärken der Schüler

jedoch nicht gewürdigt werden. Im deutschen Sprachraum schließt sich an diese Kritik häufig noch eine Kritik an der Ziffernbeurteilung von Leistungen an.

2. Neuere Formen der Leistungsfeststellung und -bewertung

Im angelsächsischen Sprachraum werden unter dem Schlagwort „alternative assessment“ alle Formen der Leistungsfeststellung und –bewertung zusammengefasst, die keine standardisierten, externen Tests sind. Dazu zählen auch schulinterne Formen der Leistungsbewertung, die bei uns wohl kaum als alternative Leistungsmessung eingeschätzt würden. Beispiele sind Klassenarbeiten, Referate, mündliche oder praktische Aufgaben sowie Lehrerbeobachtungen (vgl. Karmelita 1987, Watt 2005, S. 26). Zu den Formen, die auch im deutschsprachigen Raum als alternative Leistungsmessung angesehen werden, zählen unter anderem das Journal writing (Lerntagebuch), Coursework (Facharbeiten) oder Portfolios. Ziel der alternativen Leistungsmessung ist eine stärkere Berücksichtigung neuerer Lehr-Lern-Vorstellungen. Dies beinhaltet eine prozessorientierte Leistungsbewertung. Prozessorientiert umfasst zwei Aspekte: Zum einen die Integration der Leistungsmessung in den Unterricht und zum anderen eine stärkere Berücksichtigung der Lösungswege. Im angelsächsischen Sprachraum wird der erste Aspekt sehr viel stärker betont als im deutschsprachigen Raum. Weitere Ziele neuerer Methoden zur Leistungsfeststellung und -bewertung sind die stärkere Berücksichtigung der Lernentwicklung, der Einbezug realistischerer Kontexte, eine stärkere Fokussierung auf allgemeine Lernziele und Verständnisorientierung. Auf diese Weise sollen die Schüler auch ein realistisches Bild von Mathematik als forschender Wissenschaft erhalten.

In Deutschland gibt es zwei gegenläufige Tendenzen: Einerseits geht der Trend hin zu externen, standardisierten Leistungstests, die als Antwort auf die Subjektivität von Ziffernbeurteilungen schon in den 70er Jahren vorgeschlagen wurden (vgl. Tillmann/Vollstädt 2000, S. 32). Andererseits werden neuere Formen im obigen Sinne mit im Wesentlichen der gleichen Zielstellung erprobt. Schließlich werden in der Grundschule Berichtszeugnisse praktiziert, die auf der individuellen Bezugsnorm basieren. Im angelsächsischen Sprachraum steht dagegen bei allen Reformideen die sachliche Bezugsnorm, die durch Standards festgelegt wird, im Mittelpunkt. Als Ersatz oder Ergänzung zu Klassenarbeiten werden im deutschen Sprachraum Lernkontrakte, Lerntagebücher, Präsentationen, Facharbeiten und Portfolios diskutiert (vgl. Winter 2004), wobei die Grundideen überwiegend auf den angelsächsischen Sprachraum zurückgehen. Die didaktische Diskussion sowie die praktische Umsetzung erfolgen jedoch vor dem Hintergrund

der hiesigen Traditionen. Das hat neben Gemeinsamkeiten auch Unterschiede zur Folge, was nun am Beispiel des Portfolios aufgezeigt wird.

3. Das Portfolio als alternative Form der Leistungsfeststellung und –bewertung

Als Vorteil des Portfolios wird in der didaktischen Literatur sowohl im angelsächsischen als auch im deutschen Sprachraum hervorgehoben, dass sie durch komplexere Aufgaben die Chance eröffnen auch höhere kognitive Prozesse wie Kreativität, Mathematisieren oder Problemlösen in die Leistungsbewertung einzubeziehen. Portfolios ermöglichen darüber hinaus eine prozessorientierte und individualisierte Beurteilung der Leistungsentwicklung über eine längere Zeitspanne.

In der Praxis ist das Portfolio im Mathematikunterricht bislang im angelsächsischen Sprachraum deutlich stärker verbreitet als im deutschen, wo „nur sehr wenige Erfahrungsberichte über Portfolioarbeit [...] vorliegen“ (Häcker 2002, S. 212). Diese beziehen sich ausnahmslos auf kleinere Untersuchungen in einzelnen Klassen. Im Fach Mathematik gibt es nur einen einzigen veröffentlichten Erfahrungsbericht, der sich auf eine Unterrichtseinheit in einer zweiten Klasse bezieht (vgl. Hilf/Lack 2004). In den USA gibt es dagegen neben etlichen Erfahrungsberichten von Lehrern bzw. Lehrerausbildern aus Einzelklassen Bestrebungen das Portfolio in größerem Stil wissenschaftlich zu untersuchen. Dazu wurde in Vermont in den Schuljahren 1991/1992 und 1992/1993 in den Klassen vier und acht eine quantitative Studie in Mathematik durchgeführt. Im Gegensatz zu anderen Untersuchungen wurde das Portfolio für externe Berichte verwendet. Mit diesem Ansatz wurden zwei Ziele verfolgt: Erstens sollten Daten von hoher Messqualität über die Schülerleistung erhoben werden. Zweitens sollte der Unterricht durch den Portfolioeinsatz verbessert werden (vgl. Koretz/Stecher/Klein/McCaffrey 1994, S. 5). Das erste Ziel, das letztlich auf die Gleichstellung von Portfolios mit externen, standardisierten Tests zielt, unterscheidet das amerikanische Projekt von Bestrebungen im deutschsprachigen Raum. Hier wird zwar auf die geringe Vergleichbarkeit von Portfolios hingewiesen, eine Normierung von Portfolios wird jedoch weder als machbar noch als erstrebenswert angesehen.

Die geringere Bedeutung von Normierungen in der deutschsprachigen Literatur ist aus mehreren Gründen verständlich: Zum einen ist der Portfolioansatz hier relativ neu und daher stehen praktische Probleme im Vordergrund, messtheoretische Fragen sind sekundär. Zum anderen ist Leistungsbewertung im deutschsprachigen Raum ohnehin nicht so stark standardisiert. Während in der angelsächsischen Literatur zu Portfolios in jedem Artikel das Problem der Standardisierung diskutiert wird, konzentrieren sich

deutschsprachige Publikationen stärker auf die Verbesserung des Unterrichts und die Anpassung der Leistungsbewertung an neuere Lehr-Lern-Vorstellungen. Die Vermonter Studie hat klar gezeigt, dass hier Potenziale des Portfolios liegen: Die Lehrer verwendeten durch den Einsatz des Portfolios mehr Zeit für Problemlösen sowie Kommunikation über Mathematik und sie nutzten häufiger schüleraktive Arbeitsformen wie Partner- und Gruppenarbeit (vgl. Koretz/Stecher/Klein/McCaffrey 1994, S. 6). Das hauptsächliche Ziel hoher Datenqualität wurde dagegen vor allem aufgrund mangelnder Standardisierung nicht erreicht. Koretz, Stecher, Klein und McCaffrey (1994, S. 14) sehen die inhaltliche Standardisierung von Portfolios trotzdem kritisch: Sie führe zwar zu höherer Validität und Reliabilität, aber laufe andererseits den Bemühungen des Portfolios um Integration der Leistungsbewertung in den Unterricht, um Individualisierung und eine Vielfalt an Testaufgaben zuwider.

Literatur:

Gubler-Beck, Annemarie: Portfolios im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005

Häcker, Thomas H.: Der Portfolioansatz – die Wiederentdeckung des Lernsubjekts? Rezeption und Entwicklung im deutschen Sprachraum. In: Die Deutsche Schule. Jg. 94 (2002), H. 2, S. 204 – 216

Hilf, Sabine; Lack, Claudia: Leistungsbewertung als gemeinsamer Prozess von Kindern und LehrerInnen. In: Scherer, Petra; Bönig, Dagmar (Hrsg.): Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern. Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule e.V. 2004, S. 279 – 293

Karmelita, Will: The Assessment Tail should not be Wagging the Pedagogical Dog. In: Australian mathematics teacher. Jg. 43 (1987) H. 3, S. 25 – 26

Koretz, Daniel; Stecher, Brian; Klein, Stephen; McCaffrey, Daniel: The Vermont Portfolio Assessment Program: Findings and Implications. In: Educational measurement. Jg. 13 (1994), H. 3, S. 5 – 16

Maier, Hermann: Leistungsfeststellung und Leistungsbewertung als pädagogische Aufgabe. In: Schulmagazin 5 bis 10 2 /1995, S. 58 – 60

Rowan, Thomas; Thompson, Alba; Briars, Diane: Assessing Students' Learning to Inform Teaching: The Message in NCTM's Evaluation Standards. In: Arithmetic Teacher, Jg. 37 (1989), H. 4, S. 22 – 26

Selter, Christoph: Informative Aufgaben zur Leistungsfeststellung. In: Die Grundschulzeitschrift 135,136/2000, S. 26 – 29

Tillmann, Klaus-Jürgen; Vollstädt, Witlof: Funktionen der Leistungsbewertung. Eine Bestandsaufnahme. In: Beutel, Silvia-Iris; Vollstädt, Witlof: Leistung ermitteln und bewerten: Hamburg. Bergmann und Helbig 2000, S. 27 – 37

Watt, Helen: Attitudes to the use of alternative assessment methods in mathematics: a study with secondary mathematics teachers in Sydney, Australia. In: Educational Studies in Mathematics. Jg. 58 (2005), S. 21 – 44

Winter, Felix: Leistungsbewertung. Eine neue Lernkultur braucht einen anderen Umgang mit den Schülerleistungen. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren GmbH 2004

Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

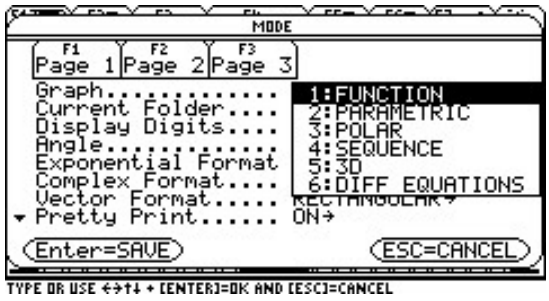
Polarkoordinaten besser verstehen

durch bewegliche und gleichzeitige Darstellung der zugehörigen „kartesischen Funktion“.

Bei mathematischen Objekten, die in Polarkoordinaten dargestellt werden, ist es mitunter gar nicht so leicht zu sehen, wie sie bei wachsendem Winkel durchlaufen werden. Stellt man nun aber in derselben Zeichnung geometrisch gekoppelt zu $P=(\varphi,r(\varphi))_{polar}$ auch $P'=(\varphi,r(\varphi))_{kartesisch}$ dar, so entstehen zwei Ortskurven gleichzeitig, die eineindeutig aufeinander bezogen sind. So kann mit jeder vertrauten kartesischen Funktion eine entsprechende „Polarfunktion“ erkundet werden. Besonders eignen sich dafür DMS wie GeoGebra und CAS wie MuPAD 3. Von den heutigen Werkzeugen werden „Polarkoordinaten“ angeboten und der Mathematikunterricht kann damit auf jedem Niveau von der 8. Klasse bis zum 8. Semester kreatives Mathematiklernen fördern.

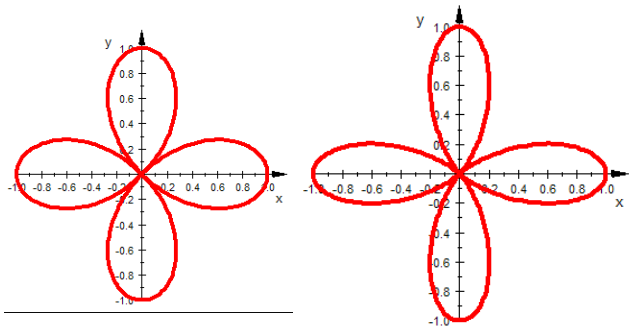
Warum sollte man Polarkoordinaten behandeln?

- Weil sie wunderbare Mathematik ermöglichen
- Weil sie ein Stück Welt erschließen
- Weil Lernende selbst auf Erkundung gehen können
- Weil G. Steinberg [St] schon vor Jahren 1000 Gründe genannt hat
- Weil die Computerwerkzeuge die Option anbieten und die Lehre ja wohl nicht ernsthaft flüchten kann vor dieser Wirklichkeit.



Polar-kartesisch-Koppelung

Diese beiden Rosetten werden auf veschiedene Art durchlaufen, was man dem fertigen Bild überhaupt nicht ansehen kann. Erzeugt man sie mit einem Graphenzeichner, der mit wachsendem Polarwinkel den Graphen

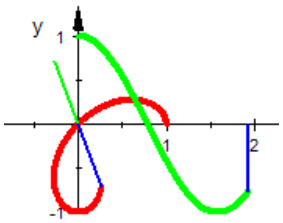


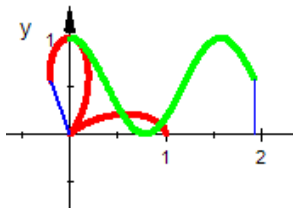
sukzessive aufbaut, so kann man den Durchlauf sehen. Verstehen kann man ihn aber erst, wenn man über die definierenden Funktionen nachdenkt.

Es sind dies hier

$r(\varphi) = \cos(2\varphi)$ (links)

und $r(\varphi) = \cos(2\varphi)^2$ (rechts).





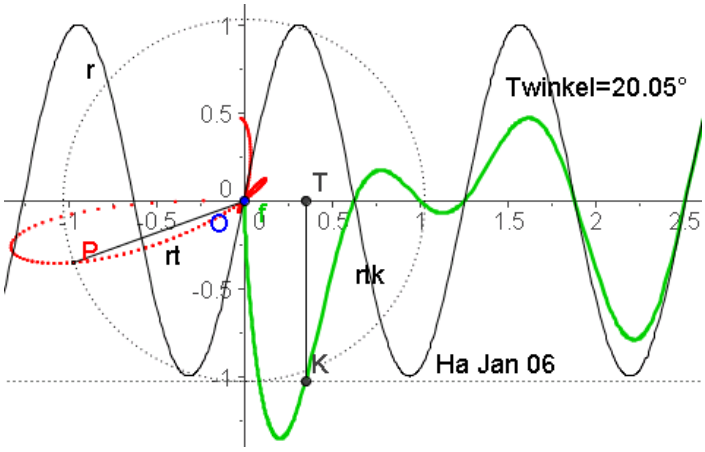
Gezeichnet sind die Funktionen sowohl polar als auch kartesisch $r(\varphi)$ über φ. Dementsprechend ist der Polarradius sowohl vom Ursprung aus als auch als Ordinate eingezeichnet. Beim linken Bild ist zusätzlich der Betrag von $r(\varphi)$ zu sehen. Bei negativem $r(\varphi)$ ist der gezeichnete Polarwinkel nämlich $\varphi + \pi$. Es gibt Schulbücher, die keine negativen Polarradien zulassen. Dann dürfte es diese Rosetten nicht geben.

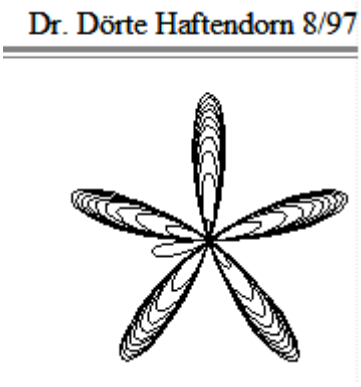
Die gezeigten Bilder lassen sich in diesem Aufsatz nicht animiert darstellen. Alle interaktiven Dateien, animierte Graphen und der Vortrag sind auf [Ha Website] zugänglich. Im Vortrag wurde eine interaktive Möglichkeit mit GeoGebra www.geogebra.at vorgestellt, bei der der Polarradius und die zugeordnete Ordinate auch geometrisch aufeinander bezogen sind und die Rosette und ihre kartesische Darstellung gleichzeitig erkundet werden können. Es ist eine der Stärken von GeoGebra, dass nachträglich noch für $r(\varphi)$ andere Terme eingesetzt werden können. Damit kann der einmal verstandene Zusammenhang in eigener Regie der Lernenden an beliebigen Funktionen ausprobiert werden. Durch diese doppelte Sicht wird das Funktionsverständnis auf ganz neue Weise vertieft. Es ist eine bedauerliche Einschränkung, dass der Funktionsbegriff als eindeutige Zuordnung eines Argumentes zu einem Funktionswert stets nur kartesisch gesehen wird.

Obige Bilder sind als animierte Graphen mit MuPAD 3 www.mupad.de erzeugt. Das ist ein deutsches CAS, das sich in der neuen Version in ganz besonderer Weise den Bedürfnissen der Lehre in Schule und Hochschule verschrieben hat. In diesem Zusammenhang ist es wichtig, dass Graphikelemente verschiedener Definitionstypen miteinander kombiniert werden können. Das ist mit kleineren Werkzeugen (Derive, TI-voyage, Casio-ClassPad u.a.) i.d.R. nicht möglich, da man sie auf „Polarkoordinaten“ umstellen muss. Allenfalls könnte man sich geschickt mit den passenden Parameterdarstellungen helfen: $x = x(t) = r(t) \cdot \cos(t)$

$y = y(t) = r(t) \cdot \sin(t)$ für die Polarkurve und $x = x(t) = t$ und $y = r(t)$ für die zugeordnete kartesische Funktion. Hilfreich sind auch schon nebeneinander gestellte Graphen von Polarkurve und kartesischer Funktion, die dann an den interessanten Punkten aufeinander bezogen werden können. In dieser Art hat die Autorin schon 30 Jahre lang gute Erfahrungen gemacht.

Besondere Funktionen $r(t) = \ln(t)\,\sin(5t)$





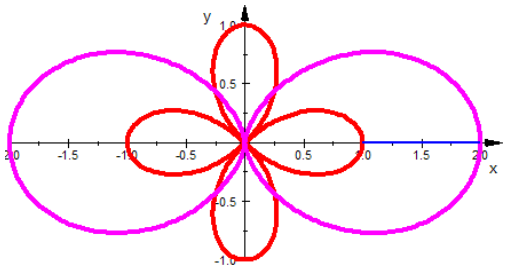
Diese Propeller-Aufgabe hat die Autorin vor vielen Jahren in dem von Steinberg und Ebenhöh herausgegebenen Buch [StE] veröffentlicht. Inzwischen sind interaktive Möglichkeiten der Erforschung gegeben. Der Sinus-Term erzeugt auf klare Weise für größere Polarwinkel die fünf Propeller-Blätter. Woher kommt aber das kleine zusätzliche Blatt? Genaueres Hinsehen auf die polar-kartesische Darstellung zeigt, dass der Logarithmusanteil sogar für drei winzige Blättchen sorgt. Für t gegen 0 ist eine Grenzwertbetrachtung, z.B. mit der l'Hospital-Regel, notwendig.

Diese Aufgaben erlauben ersichtlich einen reichhaltigen Analysisunterricht. Dazu trägt auch die Erkenntnis bei, dass die Nullstellen der kartesischen Darstellung die Tangenten-Steigungswinkel der Polarkurven bei ihren Durchgängen durch den Ursprung angeben. Obiges Bild zeigt, dass es eine einzige Tangente gibt (nämlich die mit m=tan(1)), deren Steigungswinkel kein Vielfaches von $\pi/5$ ist. Es sind hier Fragestellungen für Klausuren mit und ohne Werkzeugeinsatz von der Schule bis zum Staatsexamen möglich.

Besondere Kurven: Konchoiden

Die bekanntesten Konchoiden sind die Hundekurve oder Konchoide des Nikomedes und die Pascalschen Schnecken. Konchoiden erlauben schulgemäße handelnde Zugänge [Ha Kurven]. Ihre Entstehung kann in

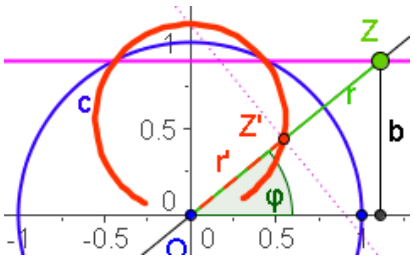
folgendes Bild gefasst werden: „Herrchen“ wandert auf einer „Straße“ und sein „Hund“ strebt an einer Leine der Länge k einem „Baum“ zu, den man im Ursprung platziert. Ist $r = r(\varphi)$ die Polargleichung der Straße, dann ist $r = r(\varphi) \pm k$ die Polargleichung der zugehörigen Konchoidenschar. Bei der polar-kartesischen Koppelung ist die kartesische Funktion ganz einfach nur senkrecht zu verschieben. Daher können Lernende zu allen Polargleichungen Konchoiden untersuchen. Zum Beispiel ist eine Konchoide der Rosette die Doppel-Ei-Linie.



Besonderer Zusammenhang: Inversion am Einheitskreis

$$y = f(x) \quad r = r(\varphi)$$

$$y = \frac{1}{f(x)} \quad r = \frac{1}{r(\varphi)}$$

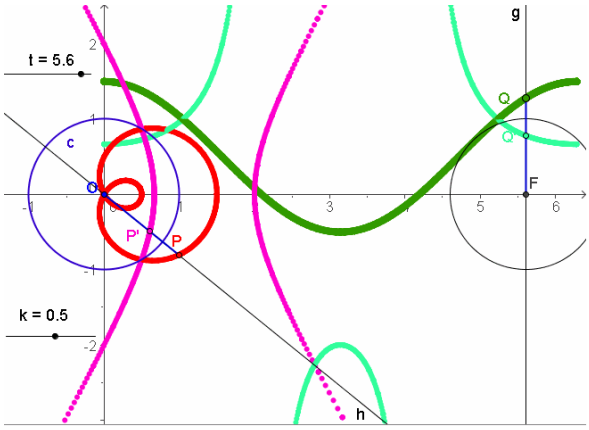


$$r = \frac{b}{\sin(\varphi)}$$

$$r = \frac{1}{b}\sin(\varphi)$$

Die algebraisch inverse Funktion lässt sich durch geometrische Inversion am Einkeitskreis gewinnen. Dieser Zusammenhang öffnet ein ganzes Feld lohnender Untersuchungen.

Eine Pascalsche Schnecke mit Schlaufe hat also als kartesisch zugeordnete Funktion einen um weniger als 1 hochgeschobenen Kosinus. Dessen algebraisch Inverses hat Pole und ist die kartesisch gekoppelte Funktion zu einer Hyperbel. Diese wiederum ist das geometrisch Inverse zur Pascalschen Schnecke. Das Inverse der Kardioide ist die Parabel und die Pascalschen Schnecken ohne Schlaufe oder Spitze haben Ellipsen als Inverse.



Fazit: Es zeigt sich, dass man mit Polarkoordinaten –insbesondere bei polar-kartesischer-Koppelung– in besonders schöner Weise mathematische Zusammenhänge erkunden kann.

Literatur: [St] Günter Steinberg, Polarkoordinaten, Metzler 1993, [StE] Steinberg und Ebenhöh (Hrsg) Ausgewählte Aufgaben zur Analysis, Schroedel 1998,
[Ha Website] http://haftendorn.uni-lueneburg.de, [Ha Kurven] dto., Bereich Kurven

Heike Hahn / Regina Möller, Universität Erfurt

Schriftliches Rechnen – ein mathematikdidaktisches Thema mit methodischer Öffnung?

1. Begründungszusammenhang des Themas

Die schriftlichen Rechenverfahren sind ein traditionelles Thema der Grundschulmathematik, dessen Behandlung im Unterricht der Klassen 3 und 4 für uns außer Frage steht. Wenn wir uns diesem Inhalt unter dem besonderen Fokus einer methodischen Öffnung nähern, ist es einführend wichtig zu klären, was wir unter methodischer Öffnung verstehen. Nach unserer Auffassung betrachten wir die schriftlichen Rechenverfahren – im Beitrag speziell das schriftliche Subtrahieren – als einen Inhalt, der durchaus Potenzen in sich birgt, eine fachlich begründete Öffnung seiner Behandlung im Unterricht zu betonen. In diesem Zusammengang weisen wir gleichzeitig darauf hin, dass wir mit unseren Ausführungen kein Plädoyer für ein bestimmtes Subtraktionsverfahren halten wollen, denn für jedes können wir Vor- und Nachteile finden, die dafür oder eben dagegen sprechen, ein bestimmtes Verfahren gegenüber anderen den Vorzug zu geben (u.a. Padberg 2002, S. 167 ff.[1]).

Grundthese unseres Beitrages ist, Lehrerinnen und Lehrer im Erarbeitungs- bzw. Vermittlungsprozess der schriftlichen Subtraktion für eine Stimmigkeit zwischen Sachsituation – Tun (als handelnder Zugang) – Erklären (als begleitende Sprechweise zur Handlung und zur Rechnung) – Aufschreiben (als Protokollierung des handelnden Zuganges zum Rechenweg) zu sensibilisieren. Die Passung zwischen diesen Repräsentations- und Tätigkeitsformen ist nach unserer Auffassung für eine verständnisbasierte Erarbeitung der Verfahren notwendig. Wenn wir eine Stimmigkeit zwischen der Sachsituation, dem methodischen Tun, der entsprechenden Erklärung und dem Aufschreiben fordern, dann verbinden wir damit die Hoffnung, dass sich Lehrerinnen und Lehrer mit einem stärkeren Bewusstsein bzgl. dieser Tätigkeits- oder Repräsentationsformen für ein bestimmtes Vorgehen im Unterricht entscheiden. Um die Forderung vieler Lehrpläne und Rahmenrichtlinien sowie der Bildungsstandards der KMK umzusetzen, die schriftlichen Verfahren ***verständnisbasiert*** einzuführen, bekräftigen wir die Bedingung, dass die Erarbeitung des schriftlichen Verfahrens der Subtraktion auf einem inhaltlichen Verständnis der einzelnen Arbeitsschritte des Algorithmus beruhen muss. Dabei gehen wir von der Annahme aus, dass ein inhaltliches Verstehen dann Erfolg versprechender aufzubauen ist, wenn es zwischen

[1] Padberg, F. (2002): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Spektrum, S. 167 ff.

den o.g. Repräsentations- und Tätigkeitsformen sowie ihrer sprachlichen Begleitung eine Übereinstimmung gibt, d.h. wenn beispielsweise das Verfahren durch die Materialhandlungen abgebildet wird bzw. aus ihnen hergeleitet werden kann. In der Umkehrung könnte man auch sagen, dass bei Unstimmigkeiten zwischen den Repräsentations- und Tätigkeitsebenen im Zusammenhang mit ihrer sprachlichen Erläuterung der Aufbau eines Verständnisses des schriftlichen Verfahrens der Subtraktion auf das Umgehen mit Ziffern reduziert und somit in seiner Gesamtheit eingeschränkt oder behindert wird. Das heißt jedoch nicht, dass die Kinder nicht subtrahieren können. Viele können es sehr wohl, aber sie sind beispielsweise nicht in der Lage zu erklären, wo bei einer Aufgabe wie 536 – 349 an der Einerstelle die 16 „herkommt", bis zu der sie rechnen müssen.

Es ist Aufgabe der Lehrerinnen und Lehrer, mit den Kindern die schriftliche Subtraktion zu erarbeiten. Ob dafür ein Verfahren herangezogen wird und wenn, dann welches oder ob für verschiedene Kinder verschiedene Subtraktionsverfahren benutzt werden, um sie ihnen verständlich zu erklären, diese Entscheidungen liegen im Verantwortungsbereich jeder Lehrerin bzw. jedes Lehrers (Siemens, B. u.a. 1998, S. 20 – 21[2]).

Wir verfolgen das Anliegen, aus didaktischer Sicht auf bestimmte Phasen im Erarbeitungs- bzw. Vermittlungsprozess aufmerksam zu machen, die wir für die Gestaltung des Lernprozesses unter Berücksichtigung oben angeführten Grundthesen für fundamental notwendig halten.

Die einführend kurz skizzierten Annahmen haben sich für uns im Ergebnis der Auswertung einer Studie zur schriftlichen Subtraktion verstärkt, aus der wir kurz dessen methodisches Herangehen sowie ausgewählte Ergebnisse referieren wollen.

2. Kurzbeschreibung zum Design der Studie

Für die Untersuchung kombinierten wir zwei unterschiedliche Zugänge: Als eine Herangehensweise wählten wir das leitfadengestützte Interview, dessen Ziel es war, durch die Gespräche mit Lehrkräften einen Einblick in Erklärungen für bestimmte unterrichtliche Vorgehensweisen im Zuge der Erarbeitung der schriftlichen Subtraktion zu gewinnen. Als zweites Verfahren wurden Unterrichtsmitschauen in den ersten aufeinander folgenden Stunden im Prozess der Erarbeitung des schriftlichen Rechenverfahrens gewählt, die protokolliert wurden.

[2] Siemens, B./ Bluhmt, A./ v. Knebel, T. (1998): Erste Erfahrungen mit dem Abziehverfahren.- In: Grundschulzeitschrift, 12. Jg., Heft 119, S. 20 – 21

Für die Interviews mit den Lehrkräften wurden 15 Grundschulen des Landes Thüringen per Zufall ausgewählt. In der Zeit von Mitte Januar bis Ende Februar 2005 wurden Gespräche mit den Lehrerinnen und Lehrern 3. Klassen geführt. Der Eindruck aus den Gesprächen mit Thüringer Lehrkräften wurde durch Interviews mit 4 Lehrenden aus Rheinland-Pfalz ergänzt.

Um zu erfassen, wie die Lehrerinnen und Lehrer das schriftliche Verfahren der Subtraktion im Unterricht erarbeiten, wurde in den ersten Unterrichtsstunden zur Behandlung dieses Verfahrens hospitiert. Insgesamt konnten in die Auswertung 43 Unterrichtsprotokolle von 15 verschiedenen Lehrkräften einbezogen werden.

3. Ausgewählte Ergebnisse der Untersuchung zur Behandlung des schriftlichen Verfahrens der Subtraktion

Um der eingangs formulierten These nachzugehen, konzentrierten wir uns in der Auswertung auf einen Vergleich zwischen der im Unterricht benutzten Sachsituation, der Veranschaulichung, der angewandten Übertragstechnik und der erklärenden Sprechweise. Diese Analyse ergab sowohl im Ergebnis der ausgewerteten Interviews als auch der protokollierten Unterrichtsstunden folgende Gruppierungen, die wir jeweils beispielhaft illustrieren:

a) *Übertragstechnik und erläuternde Sprechweise* ***passen zusammen***
Zwei der interviewten Lehrerinnen konnten das Ergänzungsverfahren mit Erweitern vollständig und angemessen erklären. Durch die Schilderung ihres Vorgehens in der Einführungsstunde sowie der eigenen Sprechweise zur Erklärung des Rechenverfahrens im Interview wurde deutlich, dass sie die Übertragstechnik des Erweiterns bzgl. ihrer grundlegenden Einsicht darstellen konnten. Sie wiesen jeweils auf das Gesetz von der Konstanz der Differenz hin und stellten heraus, dass diese anspruchsvolle abstrakte mathematische Grundlage für Schüler einsichtig und klar sein muss, um die Übertragstechnik verstehen zu können. Außerdem wiesen diese Lehrkräfte darauf hin, in ihrem Unterricht Einsichten in das Stellenwertprinzip zu vermitteln, um die Gleichwertigkeit von zehn Einern mit einem Zehner herauszustellen.

b) *Übertragstechnik und erläuternde Sprechweise* ***passen nicht zusammen***
Bei der Erklärung des Übertrages wurde deutlich, dass einige Lehrkräfte verschiedene Techniken vermischen: Anfangs nutzen sie das Verfahren des Entbündelns, um aus der gegebenen Ziffer des Minuenden durch Hinzufügen von Zehn an der jeweiligen Stelle eine Zahl zu machen, die eine lösbare Ergänzungsaufgabe ergibt. Dieses Hinzufügen der zehn Einer, Zehner oder auch Hunderter – je nach der Stelle des Übertrages – wird auch mit

dem Vokabular des Entbündelns oder Verwandelns umschrieben (z.B. „wir borgen uns einen Zehner“, „wir mopsen einen Zehner von hier“, „wir nehmen uns 10 von hier vorn“). Die Ergänzungsaufgabe wird gelöst und der fehlende Betrag als Differenz unter die Rechnung an der entsprechenden Stelle notiert. Im zweiten Rechenschritt wird der Übertrag beim Subtrahenden an der links davor befindlichen Stelle mit einer sogenannten „Merkeins“ notiert. In diesem Schritt wenden die Lehrerinnen und Lehrer für ihre Erläuterung die Übertragstechnik des Erweiterns an. Sie erklären den Kindern, dass „Geborgtes auch wieder zurückgegeben werden muss“, ohne zu begründen, warum das im Minuenden „geborgte“ an die nächste Stelle des Subtrahenden zurückgegeben wird.

c) ***Keine Erklärung*** *des Verfahrens*
Eine Lehrerin machte durch ihre Schilderung des Vorgehens bei der Einführung der schriftlichen Subtraktion deutlich, dass sie das Verfahren durch die Darstellung des Algorithmus – vermittelt durch eine klare und präzise Sprechweise – erarbeitet, ohne inhaltlich zu erläutern, wieso beispielsweise bei einer Teilrechnung aus dem Minuenden bei der Ziffer 5 nun in der Ergänzungsaufgabe eine 15 wird. Eine Begründung dafür, warum sich die eigentliche Ziffer einer Teilrechnungen bei einem Übertrag ändert, gab sie nicht ab.

Über diese Abweichungen zwischen Übertragsverfahren und erklärender Sprechweise hinaus zeigten sich weitere Gesichtspunkte, in denen das eigentliche Verfahren und seine begründende Herleitung unter Verwendung von Material im Unterricht einander nicht entsprachen.

4. Schlussfolgerungen und Ausblick

Die Forderung nach fachmethodischer Offenheit bei der Behandlung der schriftlichen Rechenverfahren liegt für uns in der verständnisbasierten Vermittlung dieser Verfahren begründet, bei der das Verstehen der Rechenschritte das Primat vor einer Beherrschung des Algorithmus hat. Zur praktischen Umsetzung dieser Forderung gehört nach unserer Auffassung nicht nur, dass Sachsituation, Veranschaulichung, Übertragstechnik und erläuternde Sprechweise zueinander passen, sondern dass auch ein flexibler Wechsel zwischen ihnen möglich ist, um Verständnisschwierigkeiten bei Kindern vorzubeugen bzw. sie zu mindern oder abzubauen. Professionelles unterrichtliches Handeln ist demnach bei diesem Inhalt dadurch charakterisiert, dass zum Einen eine Adäquatheit zwischen den Repräsentations- und Tätigkeitsebenen vorhanden und zum Anderen ein sicheres Pendeln zwischen Rechenverfahren und Übertragstechnik im Prozess der schülerindividuellen Verständnissicherung möglich ist.

Kirsten HECKMANN, Universität Bielefeld

Zehntel, Hundertstel und andere Unbekannte – zum Stellenwertverständnis von Sechstklässlern

Nach einer intensiven Behandlung der gemeinen Brüche in der Klasse 6 werden die Dezimalbrüche am Ende des Schuljahres in der Regel recht kurz thematisiert. Dies ist wohl unter anderem durch die Annahme bedingt, Dezimalbrüche seien aufgrund ihrer Nähe zu den natürlichen Zahlen leicht verständlich. Meine empirische Untersuchung zeigt jedoch, dass die Fortsetzung des Stellenwertprinzips über das Komma hinweg für die Schülerinnen und Schüler alles andere als selbstverständlich ist. Anstelle des Prinzips der fortgesetzten Division durch 10 stehen für sie andere (hauptsächlich sprachliche) Aspekte im Vordergrund, die fehlerhafte Übertragungen zur Folge haben.

1 Die Untersuchung

Um Aufschluss über das Dezimalbruchverständnis von Schülern und seine Entwicklung zu bekommen, wurden ca. 160 Realschüler aus sechs Klassen im Laufe des sechsten Schuljahres zu drei Zeitpunkten getestet. Zum ersten Mal (T1) wurden die Schüler am Anfang des Schuljahres, und somit vor Beginn der gesamten Bruchrechnung, getestet; der zweite Testzeitpunkt (T2) gegen Mitte des Schuljahres fiel in die Zeit der Behandlung der gemeinen Brüche. Während zu diesen beiden Testzeitpunkten die Vorkenntnisse zu Dezimalbrüchen erhoben wurden, wurde schließlich zum Testzeitpunkt (T3) am Ende des Schuljahres der Unterrichtserfolg gemessen, da die Dezimalbruchrechnung mittlerweile in allen Klassen (fast) abgeschlossen war.

Die Untersuchung bestand aus zwei Versionen eines schriftlichen Tests zu verschiedenen Bereichen der Dezimalbruchrechnung, die jeweils von etwa der Hälfte der Stichprobe bearbeitet wurden. Für eine bessere Einsicht in die zu Grunde liegenden Lösungsstrategien und Denkweisen wurden zusätzlich Einzelinterviews mit ausgewählten Schülern durchgeführt.

Im Folgenden werden einige Ergebnisse speziell aus dem Bereich des Stellenwertverständnisses vorgestellt.

2 Allgemeine Untersuchungsergebnisse

Bei einer Testaufgabe zur Kenntnis der Stellenwertanordnung (S1a) sollten die Zehntel in der Zahl 7,654 angekreuzt werden. Die extrem geringen Lösungsquoten von 10 % *vor* der Dezimalbruchrechnung sowie der sehr hohe Anteil an Auslassungen („-/-“) von 38 % bzw. 21 % (vgl. Tab. 1) sind

zwar zu dieser Zeit noch nicht Besorgnis erregend, lassen aber erkennen, dass die meisten Schüler zu einer Erweiterung des Stellenwertprinzips von selbst offenbar nicht in der Lage sind. Erschreckend ist hingegen die geringe Quote richtiger Lösungen von nur 53 % *nach* der Dezimalbruchrechnung (T3). Nahezu identische Fehler- bzw. Lösungsquoten lassen sich auch im Aufgabenteil b) beim Identifizieren der Hundertstel in derselben Zahl (7,654) verzeichnen. Ein vergleichbares Bild zeigt sich darüber hinaus in einer weiteren Testaufgabe (S2), bei der die Schüler umgekehrt 5 Hundertstel als „Kommazahl" schreiben sollen (vgl. Tab. 2). Zusammenfassend legen diese Ergebnisse die Vermutung nahe, dass das Verständnis für die Stellenwerte im Unterricht als selbstverständlich vorausgesetzt und daher im Unterricht vernachlässigt wird. Den Antworten zufolge scheinen jedoch viele Schüler andere (fehlerhafte) Vorstellungen von den Stellenwerten nach dem Komma zu besitzen, die im Folgenden näher betrachtet werden.

S1a	**6**	**5**	**5 und 4**	**Sonst.**	**-/-**
T1 (N = 81)	10 %	31 %	5 %	16 %	38 %
T2 (N = 80)	10 %	58 %	3 %	9 %	21 %
T3 (N = 78)	53 %	36 %	1 %	4 %	6 %

Tab. 1: Schülerantworten zur Identifikation der Zehntel in 7,654

S2	**0,05**	**0,500**	**5,00**	**5,100**	**0,005**	**Sonst.**	**-/-**
T1 (N = 84)	11 %	20 %	21 %	1 %	2 %	13 %	31 %
T2 (N = 80)	15 %	10 %	15 %	31 %	3 %	9 %	18 %
T3 (N = 83)	53 %	11 %	13 %	10 %	4 %	0 %	10 %

Tab. 2: Schülerantworten zum Schreiben von 5 Hundertsteln als „Kommazahl"

3 Fehlerhafte Vorstellungen von den Stellenwerten

Sowohl dem schriftlichen Test als auch den Interviews zufolge scheint eine Vorstellung dominant vorzuherrschen, bei der die Schüler – offenbar bedingt durch die sprachliche Verwandtschaft der Stellenwertbezeichnungen – von einer Entsprechung zwischen Zehnern und Zehnteln bzw. Hundertern und Hundertsteln ausgehen und demgemäß Eigenschaften der bekannten Stellenwerte fehlerhaft übertragen. Klar erkennbar ist dies z. B. bei Alicia (T3), die bei Aufgabe S1 die Zahl hinter dem Komma (654) als natürliche Zahl auffasst und die Stellenwerte einfach umbenennt: „Zehner, also Zehntel" … „Hundert, Hundertstel". Diese Vorstellung erklärt vermutlich einen großen Anteil der zugehörigen Antwort „5". Die gleiche Ursache liegt wohl auch der Antwort „5 und 4" zu Grunde mit dem Unterschied, dass die betreffenden Schüler hier offensichtlich die gesamte Zahl ab den Zehnern im Blick haben.

Bei Aufgabe S2 liefert die beschriebene Fehlvorstellung eine wichtige Erklärung für die ersten beiden Fehlerkategorien (Tab. 2). So überträgt z. B. Sebastian (T1) speziell die Eigenschaft der Stellenanzahl auf die neuen Stellenwerte: „Und da fünf Hunderts… also Hundertstel sind ja also drei Stellen und dann fünf davon sind fünfhundert…“ Während Sebastian – vermutlich um die Hunderter in Hundertstel zu verwandeln – eine Null und ein Komma hiervor setzt („0,500“), trennen andere Schüler wohl mit der gleichen Intention die erste Stelle durch ein Komma ab („5,00“). Interessant ist, dass in beiden Fällen einige Schüler die Zahlen in der Kenntnis entsprechender Regeln weiter kürzen, ohne die Widersprüchlichkeit zu der angewendeten Strategie zu erkennen. In den Interviews stellt sich allerdings noch eine weitere Fehlvorstellung heraus, die speziell zu der zweiten Antwort („5,00“) führt, und die darin besteht, dass Schüler von einer festen Stellenwertanordnung ausgehen, bei der Hundertstel vor dem Komma stehen und nach dem Komma von Zehnteln und Einern (bzw. „Einteln“) gefolgt werden. Ein weiteres Interview liefert einen Hinweis darauf, dass es sich hierbei anscheinend um eine fehlerhafte Übergeneralisierung aus bekannten Größenbereichen handelt, denn 3,25 m, aufgefasst als 325 cm, besteht aus 3 Hunderter-Zentimetern („Hundertstel“), 2 Zehner-Zentimetern („Zehntel“) und 5 Einer-Zentimetern. Eine Generalisierung aus anderen Größenbereichen könnte entsprechend die feste Stellenwertanordnung t,hze erklären, die ebenfalls vereinzelt zu beobachten ist. Des Weiteren ist bei Aufgabe S2 eine weitere Fehlerstrategie zu beobachten, die als Gleichsetzung von Komma und Bruchstrich beschrieben werden kann, und erwartungsgemäß zur Zeit der Behandlung der gemeinen Brüche (T2) verstärkt auftritt.

Diverse weitere Fehlvorstellungen, wie sie sich insbesondere vor der Dezimalbruchrechnung häufiger beobachten lassen, spielen in dieser Studie jede für sich nur eine untergeordnete Rolle. Dies gilt u. a. auch für die bekannte Vorstellung, bei der die betreffenden Schüler in Annahme einer Symmetrie durch das Komma die erste Nachkommastelle als „Eintel“ auffassen. Während dies bei Aufgabe S1a nicht von der erstgenannten Fehlvorstellung unterscheidbar ist, weisen die geringen Quoten der zugehörigen Antwort „0,005“ bei Aufgabe S2 (Tab. 2) auf eine vergleichsweise geringe Relevanz dieser Fehlvorstellung hin. In Summe verdeutlichen die verschiedenen Strategien jedoch noch einmal, dass viele Schüler andere Aspekte fokussieren als die fortgesetzte Division durch 10.

4 Konsequenzen für den Unterricht

Das Stellenwertverständnis bildet die Grundlage für einen verständnisbasierten Umgang mit Dezimalbrüchen, da z. B. nur derjenige den Additions-

algorithmus verstehen kann, der auch die Stellenwertanordnung und das Bündelungsprinzip verstanden hat. Den obigen Ergebnissen zufolge besteht hier großer Handlungsbedarf im Unterricht, wobei ein zentrales Ziel in der Entwicklung einer inhaltlichen Vorstellung von den Stellenwerten bestehen sollte, da sich hiermit die Fehlerhaftigkeit der beschriebenen Vorstellungen und Strategien gut verdeutlichen lässt. In diesem Zusammenhang sollte mit den Schülern konkret erarbeitet werden,

- dass die Reihe der Stellenwerte eine feste Ordnung hat,
- dass es keine „Eintel“ gibt,
- dass Hunderter größer sind als Zehner, Hundertstel aber kleiner als Zehntel, …

Eine sinnvolle Hilfe zur Ausbildung inhaltlicher Vorstellungen ist der Einsatz von Zehnerblöcken (Mehrsystemblöcken), die hierzulande vorwiegend zur Veranschaulichung natürlicher Zahlen genutzt werden. Einer amerikanischen Experimentalstudie von Wearne & Hiebert (1988) zufolge kann dieses Material auch in der Dezimalbruchrechnung erfolgreich eingesetzt werden, indem die großen Würfel nicht mehr als Repräsentanten für Tausender, sondern (meist) für Einer fungieren. Durch vielfältige Übungen mit diesem Material lassen sich neben dem Aufbau von Dezimalbrüchen auch die Zusammenhänge zwischen den Stellenwerten und Regeln für den Umgang mit Dezimalbrüchen (z. B. Erweitern und Kürzen) auf anschaulicher Ebene gut verdeutlichen. In einer neueren australischen Studie erweist sich ein ähnliches Material (Lineare Arithmetik-Blöcke, vgl. Abb. 1; aus Archer & Condon 1999, S. 50) sogar als noch geeigneter, da es gegenüber den Zehnerblöcken einige Vorteile besitzt (vgl. hierzu Stacey et al. 2001).

Abb. 1: Lineare Arithmetik-Blöcke

5 Literatur

Archer, S. & Condon, C. (1999): Decimals: adressing students’ misconceptions. In: Scott, N. et al. (Hrsg.): Mathematics: across the ages. Brunswick (Australia): Mathematical Association of Victoria, S. 46–54.

Padberg, F.: Didaktik der Bruchrechnung. 3. Auflage. Heidelberg, Berlin: Spektrum 2002

Stacey, K. et al. (2001): The effect of epistemic fidelity and accessibility on teaching with physical materials: a comparison of two models for teaching decimal numeration. In: Educational Studies in Mathematics, Nr. 2, S. 199–221.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988): A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: testing a local theory using decimal numbers. In: Journal for Research in Mathematics Education, Nr. 5, S. 371–384.

Sandra HECKMANN, Vechta

Fächerverbindendes Arbeiten im Montessori-Mathematikunterricht

Einführung

Eine diachrone Betrachtung der Schriften Maria Montessoris öffnet den Blick für die Entwicklung ihres pädaogischen Konzeptes, den Mathematikunterricht betreffend. Besonders offensichtlich zeigt sich diese Entwicklung an Hand der Betrachtung der bekannten Montessori-Materialien, die im Laufe der Zeit eine quantitative und qualitative Erweiterung erfahren haben. Dies ist vor allem wohl das Verdienst Mario Montessoris, ihres Sohnes und Vertrauten, dessen Fähigkeit, komplexe mathematische – insbesondere algebraische – Zusammenhänge zu materialisieren sogar erfahrene Pädagogen in Staunen versetzte.

Doch Montessori-Mathematik geht über ein bloßes Arbeiten mit diesen Materialien hinaus, ist sie doch eingebunden in ein pädagogisches Gesamtkonzept, das in den letzten beiden Lebensdekaden der Pädagogin und den Jahren nach ihrem Tod, als ihr Sohn die pädagogischen Anstrengungen seiner Mutter fortsetzte bzw. durch seine Interpretationen erläuterte, eine wichtige Ausformung erhielt.

Die Friedenserziehung Montessoris

Montessori erkannte die besonders auf Grund technischer Entwicklungen zunehmende Vernetzung der Menschheit. Die Menschen haben nach ihrer Meinung für die Erhaltung des globalen Ökosystems (s. Abb. 1) zu sorgen. In diesem Ökosystem stehen belebte und unbelebte Natur in Wechselwirkungszusammenhängen, so dass eine Störung in einem Bereich meist unmittelbar Auswirkungen auf andere Bereiche nach sich zieht. Zu seiner Erhaltung ist ein gemeinsames Agieren der Menschheit unumgänglich, was nur auf der Grundlage von Frieden möglich ist. Dieser Frieden, verstanden nicht nur *ex negativo* als „Abwesenheit von Krieg“, ist als umfassende soziale, ökonomische

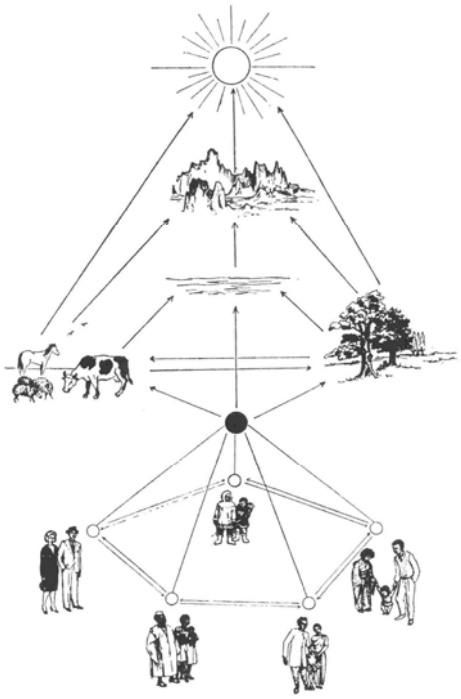


Abb. 1

und juristische Grundordnung für eine zunehmend weiter zusammen wachsende (globalisierte) Welt jenseits von Konflikten auf Grund ökonomischen Ungleichgewichts oder religiösem Fanatismus zu sehen.

Besonders in der Zeit nach dem 1., vermehrt während des 2. Weltkrieges, plädierte Montessori für eine „Kosmische Erziehung", die als Grundstein der Grundschulerziehung ganzheitlich-fächerübergreifend konzipiert ist. Sie verfolgt dabei vor allem zwei Ziele: Neben der Erziehung zu ökologischem Denken sollen Kinder durch das Betrachten menschlichen Kulturschaffens ein philantrophisches Bewusstsein entwickeln. In vielerlei Hinsicht entspricht die Kosmische Erziehung dem heutigen Sachunterricht. Allerdings ist sie nicht umfassend in der Praxis erprobt oder für die Praxis in einer Gesamtdarstellung erhalten. Aus den den Quellen zu entnehmenden vereinzelten Hinweisen ergeben sich dennoch Ideen für einen fächerübergreifenden Mathematikunterricht, in dem der Geschichte der Mathematik – ihren Inhalten, ihrer Bedeutung und ihren Wegen – eine herausragende Stellung zukommt.

Kosmische Erziehung und Mathematikunterricht

Zentral ist in der Grundschule die „Geschichte des Zählens und der Zahlen", die als Rahmenerzählung den Ausgangspunkt für weitere (historische) Geschichten bildet, z.B. zu geometrischen Begriffen oder biographischen Anekdoten, die zu erzählen eine Aufgabe des Lehrers ist. Die Geschichte soll als strukturierter „panoramaartiger" Überblick an Vorwissen der Kinder anknüpfen und Zusammenhänge herstellen, also zur Vernetzung von Wissen beitragen. Die Erzählung muss detailreich sein, ohne sich dabei in Details zu verlieren. Als Hilfsmittel dienen Zeitleisten unterschiedlicher Dichte (von einer Darstellung in Epochen bis hin zur Darstellung von Einzelereignissen), doch wären sicher auch Mind-Maps zweckmäßig. Geeignete Anschauungsmaterialien (Bilder, Modelle, ...) sollen die Imaginationskraft der Kinder während des Erzählens angeregen. Dabei soll die Darstellung interdisziplinär und wissenschaftsorientiert sein.

Inhaltlich muss eine solche Geschichte einerseits das Universal-Menschliche herausstellen, sog. *human tendencies*.[1] Diese äußern sich beispielsweise in durchaus ähnlichen Bedürfnissen für ein Zählen (z.B. auf Grund eines Bedarf bei der Viehzählung oder der Entwicklung des

[1] Vgl. zu den *human tendencies*: Ela ECKERT: Maria und Mario Montessoris Kosmische Erziehung. Vision und Konkretion, Bad Heilbronn 2001, 151 sowie Abb. 1 oben. Die *human tendencies* überschneiden sich z.T. mit den *fundamental activities* Bishops. (Alan BISHOP: Mathematics education in its cultural context, in: ders. (Hg.): Mathematical education and culture, Dordrecht / Boston / London 1988, 179-191, hier: 182ff.). Auch zur sog. „Ethnomathematik" bestehen bemerkenswerte Ähnlichkeiten.

Handels) und der Nutzung strukturell ähnlicher Hilfsmittel (z.B. Kerbhölzer, Kiesel). Andererseits sollen auch Unterschiede – genannt seien u.a. verschiedene Ziffern- und Zahlsysteme – hervorgehoben werden, eben als Betonung des gleichrangigen Andersseins unter besonderer Berücksichtigung früherer (Hoch-)kulturen. Dabei wendet sich Montessori gegen eine eurozentrierte Darstellung, obwohl natürlich die Geschichte die Genese unserer heutigen Mathematik im Blick bleiben muss.

Die Geschichte gibt Kindern einen Überblick über die Gesamtentwicklung. So sollen sie ein breites Spektrum an Möglichkeiten zur Weiterarbeit erhalten und dazu auch motiviert werden. Den Handlungsrahmen bestimmt die „Vorbereitete Umgebung“ als vom Lehrer unter Berücksichtigung entwicklungspsychologischer Bedürfnisse und persönlicher Interessen der Kinder sowie letztlich auch Lehrplanvorgaben gestaltete Lernumgebung. Diese muss den Kindern Lernmaterial wie Bücher, Modelle, (multikulturelle) Spiele, Software etc bereitstellen. Handlungsorientiert können die Kinder hier entdeckend lernen, Probleme lösen und kreativ ihre Ergebnisse aufarbeiten, z.B. in einer Art „Forscherheft“.

Schlussbemerkung

Vor allem für den Sachunterricht bieten sich in diesem Konzept viele Möglichkeiten historischen und multikulturellen Arbeitens. Zugleich, und das macht den Wert fächerübergreifenden bzw. –verbindenden Unterrichts aus, können über ein breites Spektrum historischer Inhalte auch mathematische Ziele verfolgt werden. Diese betreffen insbesondere die Einstellungen von Kindern.

Kinder sollen die Anerkennung des „gleichrangig Andersseins“ lernen. Diese grundsätzliche Haltung gegenüber anderen Menschen und Kulturen bildet die Grundlage für Toleranz und Akzeptanz, für ein „universales Bewusstsein“, in dem Wissen und Gewissen verbunden sind“[2]. Ziel des Unterrichts ist es nicht, die Probleme dieser Welt zu lösen – dies ist dann die Aufgabe des Erwachsenen.

Mathematik erscheint ferner als in der Entwicklung befindliche Kulturleistung vieler Individuen, Gruppen oder Kulturen mit heterogenen Lösungen für die zu bewältigenden Probleme und kann so möglicherweise die Einstellung von Kindern gegenüber Mathematik und Mathematikunterricht positiv beeinflussen.

[2] Horst SCHAUB: Grundsätze der Montessori-Pädagogik bei Martin Wagenschein und Maria Montessoris Konzept der Kosmischen Erziehung, in: Die Aktualität der Pädagogik Martin Wagenscheins für den Sachunterricht. Walter Köhnlein zum 65. Geburtstag, hg. v. Diethart Cech et al., Bad Heilbronn 2001, 31-46, hier: 41.

Ein weiterer Punkt betrifft die lebensvorbereitende Funktion von Mathematikunterricht: Einerseits sollen die Kinder Wissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten erwerben und anwenden. Andererseits sollen sie durch den Aufbau einer Problemlösekompetenz und vielseitiger Interessen zum lebenslangen Lernen befähigt und motiviert werden – gerade in einer und für eine sich ständig verändernde Welt.

Weiterführende Literatur (in Auswahl)

Camillo GRAZZINI: Die Anwendung der Montessori-Methode in der Mathematik: vom Begriff des Stellenwertes zu dem der Kultur, in: Die Montessori-Pädagogik und das behinderte Kind. Referate und Ergebnisse des 18. Internationalen Montessori-Kongresses (München, 4.-8. Juli 1977), hg. v. Theodor Hellbrügge, München 1978, 181-188

Sandra HECKMANN: Mehrdimensionales Lernen im Montessori-Mathematikunterricht (Oldenburger VorDrucke, Heft 498), Oldenburg 2004

Walburga HENRY: Sachunterrichtliches Lernen in der Montessori-Pädagogik. Eine Fallstudie über die Integrative Montessori-Schule Borken (Impulse der Reformpädagogik, Bd. 6), Münster / Hamburg / London 2000

Maria MONTESSORI: Frieden und Erziehung (Bureau international d'éducation, Genf 1932), in: dies.: Frieden und Erziehung. Die Bedeutung der Erziehung für die Verwirklichung des Friedens, hg. v. Paul Oswald / Günter Schulz-Benesch (Schriften des Willmann-Instituts), Freiburg / Basel / Wien 1973, 1-25

Maria MONTESSORI: Kinder sind anders, Stuttgart ^{7}1964

Maria MONTESSORI: Kosmische Erziehung (Vortragstext, Indien 1945), in: dies.: Kosmische Erziehung, hg. v. Paul Oswald / Günter Schulz-Benesch (Kleine Schriften Maria Montessoris, Bd. 1), Freiburg / Basel / Wien 1988, 19-30

Maria MONTESSORI: Programm für die Sechs- bis Zwölfjährigen, in: dies.: „Kosmische Erziehung", hg. v. Paul Oswald / Günter Schulz-Benesch (Kleine Schriften Maria Montessoris, Bd. 1), Freiburg / Basel / Wien 1988, 117-126

Maria MONTESSORI: To educate the human potential (The CLIO Montessori series, Bd. 6), Oxford ^{x}2003

Maria MONTESSORI: Von der Kindheit zur Jugend, hg. v. Paul Oswald (Schriften des Willmann-Instituts), Freiburg / Basel / Wien ^{2}1973

Mario MONTESSORI: Mathematik im Leben des Kindes in unserer sich verändernden Welt, in: Mitteilungen der deutschen Montessori-Gesellschaft 7.2 (1959) 5-6

Mario MONTESSORI jun.: Kosmische Erziehung, in: Maria Montessori: Kosmische Erziehung, hg. v. Paul Oswald / Günter Schulz-Benesch (Kleine Schriften Maria Montessoris, Bd. 1), Freiburg / Basel / Wien 1988, 171-184

Brigitte OCKEL: Advanced Montessori course London 1957/8, geleitet von Mario Montessori, Arithmetik, hg. v. Thomas Helmle / Petra Wöbcke-Helmle, o.O. 2005

Ingeborg WALDSCHMIDT: Das Spannungsfeld von Kosmischer Erziehung und Mathematik, in: Das Kind 37 (2005) 29-39

Abbildungsnachweis

Abb. 1: Mario MONTESSORI: The human tendencies and Montessori education, nach: Ela ECKERT: Maria und Mario Montessoris Kosmische Erziehung. Vision und Konkretion, Bad Heilbronn 2001, 150

Aiso HEINZE, München

Umgang mit Fehlern im Mathematikunterricht – Empirische Ergebnisse zur Schülerwahrnehmung

„Aus Fehlern lernt man.“ oder „Durch Fehler wird man klug.“ sind Redewendungen, die wahrscheinlich jede/r Lernende in seinem Leben zu hören bekommt. Sprechen diese Redewendungen inhaltlich gesehen einen kognitiven Aspekt an, so dürften sie in der jeweiligen Situation (zur Aufmunterung o.ä.) sicherlich auch einem affektiven Anspruch genügen. Beiden Aspekten wird in der Diskussion um die Fehlerkultur im Mathematikunterricht eine wichtige Bedeutung beigemessen.

Theoretischer Hintergrund

Fehler werden in der Literatur abstrakt als die Abweichung von einer vorgegebenen Norm charakterisiert. So gibt beispielsweise die Schweizer Arbeitsgruppe um Fritz Oser die folgende Definition:

> Ein ‚Fehler‘ ist ein von der Norm abweichender Sachverhalt oder Prozeß, der es überhaupt erst ermöglicht, den diesem Sachverhalt oder Prozeß entgegengesetzten richtigen normbezogenen Sachverhalt in seinen Abgrenzungen zu erkennen. (Oser & Hascher, 1996, S. 4, zitiert nach Rolett, 1999, S. 72).

In der Forschungspraxis ergibt diese Definition einige Schwierigkeiten, da die angesprochene Norm im Allgemeinen nicht explizit bekannt ist. Für den Mathematikunterricht muss diese Norm als eine klassenabhängige sozio-mathematische Norm angesehen werden. Zur Analyse von Fehlern im Unterricht wird in der Forschung auf einen Situationsansatz zurückgegriffen, nach dem vergleichsweise einfach zu identifizierende Fehlersituationen zu betrachten sind und nicht die eigentlichen Fehler.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wird Fehlern auch im Alltagsverständnis ein Lernpotential zugewiesen. Die Möglichkeit aus Fehlern zu lernen, kann mittels der Theorie des negativen Wissens erklärt werden (vgl. Oser et al., 1999). Negatives Wissen bezeichnet das Wissen darüber, welche Fehler vermieden werden müssen, damit ein Handlungsablauf gelingt. Kurz gesagt ist es also das Wissen über das Nichtkorrekte (im Gegensatz zu dem positiven Wissen als das Wissen über das Korrekte). Für den Lernprozess wird der Erwerb negativen Wissens als bedeutungsvoll angesehen. Dabei wird angenommen, dass negatives Wissen vor allem über Fehlererfahrungen und den konstruktiven Umgang mit Fehlern erworben wird. Fehler werden damit nicht nur zu einem integrativen Bestandteil des Lernprozesses sondern sogar zu einem notwendigen Bestandteil.

Zentral dürfte beim Lernen aus Fehlern die Schülerwahrnehmung der Fehlersituationen bzw. der Fehlerkultur im Mathematikunterricht sein. In

ihrem Schweizer Projekt zur Fehlerkultur konnten Spychiger et al. (1998) auf Basis von Interviews und Fragebögen u.a. aufzeigen, dass Lernende

- die Fehlerkultur in der Schule positiv wahrnehmen, wozu insbesondere auch das Lehrerverhalten zählt,
- Zurückhaltung bei Auseinandersetzung mit eigenen Fehlern zeigen.

Entsprechend sehen Spychiger et al. Handlungsbedarf im Unterricht darin, Schülerinnen und Schülern bei dem konstruktiven Umgang mit ihren individuellen Fehlern zu unterstützen und Strategien dazu aufzuzeigen.

Forschungsfragen und Design der Studie

In diesem Beitrag sollen die folgenden Fragenstellungen behandelt werden:

- Haben Schülerinnen und Schüler Angst vor dem Fehlermachen?
- Wie beurteilen sie das Lehrerverhalten?
- Nutzen Schülerinnen und Schüler ihre Fehler als Lerngelegenheit?

Die Stichprobe umfasst etwa 1100 Schülerinnen und Schüler am Ende der Jahrgangstufe 7 aus 42 Gymnasialklassen aus dem Großraum München/ Augsburg. Die Probanden haben neben einem Fragebogen zum Umgang mit Fehlern auch einen Fragebogen zu Interesse und Motivation sowie Leistungstests zum Beweisen und Begründen und zum fachunabhängigen Problemlösen bearbeitet (vgl. Rudolph-Albert & Kessler, in diesem Band).

Bei dem Fehlerfragebogen handelt es sich um eine adaptierte Version der Kurzform des S-UFS aus dem bereits erwähnten Schweizer Fehlerprojekt (vgl. Spychiger et al., 1998). Es handelt sich um 26 Items, die von den Probanden auf einer vierstufigen Likert-Skala zu beurteilen waren. Den Items liegen drei Konstrukte (Lehrerverhalten, individueller Umgang mit Fehlern, Angst vorm Fehlermachen) zugrunde. Zusätzlich wurden zwei offene Fragen angefügt, bei denen die Lernenden erlaubte und verbotene Situationen für das Fehlermachen angeben sollten. Letztere werden in diesem Beitrag aus Platzgründen nicht behandelt.

Ergebnisse

Die Schülerantworten zu den 26 Items wurden mittels einer Faktoren-analyse ausgewertet (KMO-Wert: 0,92). Es ergaben sich vier Faktoren, die 53,1% der Varianz erklären. Die interne Konsistenz (Cronbach's α) liegt zwischen 0,74 und 0,88 und ist als akzeptabel einzuschätzen, sodass die Annahme von vier Skalen gerechtfertigt ist. Diese wurden aufgrund der zugeordneten Items mit „*individuelles Lernen aus Fehlern*“ (Nutzung eigener Fehler als Lernanlass), „*Lehrerverhalten affektiv*“ (Lehrerverhalten bzgl. emotionaler und motivationaler Aspekte in Fehlersituationen),

„*Lehrerverhalten kognitiv*“ (kognitiv unterstützendes Lehrerverhalten in Fehlersituationen) und „*Angst vorm Fehlermachen*“ bezeichnet.

Tabelle 1 gibt die Mittelwerte der vier Skalen im Vergleich zu den Schweizer Ergebnissen an. Es zeigen sich vergleichbare Resultate bei dem Faktor „Angst vorm Fehlermachen“, wogegen das „individuelle Lernen aus Fehlern“ in dieser Studie etwas schwächer ausgeprägt ist. Das Lehrerverhalten, in der Schweiz nur ein Faktor, wird hier ebenfalls schlechter bewertet.

Mittelwerte	ind. Lernen aus Fehlern	Lehrerverhalten affektiv	Lehrerverhalten kognitiv	Angst vorm Fehlermachen
Hauptstudie (N=1100)	2,44	3,03	2,74	1,82
Schweiz (N=295)	2,78	3,42		1,78
Skala: 1 = stimmt gar nicht, 2 = stimmt kaum, 3 = stimmt weitgehend, 4 = stimmt genau				

Tabelle 1: Mittelwerte der vier Skalen.

Betrachtet man die Verteilungen für die vier Skalen in Form von Histogrammen, so zeigt sich für das „individuelle Lernen aus Fehlern“ eine symmetrische Verteilung um den Mittelwert. Bei der „Angst vorm Fehlermachen“ sind sich die Lernenden bis auf wenige Ausnahmen einig und messen dieser nur wenig Bedeutung bei. Die beiden Faktoren zum Lehrerverhalten zeigen in der Schülerbeurteilung eine positive Tendenz, wobei es aber nicht wenige Schülerinnen und Schüler gibt, die ihre Lehrkräfte negativ bewerten. Dies ist bei dem Faktor „Lehrerverhalten kognitiv“ sehr viel stärker ausgeprägt als bei dem „Lehrerverhalten affektiv“.

Ein direkter Zusammenhang der Fehlerdaten zu Leistungsdaten der Schülerinnen und Schüler konnte nicht nachgewiesen werden. Es zeigen sich nur sehr schwache Korrelationen und auch die Mittelwertsunterschiede zwischen extremen Leistungsgruppen sind zwar signifikant aber gering.

Stattdessen gibt es einen starken Zusammenhang zum mathematikbezogenen Interesse. Die Skala „Interesse/Freude an Mathematik“ korreliert mit dem „individuellen Lernen aus Fehlern“ ($r = 0{,}548$, $p < 0{,}001$). Dabei ist anzunehmen, dass das Mathematikinteresse auf den eigenen Umgang mit Fehlern wirkt, wobei aber auch Rückkopplungseffekte eine Rolle spielen dürften. Der korrelative Zusammenhang verstärkt sich, wenn die Klassenebene betrachtet wird ($r = 0{,}663$, $p < 0{,}001$). Allerdings gibt es hier nur eine geringe Streuung der Interessensmittelwerte. Eine Mehrebenenanalyse dürfte mehr Aufschluss über den Einfluss der Klassenebene ergeben.

Betrachtet man Klasseneffekte für die vier Skalen, so zeigen sich tendenziell geringe Unterschiede für die Faktoren „individuelles Lernen aus Feh-

lern“ und „Angst vorm Fehlermachen“. Große Unterschiede sind dagegen bei den Faktoren zum Lehrerverhalten zu erkennen (vgl. Abbildung 1).

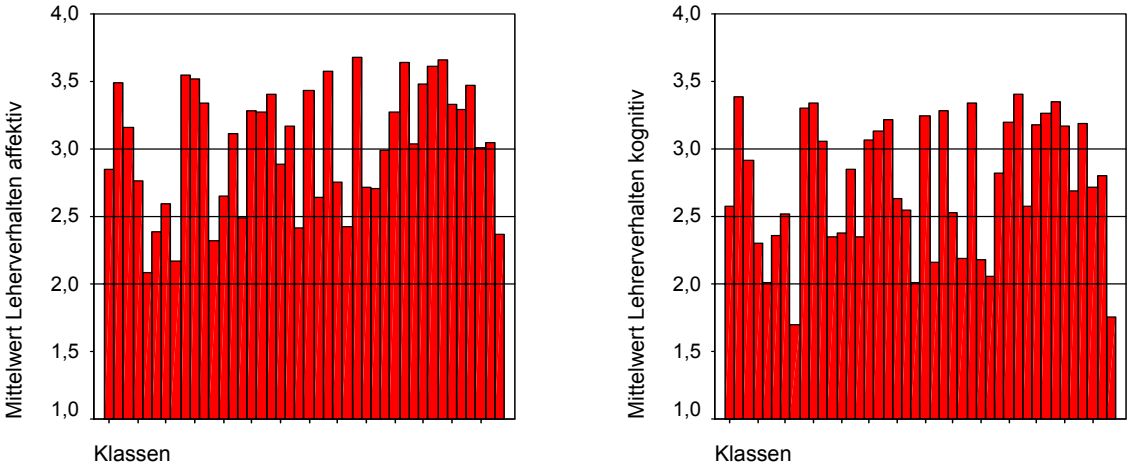


Abbildung 1: Klasseneffekte für die Faktoren zum Lehrerverhalten.

Diskussion

Die Ergebnisse weisen zunächst darauf hin, dass die Gymnasiasten in Klasse 7 wenig Angst vor dem Fehlermachen haben und die affektive Ebene der Lehrerreaktion in Fehlersituationen tendenziell positiv sehen. Ausbaufähiges Potential gibt es bei dem individuellen Umgang mit eigenen Fehlern als Lerngelegenheit. Wie bereits bei der Schweizer Studie zeigt sich auch hier, dass die Lernenden Fehler im Mittel zu wenig als Chance im Lernprozess nutzen. Auffällig ist, dass dies in der Schülerwahrnehmung nicht optimal durch ein kognitiv unterstützendes Lehrerverhalten gefördert wird (die Faktoren korrelieren zu $r = 0{,}429$, $p < 0{,}001$ auf Individualebene). Dass so eine Unterstützung möglich ist, zeigt die Streuung bei den Klassenmittelwerten: Bei 17 der 42 Klassen liegen die Mittelwerte über 3,0, was auf der Likert-Skala „stimmt weitgehend“ bedeutet. An dieser Stelle könnte beispielsweise über eine Intervention nachgedacht werden.

Literatur

Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des „negativen“ Wissens. In W. Althof (Eds.), *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehler* (S. 11-41). Opladen: Leske + Budrich.

Rolett, B. (1999). Auf dem Weg zu einer Fehlerkultur. Anmerkungen zur Fehlertheorie von Fritz Oser. In W. Althof (Hrsg.), *Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern* (S. 71-88). Opladen: Leske + Budrich.

Rudolph-Albert, F. & Kessler, S. (2006). Problemlösekompetenzen von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangstufe 7. In diesem Band.

Spychiger, M., Mahler, F., Hascher, T. & Oser, F. (1998). *Fehlerkultur aus der Sicht von Schülerinnen und Schülern.* Schriftenreihe des Pädagogischen Instituts der Universität Fribourg.

Frank HELLMICH, Münster & Stephan WERNKE, Oldenburg

Lernstrategien, Metakognitionen und Motivationen von Kindern im Mathematikunterricht

Im Kontext des Lehrens und Lernens von Mathematik gewinnt die Förderung geeigneter Lernstrategien, Metakognitionen und Motivationen an Bedeutung. Die Annahme, dass in der Schule alle Wissensbereiche, die für das Leben notwendig sind, ausreichend vermittelt werden können, ist nahezu utopisch. Es gilt, sich auch – über die Schulzeit hinaus – weiterzubilden, sich neue Kompetenzbereiche zu erschließen und sich immer wieder neues Wissen anzueignen, um den spezifischen Anforderungen der Alltags- respektive Arbeitswelt gerecht werden zu können. Ein fachübergreifendes Ziel im Mathematikunterricht sollte es demzufolge sein, Kinder – bereits auf frühen Entwicklungsstufen – darin zu unterstützen, selbstreguliert zu lernen, d. h. sich selbstständig Ziele bei der Anfertigung von Aufgaben zu setzen, Lernprozesse eigenverantwortlich zu planen und zu überwachen sowie sich selbst im Unterricht zu motivieren. Während unter konzeptionellem Gesichtspunkt bereits viele verschiedene Ansätze zur Förderung von Lernstrategien, Metakognitionen und Motivationen vorhanden sind, mangelt es zurzeit noch an experimentellen Studien, die die Evaluation solcher Fördereinheiten betreffen. Eine Ausnahme stellt eine Studie von Gürtler, Perels, Schmitz und Bruder (2002) dar. Hier konnte gezeigt werden, dass Selbstregulationen von älteren Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I im Mathematikunterricht – unter spezifischen Bedingungen – gefördert werden können. Das Anliegen unserer Studie ist, eine Fördereinheit für jüngere Kinder zu entwerfen, die dann experimentell in Hinblick auf ihre Möglichkeiten und Grenzen evaluiert wird. Im Folgenden berichten wir über einen ersten Untersuchungsschritt: Um Kompetenzen im Bereich des selbstregulierten Lernens bei jüngeren Kindern prä- und postexperimentell erfassen zu können, haben wir einen Fragebogen entwickelt, den wir anhand einer größeren Stichprobe evaluiert haben.

Theoretischer Hintergrund

Bei Lernstrategien, Metakognitionen und Motivationen handelt es sich um Konstrukte, die gemeinhin im Kontext selbstregulierten Lernens genannt und diskutiert werden. Unter Selbstregulationen von Lernenden werden dabei all diejenigen Fähigkeiten subsumiert, die die Art und Weise der Informationsverarbeitung und das Lernverhalten im Allgemeinen betreffen. Lernstrategien stellen im Wesentlichen kognitive Strategien der Informationsverarbeitung dar. Voneinander unterschieden werden in der Regel Wie-

derholungsstrategien (z. B. Einprägen von mathematischen Formeln) und Elaborationsstrategien (z. B. an bereits Gelerntes anknüpfen). Unter Metakogntionen versteht man so genannte Kontrollstrategien, die die Planung, die Regulation und die Evaluation von Lernprozessen bei Lernenden betreffen (vgl. Artelt & Moschner, 2005; Mandl & Friedrich, 2006). Geeignete Motivationen stellen Voraussetzungen dafür dar, dass Lernprozesse überhaupt initiiert und erfolgreich durchgeführt werden. Hierzu gehört, dass Kinder in der Lage sind, sich selbstständig realistische Ziele zu setzen und mit Erfolgen und Misserfolgen angemessen umgehen können. Des Weiteren sollten sie sich beim Lernen oder Problemlösen als selbstwirksam wahrnehmen, ihre eigenen selbstbezogenen Kognitionen positiv aufrechterhalten und ihre Lernvorgänge gegenüber konkurrierenden Handlungsintentionen abschirmen können.

Design der Studie

An der Untersuchung sind insgesamt N=200 Haupt- und Realschülerinnen und -schüler beteiligt gewesen, die zum Zeitpunkt der Erhebungen fünfte respektive sechste Klassenstufen besuchten. Im Detail haben 105 Mädchen und 95 Jungen an den Befragungen teilgenommen. Für die Untersuchung wurden verschiedene Skalen zur Erfassung von Lernstrategien, Metakognitionen und Motivationen entwickelt: Bei dem Konstrukt `Lernstrategien´ wurden zwei Subskalen von einander unterschieden, nämlich eine Subskala zur Erfassung der Verfügbarkeit von Elaborationsstrategien („Wenn wir in Mathe etwas Neues lernen, überlege ich mir, wie der neue Stoff mit dem zusammenhängt, was ich schon gelernt habe.“) und eine weitere zum Gebrauch von Wiederholungsstrategien („Um mir den Lösungsweg einzuprägen, rechne ich die Matheaufgabe immer wieder durch.“). Zur Erfassung von motivationalen Orientierungen von Kindern wurden die folgenden Subskalen konzipiert: Selbstkonzept mathematischer Fähigkeiten („Ich bin ziemlich gut in Mathe.“), Skalen zur Aufrechterhaltung der Motivation unter extrinsischem und intrinsischem Aspekt („In Mathe will ich möglichst viel lernen.“/ „In Mathe will ich gute Noten haben, damit meine Eltern stolz auf mich sind.“), eine Subskala zur Volition („In Mathe fällt es mir schwer, bei der Sache zu bleiben.“), eine Subskala zur Misserfolgsbewältigung („Wenn ich in Mathe Fehler mache, habe ich keine Lust mehr weiterzumachen.“) und eine weitere zu Selbstwirksamkeitsüberzeugungen („Wenn ich für Mathe übe, bin ich auch gut.“). Schließlich wurden drei verschiedene Subskalen zu Metakognitionen entwickelt: eine zur Planung („Ich mache mir einen Zeitplan, wann ich was lernen will.“), eine zur Überwachung („In Mathe stelle ich mir selbst Fragen, um sicher zu gehen, dass ich alles verstanden habe.“) und eine weitere zur Evaluation von

Lernprozessen („Wenn ich etwas nicht verstanden habe, gehe ich es noch mal langsam durch.“). Als Antwortkategorien wurde eine fünfstufige Skala – von „stimmt überhaupt nicht“ bis „stimmt genau“ – vorgegeben.

Ergebnisse

Die Ergebnisse der Faktoren- und Reliabilitätsanalysen verdeutlichen, dass einige der theoretisch angenommenen Skalen zur Erfassung selbstregulativer Kompetenzen bestätigt werden können. Dies betrifft im Besonderen Subskalen zur Erfassung motivationaler Orientierungen von Kindern: Selbstkonzept mathematischer Fähigkeiten (Cronbach`s Alpha=.89), intrinsische Motivation (.89), extrinsische Motivation (.80), Volition (.79), Misserfolgsbewältigung (.62) und Selbstwirksamkeit (.77). Die Skalen zur Erfassung von Elaborations- und Wiederholungsstrategien konnten faktorenanalytisch nicht voneinander abgegrenzt werden; dasselbe betrifft die Subskalen zur Erfassung der Planung, Regulation und Evaluation von Lernprozessen (Metakognitionen). Es wurden jeweils eindimensionale Designs der Skalen identifiziert. Für beide Gesamtskalen liegen gute bis sehr gute Reliabilitätswerte vor (Gesamtskala `Verfügbarkeit von Lernstrategien´, .88; Gesamtskala `Verfügbarkeit von Metakognitionen´, .90). Auf der Basis dieser Auswertungen wurden zusätzlich Ergebnisse unter deskriptivem Aspekt ermittelt: Im Detail verdeutlichen die Befunde, dass ein Großteil der Schülerinnen und Schüler nur über geringe Motivationen (ca. 75%) berichtet. Viele Kinder erklären, dass sie keine Strategien beim Lernen einsetzen (ca. 70%) oder ihre Lernprozesse bewusst planen, überwachen und kontrollieren (ca. 90%). Unter korrelativem Aspekt verdeutlichen die Ergebnisse der Befragungen enge Zusammenhänge zwischen den einzelnen untersuchten Subkompetenzen selbstregulierten Lernens. Die Ergebnisse sind im Detail in der Interkorrelationsmatrix in Tabelle 1 dargestellt. Der besonders hohe Zusammenhang zwischen `Lernstrategien´ und `Metakognitionen´ deutet auf eine Multikollinearität der beiden Faktoren hin, die sich bei einer erneuten Faktorenanalyse bestätigt.

Tabelle 1: Interkorrelationsmatrix; Anmerkung: Alle Korrelationen sind auf dem 1%-Niveau signifikant.

		1	2	3	4	5	6	7
1	Selbstkonzept							
2	Intrinsische Motivation	.59						
3	Selbstwirksamkeit	.50	.60					
4	Extrinsische Motivation	.35	.49	.38				
5	Abschirmung der Lernprozesse	.47	.51	.36	.20			
6	Misserfolgsbewältigung	.40	.46	.42	.23	.46		
7	Lernstrategien	.43	.68	.64	.47	.25	.32	
8	Metakognition	.39	.71	.63	.38	.40	.49	.84

Die Zusammenhänge zwischen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen, Misserfolgsbewältigungen, Selbstkonzepten und intrinsischen Motivationen wurden genauer betrachtet. Diese Zusammenhänge lassen sich in Form eines Pfadmodells darstellen, wobei Misserfolgsbewältigungen und mathematikbezogene Selbstkonzepte als proximale Bedingungen zur Vorhersage von intrinsischen Motivationen vermutet wurden, Selbstwirksamkeitsüberzeugungen fungierten hingegen als distale Bedingung. Das zugehörige Pfadmodell weist insgesamt gute teststatistische Werte auf (CMIN/DF=1,83). Insgesamt wurden ca. sechzig Prozent der Gesamtvarianz aufgeklärt. Als signifikante Prädiktoren für Motivationen bei Kindern wurden Selbstwirksamkeitsüberzeugungen (.39), Selbstkonzepte (.35) und Misserfolgsbewältigungen (.19) – in eben dieser Reihenfolge – ermittelt. Dabei zeigte sich, dass die postulierten Mediatoreffekte bestätigt werden konnten. Die Ergebnisse verdeutlichen, dass sich die Effekte von Selbstwirksamkeitsüberzeugungen auf intrinsische Motivationen bei den Kindern vergrößern, wenn jeweils eine der Variablen – entweder Misserfolgsbewältigungen oder mathematikbezogene Selbstkonzepte – „zwischen-geschaltet“ ist. Dabei ist der totale Effekt des Mediators `Selbstkonzept mathematischer Fähigkeiten´ (.58) größer als derjenige des Mediators `Misserfolgsbewältigungen´ (.51).

Diskussion der Befunde

Die Ergebnisse dieser Studie verdeutlichen Möglichkeiten und Grenzen der Erfassung von Selbstregulationen bei sehr jungen Kindern. Während in dieser Untersuchung theoretische Skalen zu motivationalen Aspekten von Lernprozessen empirisch weitgehend bestätigt werden konnten, verdeutlichen die Ergebnisse allerdings Schwierigkeiten bei der Erfassung von Lernstrategien und Metakognitionen. Über Ursachen für diesen Sachverhalt kann an dieser Stelle nur spekuliert werden. Möglicherweise sind die Probleme bei der Erfassung dieser Aspekte selbstregulierten Lernens in der hier gewählten Stichprobe verankert. Bei einem Großteil der von uns befragten Kinder handelt es sich um Hauptschülerinnen und -schüler. Es ist nicht auszuschließen, dass leistungsschwächere Kinder nur schwer Auskunft über ihre Lernprozesse und ihre Lernstrategien geben können.

Literatur

Gürtler, T., Perels, F., Schmitz, B. & Bruder, R. (2002). Training zur Förderung selbstregulativer Fähigkeiten in Kombination mit Problemlösen in Mathematik. *Zeitschrift für Pädagogik. 45. Beiheft*, 222-239.

Mandl, H. & Friedrich, F. E. (Hrsg.) (2006). *Handbuch Lernstrategien*. Göttingen: Hogrefe.

Moschner, B. & Artelt, C. (Hrsg.) (2005). *Lernstrategien und Metakognitionen. Implikationen für Forschung und Praxis*. Münster u. a.: Waxmann.

Lutz HELLMIG, Rostock

Zur Evaluation von Lehrerfortbildungen in Ontario

1 Einführung

Das unbefriedigende Abschneiden der deutschen Schüler[1] bei internationalen Tests ist ein Anlass nach Wegen zu suchen, um die Situation der mathematischen Bildung in Deutschland dauerhaft zu verbessern. Hierbei ist die Fortbildung der Lehrer ein wesentlicher Aspekt, der in Zukunft weit stärker beachtet werden sollte. Vor diesem Hintergrund hat sich der Verfasser während eines einjährigen Aufenthaltes in Kanada mit Entwicklungen zur Lehrerfortbildung und ihrer Evaluation in Ontario beschäftigt.

2 Lehrerfortbildung und Evaluation in Ontario

Die Bereitschaft der Lehrer zur ständigen Fort- und Weiterbildung ist im Allgemeinen ein Teil ihres Berufsverständnisses. Fort- und Weiterbildung sind freiwillig; ein Versuch in den Jahren 2000 bis 2002, Fortbildungen verbindlich vorzuschreiben, wurde abgebrochen.

Lehrerfortbildungen werden in der Regel von den weitgehend autonomen Schoolboards bzw. den Universitäten angeboten. Während die Fortbildungsmaßnahmen an den Universitäten - AQ[2]- und Master-Kurse kostenpflichtig sind, stehen den Schoolboards Mittel zur Verfügung, um eigenverantwortlich Lehrerfortbildungen zu organisieren. Ergänzend existieren Programme von zentraler Seite (initiiert durch die Provinzregierung[3]) sowie Angebote aus der Wirtschaft.

Theoretische Orientierungen zur Konzeption der Fortbildungsmaßnahmen werden u. a. durch Arbeiten von Susan Loucks-Horsley (1998) gegeben. Der Verfasser erkennt in diesen Arbeiten und zunehmend in der praktischen Umsetzung in Ontario vier zentrale Aspekte im Design von Lehrerfortbildung: Kontrolliertheit, Kontinuierlichkeit, Kooperation und Konstruktivität.

Lehrerfortbildung wird als zielgerichteter Prozess der persönlichen Entwicklung des Lehrers verstanden. Die Entwicklung des Lehrers oder eines Lehrerteams wird nicht dem Selbstlauf überlassen, sondern dieser Prozess

---

[1] Alle Personenbezeichnungen sind im Folgenden geschlechtsneutral zu verstehen.
[2] AQ: Additional Qualification
[3] z.B. Umsetzung der Hinweise des "Expert Panel Literacy and Numeracy" mit Evaluation von "Early Math" and "Early Reading" durch Christine Suurtamm, Uni Ottawa 2005

wird durch Unterstützung und Beratung der teilnehmenden Lehrer begleitet.

Das Vorhandensein eines Ziels impliziert grundsätzlich auch die Möglichkeit zu evaluieren, ob dieses Ziel erreicht worden ist.

Entwicklungsprozesse benötigen Zeit. Bedingt durch die Natur des Lernprozesses an sich, aber auch durch die Komplexität von Systemen wie Schule, sind Faktoren wie die Resistenz der Systeme gegenüber Veränderung zu berücksichtigen. Nachhaltig wirkende Entwicklungen sind nicht innerhalb kurzer Zeiträume zu erwarten.

Entwicklung im schulischen Umfeld ist stets an Kommunikation gebunden. Der Ausbildung eines kooperativen Arbeitsumfeldes innerhalb der Programmteilnehmer, aber auch der Einbeziehung indirekt Beteiligter wie Vorgesetzte, Eltern und Schüler ist Beachtung zu schenken.

Die Vernetzung mit anderen laufenden oder bereits realisierten Programmen wird als sinnvoll erachtet.

Der Erfolg einer Fortbildung wird umso höher bewertet, je mehr sie die konkrete Situation des jeweiligen Lehrers berücksichtigt und direkt umsetzbare Resultate hat. Lehrer sollen die Möglichkeit haben, schon im Rahmen der Fortbildung Unterrichtsstrategien zu modellieren und zu erproben.

Evaluation von Lehrerfortbildungen

Die Arbeiten von Thomas Guskey (2000) enthalten ein allgemeines Modell zur Evaluation von Lehrerfortbildungen. Guskey definiert vier Phasen eines Fortbildungsprozesses. Die Fortbildungsmaßnahme selbst stellt die erste Phase dar. In deren Folge wird eine Veränderung der Unterrichtspraxis erwartet. Im Ergebnis dessen sollten Veränderungen im Lernprozess der Schüler erkennbar sein, die anschließend eine dauerhafte Veränderung der Gewohnheiten und Überzeugungen der Lehrer nach sich ziehen.

Darauf aufbauend entwickelt Guskey ein fünfstufiges Modell zur Evaluation von Lehrerfortbildungen und benennt jeweils geeignete Instrumente.

In der ersten Stufe werden die Reaktionen der Teilnehmer auf die stattgefundene Fortbildung erfragt. Bei negativer Rückmeldung auf dieser Stufe ist eine erfolgreiche Umsetzung der Fortbildungsziele nicht zu erwarten. Eine zweite Phase der Evaluation befasst sich mit dem Lernprozess der Teilnehmer, inwiefern sie Kenntnisse und Fähigkeiten tatsächlich erworben haben. Zum dritten bestimmen das die Lehrer umgebende System aus Gesetzen und Traditionen sowie das Handeln der unmittelbaren und mittelbaren Vorgesetzten den Erfolg einer Lehrerfortbildung maßgeblich. In Phase

drei werden Informationen über diese Faktoren erhoben und in Beziehung zur Fortbildungsmaßnahme gesetzt. An vierter Stelle im Evaluationsrhythmus sieht Guskey die Überprüfung der tatsächlichen Umsetzung des Programms, den Gebrauch des während der Fortbildung erworbenen Wissens und Könnens. Guskey definiert als fünfte und letzte Stufe der Evaluation die Untersuchung des Effekts der Fortbildung auf die Schüler als die eigentlichen Adressaten der Fortbildung.

Aus Sicht des Verfassers könnte sich hier eine sechste Stufe der Evaluation anschließen, die auf die Nachhaltigkeit des Programms fokussiert.

Evaluation wird nicht als Selbstzweck verstanden, sondern wirkt als integraler Teil der Fortbildung konstruktiv und regulierend. Insofern kann insbesondere bei kontinuierlichen Fortbildungsprogrammen jede Evaluationsstufe als Teil eines Zyklus angesehen werden.

Bei der praktischen Umsetzung der Evaluation sind Nützlichkeit, Genauigkeit und Machbarkeit als Schlüsselattribute anzusehen.

3 Design und Evaluation von "Teacher eLearning"

"The Learning Partnership" ist eine kanadische Non-Profit-Organisation, die Innovationen speziell im Bereich schulischer Bildung vielfältig anregt und unterstützt.

In den Schuljahren 2003/2004 und 2004/2005 konzipierte und realisierte "The Learning Partnership" eine Fortbildung für Lehrer der Klassenstufen 6 bis 8 der Fächer Mathematik (erste Projektphase) und Naturwissenschaft (zweite Projektphase). Ziel dieses Projektes war es, die Sicherheit der Lehrer im Umgang mit Mathematik und Naturwissenschaft zu entwickeln, die didaktische Qualität des Unterrichts durch handlungsorientiertes und entdeckendes Lernen zu verbessern sowie eine fachliche Kommunikation der Lehrer miteinander zu initiieren.

Die Fortbildung erfolgte als "Blended Learning". Neben insgesamt drei "Face-to-Face"-Sessions während der Schulferien wurden drei je sechswöchige Online-Module durchgeführt, in denen die Lehrer konkrete Aufgabenstellungen – begleitet durch geschulte Moderatoren – im Netz miteinander diskutierten und in ihrem eigenen Unterricht praktisch umzusetzen hatten. Hierzu stand allen Lehrern wöchentlich geplanter zeitlicher Freiraum während der Arbeitszeit zur Verfügung.

Das Programm wurde durch die York University Toronto (OWSTON, 2004, 2005) extern evaluiert. Schwerpunkte der Evaluation waren der Einfluss des Programms auf die Lehrer, auf die Schüler als Gesamtheit sowie auf bestimmte Schülergruppen v. a. unter Berücksichtigung sozialer Aspekte.

Im Weiteren wurden andere beabsichtigte und nicht beabsichtigte Effekte und Potenzen der Fortführung und Übertragbarkeit des Programms betrachtet.

Die Erhebung der Daten erfolgte sowohl durch Lehrerfragebögen und Schülerfragebögen, die jeweils zu Beginn und zum Ende einer Projektphase bearbeitet wurden. Ein Evaluationsforum mit beteiligten Lehrern im Januar sowie telefonische Interviews mit Entscheidungsträgern in den Schulen und Projektverantwortlichen lieferten zusätzliche Daten. Laufend fanden Unterrichtsbesuche in Schulen mit verschiedenem sozial-ökonomischen Status und eine Analyse der Online-Diskussionen statt.

Die Auswertung der Daten zeigte, dass die Ziele der Fortbildung erfolgreich realisiert wurden. Auf einige ausgewählte Ergebnisse sei hier verwiesen: Seltener als durch das Programm beabsichtigt brachen Lehrer das klassische Unterrichtsmuster auf. Dies wird als Hinweis darauf verstanden, dass selbst bei einjähriger Programmdauer Effekte der Nachhaltigkeit nur bedingt erwartet werden können. Unterschiedlich bewerteten Schüler und Lehrer die Schülersicht auf das Fach nach Implementation des Programms. Während die Schüler ihr eigenes Engagement im Fachunterricht unverändert einschätzten, nahmen Lehrer und Schulleiter eine erhöhte Beteiligung und Motivation der Schüler wahr. Die Wertschätzung des Faches stieg bei Schülern mit hohem SES[4] und sank bei Schülern mit geringem SES. Konstatiert wurde eine erhöhte Aktivität von ESL[5]-Schülern im Fach. Als entscheidend für das Gelingen der Fortbildung erwiesen sich die Arbeit der Moderatoren in den Diskussionsgruppen und die Anpassung des zeitlichen Rahmens der Fortbildung an den jährlichen Arbeitsrhythmus der Lehrer.

Literatur

GUSKEY, Thomas: *Evaluating Professional Development*. Thousand Oaks: Corwin Press, 2000

LOUCKS-HORSLEY, Susan [et. al.]: *Designing Professional Development For Teachers Of Science And Mathematics.* Thousand Oaks: Corwin Press, 1998

OWSTON, Ron [et al.]: *Report on the Evaluation of the Mathematics Program of the Teacher eLearning Project*. Toronto, Institute for Research on Learning Technologies, 2004

OWSTON, Ron [et al.]: *Final Report on the Evaluation of the Science and Technology Program of the Teacher eLearning Project.* Toronto, Institute for Research on Learning Technologies, 2005

[4] SES: social economic status
[5] ESL: English as a second language. Nichtmuttersprachler

Ueli HIRT, Bern

Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte – Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht

Die Unterschiede zwischen den Kindern sind gross, im Leistungsbereich, aber auch im Bereich ihrer Denkwege und ihrer Darstellungsweisen. Das Fähigkeitsspektrum streut vielfach über drei bis vier Schuljahre. Das zeigen u.a. die Erhebungen von Hengartner (1999). Obschon die grossen Unterschiede zwischen den Kindern in der mathematikdidaktischen Forschung längst erkannt sind und bereits viele Aufgaben und Lehrmittel für den besseren Umgang mit der Heterogenität im Mathematikunterricht vorliegen, ist die Herausforderung für die Unterrichtspraxis gross, mit den Unterschieden der Kinder umzugehen. Der Mathematikunterricht wurde scheinbar zu lange kleinschrittig geplant, mit gleichförmigen Aufgaben gestaltet und an einem fiktiven Durchschnitt ausgerichtet. Im günstigen Falle wird der Unterricht mit Methoden der inneren Differenzierung gestaltet: Die langsam Lernenden erhalten einfachere Aufgaben und besondere Unterstützung, während die schnelleren individuell Zusatzaufgaben bearbeiten, die kaum anspruchsvoller sind, jedoch häufig mehr des gleichen anbieten. Zudem werden die Rechenschwachen nicht selten in sonderpädagogisch betreuten Gruppen oder im Einzelunterricht begleitet, und die besonders Begabten werden mit spezifischen Fördermassnahmen (z.B. Enrichment-Programme) gefordert, die bis zur teilweisen oder völligen Separation gehen.

Lösungsansatz: Mathematikunterricht mit Lernumgebungen

Im Projekt „Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht“ (Hengartner, Hirt, Wälti 2006)[1] wurden Antworten auf die festgestellte Heterogenität in Form von Lernumgebungen gesucht. Lernumgebungen sind Planungsvorlagen für Lehrpersonen zur Gestaltung des Mathematikunterrichts. Sie ermöglichen ihnen, den Unterricht besser auf das gesamte Begabungsspektrum auszurichten. Alle Schülerinnen und Schüler, die Rechenschwachen wie auch die Hochbegabten, können *integrativ und ohne Zusatzaufgaben* gefördert werden. Die Lernumgebungen wurden im Rahmen des Projekts entwickelt und an vielen Schulen in mehreren Regionen der Schweiz sowie in Zusammenarbeit mit ca. 50 Lehrpersonen und ca. 100 Studierenden für das Lehramt an Grundschulen erprobt. Die inhaltliche Orientierung erfolgte am Projekt „mathe2000“ der Dortmunder E.Ch. Wittmann und G.N. Müller (1990/1992; 1993-1996 bzw. 2004/05).

[1] Das Projekt führt eine Homepage mit Lernumgebungen zum Download: www.mathe-projekt.ch

Die Lernumgebungen

Die Lernumgebungen sind immer gleich gegliedert. Sie enthalten eine *mehrteilige Aufgabe*, so dass die langsam Lernenden einen Zugang haben und gleichzeitig auch die besonders Begabten gefordert sind. Die den Aufgaben zu Grunde liegende fachliche Struktur wird im Abschnitt *Worum geht es* beschrieben. Damit erhalten die Lehrpersonen Hinweise zum mathematischen Verständnis der Aufgabe und zu erweiterten fachlichen Zusammenhängen. *Wie kann man vorgehen* schlägt den Lehrpersonen ein mögliches Unterrichtsdesign vor, das sich in den Erprobungen bewährt hat. Und die *Dokumente aus der Erprobung* zeigen die Bandbreite der zu erwartenden Leistungen und Darstellungsformen der Schülerinnen und Schüler. Sie verdeutlichen die Heterogenität, mit der zu rechnen ist, aber auch die Fördermöglichkeiten der jeweiligen Lernumgebung.

Ein Beispiel: Brüche bilden und ordnen

Die Lernumgebung besteht aus einer *dreiteiligen Aufgabe*:

a) Wähle aus den Zahlenkarten 1 bis 10 drei aus, bilde Brüche und ordne sie nach der Grösse.
   Wie viele Brüche kannst du bilden?
b) Wie viele Brüche kannst du bilden, wenn du drei, vier, fünf, sechs, ... Zahlenkarten auswählst? Entdeckst du eine Gesetzmässigkeit?
c) Wie viele Brüche kannst du bilden, wenn du jede Zahlenkarte zwei Mal zur Verfügung hast?

Die Schülerinnen und Schüler „erzeugen“ Brüche, indem sie aus einem Set von Zahlenkarten eine Zahl in den Zähler, eine andere in den Nenner des Bruchs legen. *Worum geht es?* Einerseits um das Bilden und Ordnen von Brüchen, andererseits um die Bearbeitung kombinatorischer Fragestellungen. Die langsam Lernenden haben in dem Sinne einen Zugang, dass sie Brüche aus Zahlenkarten bilden und zumindest einige nach der Grösse ordnen können. Allen stehen Entdeckungen offen: Mit fünf Zahlenkarten können 10 echte Brüche (Bruch <1, unterhalb der Diagonalen in Abb. 1) oder 20 unechte Brüche (Bruch >1, Brüche ober- und unterhalb der Diagonalen) gebildet werden. Wenn jede Zahlenkarte zweimal verfügbar ist (Aufgabe c), können insgesamt 25 Brüche gebildet werden (auch Brüche mit Wert 1, alle Brüche).

	1	3	4	7	8
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{8}{7}$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

Abb. 1: Die möglichen Brüche, die gebildet werden können

Die schnellen Schülerinnen und Schüler gelangen bei den Aufgaben b) und c) weiter voran. Die vollständige

Struktur (vgl. Abb. 2) zu entdecken, ist eine Rampe für die ganz Schnellen oder für die Hochbegabten. Letztere sind auch mit der Entdeckung des Terms zur Beantwortung der allgemeinen Frage nach der Anzahl Brüche mit n Zahlenkarten gefordert.

	Bruch <1	Bruch ≠1	Alle Brüche
2 Zahlenk.	1	2	4
3 Zahlenk.	3	6	9
4 Zahlenk.	6	12	16
5 Zahlenk.	10	20	25
6 Zahlenk.	15	30	36
n Zahlenk.	n(n–1):2	$n(n–1)=n^2–n$	n^2
	Dreieck-zahlen	Rechteck-zahlen	Quadrat-zahlen

Abb. 2: Übersicht über die Struktur der Anzahl Brüche, die mit unterschiedlichen Zahlenkarten gebildet werden können.

Zwei *Dokumente aus der Erprobung* zeigen die Bandbreite der zu erwartenden Leistungen.

Abb. 3 ist ein einfaches Beispiel. Die Schülerin beschränkt sich auf Brüche <1. Nachdem sie mit fünf Zahlenkarten alle zehn Brüche gebildet hat, bearbeitet sie die Aufgaben mit sechs Zahlenkarten. Auf der Abbildung sind die 15 gebildeten Brüche, die Ordnung nach der Grösse und die Platzierung auf dem Zahlenstrahl sichtbar.

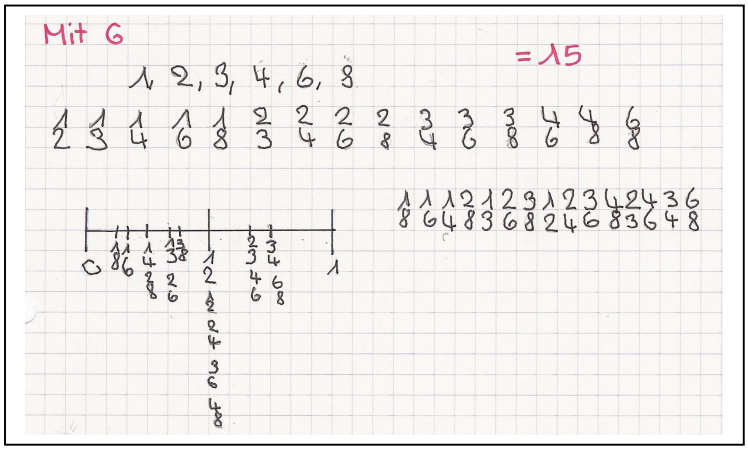


Abb. 3: Einfaches Beispiel aus der Erprobung

Abb. 4 zeigt ein anspruchsvolles Beispiel,

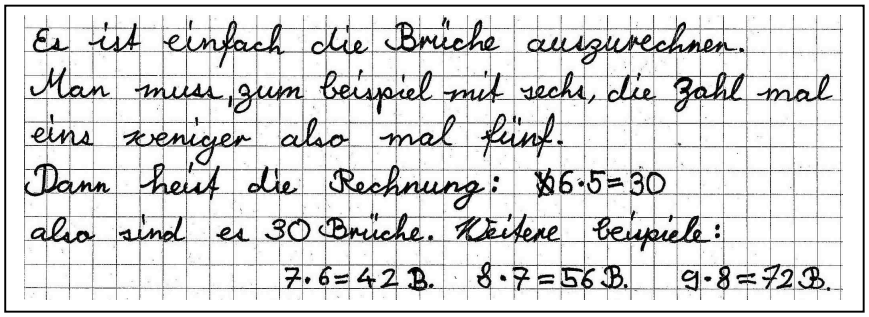


Abb. 4: Anspruchsvolles Beispiel aus der Erprobung

auf dem eine Schülerin die Erkenntnis zur Bildung der Anzahl Brüche ≠1 formuliert. Da sie noch keine Erfahrung im Umgang mit Termen hat, hält sie ihre Feststellung sowohl sprachlich als auch mit einem Beispiel fest.

Drei grundlegende Prinzipien: Natürliche Differenzierung, Nutzung der mathematischen Strukturen, Öffnung des Unterrichts vom Fach her

Die mehrteiligen Aufgaben sind so konzipiert, dass die langsam Lernenden einen Zugang haben und gleichzeitig Anforderungen bereit stehen für die besonders Begabten. Die Kinder können also grundsätzlich auf ihrem je eigenen Niveau arbeiten. Dadurch kann der Unterricht nach dem Prinzip der *natürlichen Differenzierung*, d.h. einer Differenzierung vom Kinde aus, gestaltet werden. Allen Lernumgebungen liegt eine *mathematische Struktur* zu Grunde. Die Nutzung der fachlichen Strukturen erst öffnen den Kindern unterschiedliche Suchrichtungen und ermöglichen eine Bearbeitung der Aufgabe auf verschiedenen Niveaus. Wittmann bringt die Nutzung der Strukturen für entdeckendes und individuelles Lernen in der Mathematik auf den Punkt: «Mathematische Muster dürfen nicht als etwas fest Gegebenes angesehen werden, das man nur betrachten und reproduzieren kann. Ganz im Gegenteil: Es gehört zu ihrem Wesen, dass man sie erforschen, fortsetzen, ausgestalten und selbst erzeugen kann. Der Umgang mit ihnen schliesst also Offenheit und spielerische Variationen konstitutiv ein. Den ‚streng' erscheinenden Regelsystemen der Mathematik wird dadurch die Schärfe genommen, sie lassen Raum für persönliche Sicht- und Ausdrucksweisen und werden zugänglich für die individuelle Bearbeitung. Gleichwohl werden Offenheit und Individualität durch Regeln gezügelt. Es handelt sich um eine Offenheit vom Fach aus» (Wittmann 1996; zitiert nach Wittmann 2003, S. 26). Diese *Öffnung des Unterrichts vom Fach* her entspricht nicht der Öffnung des Unterrichts als organisatorische Massnahme, sondern meint ein Ausschöpfen der pädagogischen Möglichkeiten, die der Mathematik innewohnen.

Literatur

Hengartner, E. (Hrsg., 1999): Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht. Zug: Klett und Balmer.

Hengartner, E.; Hirt, U.; Wälti, B.; Primarschulteam Lupsingen (2006) Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Zug: Klett und Balmer.

Wittmann, E. Ch. und Müller, G. N. (1990/ 1992) Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. (2003) Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht der Grundschule? In: Baum, M. & Wielpütz, H. (Hrsg.) (2003) Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. S. 18-46. Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, E. Ch. und Müller, G. N. (1993-1996 und 2004/05) Das Zahlenbuch, 1. bis 4. Schuljahr. Leipzig: Klett.

Thilo HÖFER, Schwäbisch Gmünd

Funktionales Denken ganzheitlich fördern

Der Begriff der *Funktion* kann mit Hilfe eines Satzes definiert werden. Aber selbst wenn man die Definition kennt, heißt das nicht, dass man die weit reichenden Gebiete des Funktionsbegriffs erkennt (bzw. wirklich erfasst). Diese Weitläufigkeit des Begriffes macht es notwendig, innerhalb eines Forschungsbeitrages den eigenen Standpunkt aufzuzeigen. Dazu wird im Folgenden zunächst einen kurzer Überblick über das Forschungsumfeld gegeben. Dann wird ein Modell für die Sekundarstufe (I und II) entwickelt wird, mit dessen Hilfe sich die Förderung des funktionalen Denkens gezielter planen und analysieren lässt.
Dazu muss man zuerst einmal klären, was man unter dem Begriff des *funktionalen Denkens* eigentlich versteht. Eine formale Definition des Begriffes gibt es nicht. Der vorliegende Beitrag schließt sich der Beschreibung Vollraths (1989, S.6) an: „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang von Funktionen ist". Funktionales Denken beschränkt sich nicht auf den Funktionsbegriff oder auf einzelne Funktionsklassen, die in der Schule gelehrt werden. Eine Schülerin[1] bzw. ein Schüler denkt funktional, wenn sie/er seine Fähigkeiten aus dem *Umfeld* der Funktionen zur Lösung eines gestellten Problems einsetzt.

Mit dieser Beschreibung kann man schon einmal einschätzen, ob eine Person funktional denkt (bzw. *denken kann*). Ebenso gibt sie einen ersten Anhaltspunkt dafür, ob eine Aufgabe funktionales Denken fordert (und fördert). Sie ist allerdings noch viel zu grob, um sie als Analyseinstrument einzusetzen, es bedarf also einer Verfeinerung für den Einsatz in der (Forschungs-)Praxis. Auch dazu findet man Modellvorschläge, von denen ich zwei Typen näher vorstellen möchte.

Vorhandene Modelle

Vollrath (1989, S.9-16) unterscheidet die Betrachtung einer Funktion in drei verschiedene Sichtweisen: Aus der *waagerechten Sichtweise* nimmt man die Funktion als punktweise Zuordnung wahr, die *dynamische Sichtweise* betrachtet die Funktion als dynamischen Prozess und die Funktion als eigenständiges Objekt erkennt man aus der *Sichtweise der Funktion als Ganzes*. Eine ähnliche Begriffsbildung für die beiden erstgenannten Sichtweisen findet man bei Malle (2000, S.8).

DeMarois und Tall (1996) gehen noch einen Schritt weiter, indem sie das Arbeiten mit Funktionen in fünf Stufen/Ebenen („Layers") unterteilen, dar-

1 Im weiteren Verlauf wird nur noch von Schülern gesprochen, gemeint sind hierbei stets auch Schülerinnen, usw.

unter drei die sie auf der Sekundarstufe ansiedeln: *action layer* (entspricht der waagerechten Sichtweise Vollraths), *process layer* (dynamische Sichtweise) und *object layer* (Funktion als Ganzes). *Pre-action layer* (Einsatz von funktionalen Zusammenhängen auf Grundschulniveau) und *process layer* (Fähigkeit zum beliebigen Wechseln zwischen process layer und object layer auf Hochschulniveau) komplettieren die fünf Ebenen.

Ein anderer Zugang zur Beschreibung funktionalen Denkens ergibt sich, wenn man die Darstellung der Funktion innerhalb einer Aufgabe betrachtet. Dabei fällt auf, dass in den meisten Aufgaben ein Übergang zu einer anderen als der in der Aufgabe gegebenen Funktionsdarstellung benötigt wird. Die häufigsten Darstellungen von Funktionen in Aufgaben sind die einer Funktion als Tabelle, Graph, algebraischer Ausdruck (Term) oder die einer bildlich bzw. verbal beschriebenen Funktion. Daraus ergeben sich zwölf mögliche Übergänge zwischen den Funktionsdarstellungen, die sich in einer Matrix nach Swan (1982) zusammenstellen lassen.

Modellentwicklung

Die drei Sichtweisen aus dem erstgenannten Modelltyp differenzieren den Begriff des funktionalen Denkens in sich. Es kann beispielsweise sein, dass eine Person Probleme funktional lösen kann, solange diese sich aus der waagerechten Sichtweise lösen lassen, aber scheitert, wenn die dynamische Sichtweise benötigt wird. Die Übersetzungskompetenzen nach Swan charakterisieren dagegen das funktionale Denken durch die Fähigkeit, Darstellungsübergänge vollziehen zu können.

Viele Forschungsarbeiten bieten Ansätze, wie man das funktionale Denken von Schülerinnen und Schülern verbessern kann[2]. Als Resultat dieser Arbeiten kann ein Lehrer heutzutage aus einer Vielzahl guter Unterrichtssequenzen auswählen, mit deren Hilfe das funktionale Denken gefördert wird. Die Lernerfolge dieser Sequenzen wurden dabei häufig innerhalb eines der beiden genannten Modelltypen begründet. Wie eingangs schon erwähnt wurde, wird es jedoch keine einzelne Unterrichtsidee erreichen können, das funktionale Denken in all seinen Facetten zu schulen. Es fehlt der Lehrkraft daher eine Möglichkeit zur Eingliederung all dieser Ideen in ein Gesamtkonzept, so dass sie eine sinnvolle Auswahl für ihren Unterricht treffen kann, um das funktionale Denken möglichst vielseitig zu fördern. Das im Folgenden vorgestellte Modell soll einerseits helfen, einzelne Unterrichtssequenzen und Übungssaufgaben innerhalb eines Gesamtkonzeptes einzuordnen. Dadurch kann sichergestellt werden, dass die einzelnen Teile keine ungewollten Doppelungen darstellen, aufgrund derer

2 Z.B. innermathematisch in Geometrie (z.B. Ludwig 2004), mit dem Computer (z.B. Müller-Phillipp 2000), fächerübergreifend zum Fach Physik (z.B. Beckmann 2003, Michelsen 2001)

dann die Zeit für das Unterrichten anderer Aspekte des funktionalen Denkens fehlt. Andererseits kann es auch zur Standpunktermittlung dienen, beispielsweise mit dem Ziel, Schüler auf ihrem Stand „abzuholen".

Die Idee des Modells ist es, die Modelle von Vollrath/Malle/DeMarois & Tall einerseits und Swan andererseits zu kombinieren. Die Darstellungsübergänge sind ein zentraler Punkt der meisten Aufgaben, die funktional gelöst werden sollen. Man kann jedoch solche Aufgaben auf verschiedensten Schwierigkeitsgraden entwickeln. Beispielsweise stellt die Aufgabe „Bestimme einige Punkte des Schaubildes der Funktion f mit $f(x)=x^2$ im Bereich $-3 \le x \le 3$ und zeichne sie in ein Koordinatensystem" einen Übergang von algebraischer in graphische Darstellung dar, der eine statische Betrachtungsweise abverlangt. Den gleichen Übergangstyp benötigt man auch bei der Fragestellung „Du sollst das Schaubild von f zeichnen. Überlege dazu zunächst, wie viele Punkte das Schaubild eindeutig festlegen. Bestimme genau so viele Punkte und zeichne dann das Schaubild ein.". Hier muss der Schüler die Entwicklung des Schaubildes bei Veränderung des x-Wertes im Blick haben, also eine dynamische Sicht der Funktion. Aus diesem Beispiel erkennt man, dass die einzelnen Übergänge auch noch auf verschiedenen Ebenen betrachtet werden müssen, die durch die oben genannten Bezeichnungen[3] beschrieben werden. Die Übergangsmatrix von Swan erweitert sich so in die dritte Dimension, es entsteht das folgende Modell, welches im weiteren Verlauf das *Haus des funktionalen Denkens* (Abb.1) genannt wird.

Die einzelnen Quader in diesem Modell stehen somit jeweils für das Erreichen eines „Bausteins" in der Ganzheit des funktionalen Denkens. Je mehr Quader durch eine Person besetzt werden können, umso eher wird sie ein Problem mithilfe dieser Fähigkeiten lösen können und umso stärker ist somit ihr funktionales Denken ausgeprägt.

Einsatzmöglichkeiten des Modells

Wenn man komplexe Aufgabenstellungen mithilfe des Haus des funktionalen Denkens analysiert, so wird man feststellen, dass einerseits mehrere Modellbausteine gleichzeitig angesprochen werden können und andererseits die Lösungswege verschiedener Schüler verschiedene Bausteine beanspruchen könnnen.

Wenn also bei einer Person das Haus des funktionalen Denkens voll besetzt ist, heißt dies nicht automatisch, dass die Person auch tatsächlich alle (funktionalen) Problemstellungen lösen kann, da das Zusammenspiel der einzelnen Komponenten nicht durch das Modell abgebildet wird.

3 In Sekundarstufe I und II: Aktionsebene, Prozessebene, Objektebene

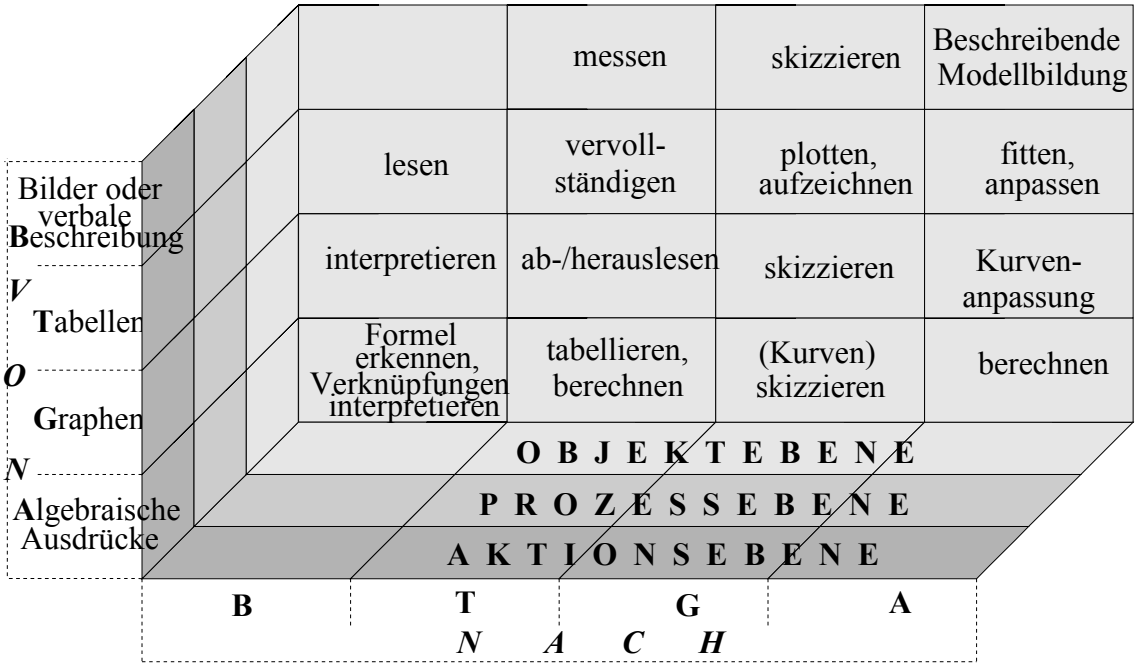


Abb.1: Das Haus des funktionalen Denkens

Andererseits wird eine Person, die auch nur eine der in einer komplexen Aufgabe zwingend benötigten Übergangsfähigkeiten nicht besitzt, diese nicht lösen können. Die Bausteine des Modells können somit als Grundbausteine zum funktionalen Denken aufgefasst werden. Daraus lässt sich erkennen, dass das Haus des funktionalen Denkens nicht als Lernmodell aufgefasst werden kann und darf. Vielmehr ist es ein *grundlegendes* Analyseraster, das sich in der Unterrichtsplanung, der Unterichtsauswertung sowie in der Analyse von Schülerfähigkeiten hilfreich einsetzen lässt.

Literatur:

Beckmann, A.: Fächerübergreifender Untericht, Teil 2 (Physik). Franzbecker Verlag, Berlin 2003.

DeMarois, P.; Tall, D.: Facets and Layers of the Function Concept. In: Proceedings of PME 20, 2, S.297–304, Valencia 1996.

Ludwig, M.: Raumkurven und Schnittflächen – ein Plädoyer für funktionales Denken auch in der Raumgeometrie. In: MU 50 (6), S.16–22, 2004

Malle, G.: Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: mathematik lehren 103 (Funktionen), 2000, S.8–11

Michelsen, C.: Begrebsdannelse med domaeneudvidelse. Syddansk universitetet, Dänemark 2001.

Müller-Philipp, S.: Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht. Waxmann-Verlag, Münster 2000.

Vollrath, H.-J.: Funktionales Denken. In: Journal der Mathematikdidaktik 10, S.3–37, 1989.

Swan, M.: The teaching of functions and graphs. In: Conference on functions, 1–5, S.151-165, Enschede 1982.

Christine HÖRNSCHEMEYER, Rahden

Ein frühzeitiger Zugang zum Variablenbegriff in der Jahrgangsstufe 5

1. Einleitung

Die Einführung des Variablenbegriffs ist eine unverzichtbare, aber auch schwierige Aufgabe im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Besonderes Augenmerk ist darauf zu richten, dass in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler adäquate Vorstellungen konstruiert werden. Die Benutzung geeigneter Lernumgebungen spielt dabei eine wichtige Rolle. Wie vielfältig trotzdem noch Fehlvorstellungen vom Variablenbegriff in den Köpfen von Gymnasiasten sind, dokumentiert Kaune (2005).

Es wird über ein Unterrichtsprojekt aus Rahden berichtet, in dem Fünftklässler in ihren ersten Wochen am Gymnasium einen spielerischen und handlungsorientierten Zugang zu Algorithmen und zum Variablenbegriff erwerben können. Durch geeignete didaktische Materialien wird ein mentales Modell von Variablen und Funktionen erzeugt, das auch ein besseres Verständnis grundlegender Rechengesetze ermöglicht. Dadurch, dass die zugrundeliegenden mathematischen Ideen durch handgreifliche Verfahren und mechanisch funktionierende Maschinen repräsentiert sind, wird schon in diesem Alter eine präzise Debatte über Formalisierung von Wissen ermöglicht. Dies eröffnet Chancen für eine diskursive Unterrichtskultur.

2. Konzeption der Unterrichtsreihe

Die Unterrichtsreihe beruht auf einer weiter reichenden Konzeption, die für die Klasse 7 des Gymnasiums entwickelt wurde und außer dem Variablenbegriff vor allem den Funktionsbegriff aufbaut (Cohors, Kaune, Griep 1995a,b). Der Beginn orientiert sich an dem Textbuch für Schüler, das mittlerweile in der 5. Auflage vorliegt. Die Kinder entwickeln und analysieren zunächst in drei Mikrowelten Algorithmen (Hantieren mit Stäbchen an einer *Registerkiste*, Rechennetze, gebaut mit dem Baukasten *Dynamische Labyrinthe*, Programm für die *Registermaschine*). Welche kognitiven Mechanismen im Wechselspiel mit den drei unterschiedlichen Repräsentationsformen wirken, ist bei Schwank (1993) ausführlich analysiert worden.

Die Analyse von Algorithmen erfolgt zunächst anhand konkreter Zahlenbeispiele. Aber es wird den Schülern schnell intuitiv klar, dass die Befehlsfolge zum Hantieren mit Stäbchen an einer Registerkiste, das Rechennetz und auch das Registermaschinenprogramm unabhängig von den konkreten

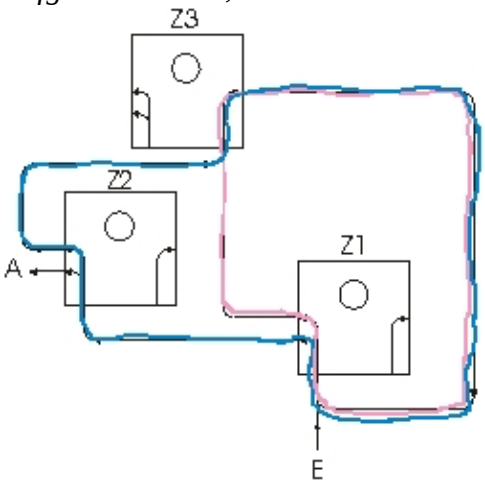
Eingabewerten funktionieren müssen. Dies ist eine geeignete Ausgangslage zur Einführung von Variablen.

3. Abstraktionsprozess: von konkreten Registerinhalten zu Variablen

Im Folgenden wird dargestellt, was Schülerinnen und Schüler im Unterricht des laufenden Schuljahrs schrittweise vorgeschlagen haben und welche methodischen Maßnahmen zur Unterstützung ihrer Denkprozesse dienen. Diese Schritte sind Stufen eines Abstraktionsprozesses zu Variablen.

Als Ausgangslage wird eine umgangssprachliche Beschreibung der Funktionsweise einer Maschine genutzt. Die verbale Beschreibung ist recht umfangreich und aufwändig, so dass die Lernenden die Tupelschreibweise und Verwendung von Variablen als willkommene Abkürzung empfinden.

Aufgabe: Erkläre, was die Maschine tut.



Lösung:

Erst wird in der rosa Schleife alles von Zähler 1 nach Zähler 3 gebracht.
Dann wird in der blauen Schleife alles von Zähler 2 nach Zähler 3 gebracht.
Am Ende steht in Zähler 3 die Summe der Zahlen, die anfangs in Zähler 1 und Zähler 2 standen.

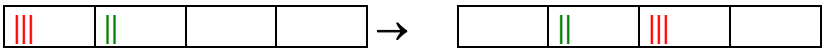
1. Vorschlag:	rosa Schleife:	Z1 → Z3
	blaue Schleife:	Z2 → Z3
	Ergebnis:	Z1 + Z2 in Z3

Dieser Vorschlag löst sich von der grafischen Darstellung. Es bleibt das Problem, dass Inhalt und Speicherplatz (Zähler) nicht unterschieden werden. Dieses löst der

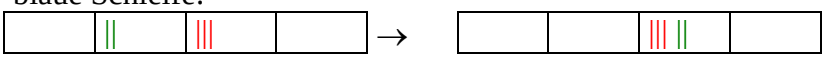
2. Vorschlag:	rosa Schleife:	Inhalt von Z1 → Z3
	blaue Schleife:	Inhalt von Z2 → Z3
	Ergebnis:	Inhalt von Z1 + Inhalt von Z2 in Z3

Diese Beschreibung enthält nach Meinung der Schülerinnen und Schüler noch zu viel Text. Sie schlagen eine vereinfachte Darstellung der Registerkiste mit Strichen für konkrete Zahlen vor.

3. Vorschlag: rosa Schleife:

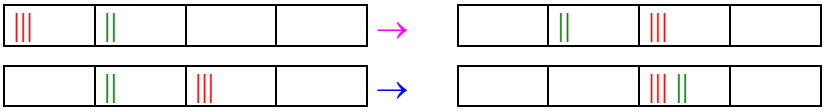


blaue Schleife:



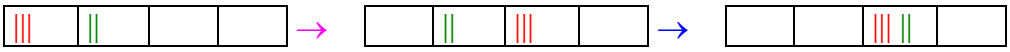
Ein entscheidender Schritt besteht jetzt darin, dass der verbliebende Text in den farbigen Pfeilen symbolisiert wird:

4. Vorschlag:



Das Weiterrechnen wird dann als Verkettung dargestellt.

5. Vorschlag:



Anschließend wird die Klappfolie, wie von Schwank (1993, S. 25) beschrieben und in Cohors-Fresenborg, Kaune & Griep (1995b, S. 33ff) methodisch ausgearbeitet, eingesetzt. Das führt zu folgendem Vorschlag:

$$(3, 2, 0, 0) \rightarrow (0, 2, 3, 0) \rightarrow (0, 0, 3+2, 0)$$

Eine Überprüfung der Korrektheit der Darstellung am Ursprungstext macht deutlich, dass darin nicht von konkreten Registerinhalten die Rede war. Das führt nun zur Einführung von Variablen für die Registerinhalte. Deutlich wird das Wechselspiel zwischen Darstellungen und Vorstellungen:

Vorschläge:

$$(?, ?, 0, 0) \rightarrow (0, ?, ?, 0) \rightarrow (0, 0, ? + ?, 0)$$
$$(x, x, 0, 0) \rightarrow (0, x, x, 0) \rightarrow (0, 0, x + x, 0)$$
$$(x, x, 0, 0) \rightarrow (0, x, x, 0) \rightarrow (0, 0, x + x, 0)$$
$$(e, z, 0, 0) \rightarrow (0, z, e, 0) \rightarrow (0, 0, e + z, 0)$$
$$\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, 0, 0\right) \rightarrow \left(0, \overset{2}{x}, \overset{1}{x}, 0\right) \rightarrow \left(0, 0, \overset{1}{x} + \overset{2}{x}, 0\right)$$

Die erste Zeile greift die Metapher von „Unbekannten“ auf. Für die zweite Zeile waren die Lernenden der Meinung, Mathematiker schrieben für so etwas ein „x“. Das Weglassen von Farben in der dritten Zeile macht deutlich, dass in den ersten beiden Zeilen unbemerkt noch etwas symbolisiert war. Die vierte Zeile löst das Problem vorsichtshalber „doppelt“: durch farbige Buchstaben, wobei „**e**“ für „erstes Register“ und „**z**“ für „zweites Register“ steht. In der fünften Zeile werden die Ideen aus der dritten und vierten Zeile kombiniert. Von hier ist es nur noch ein kleiner Schritt zu

$$(x_1, x_2, 0, 0) \rightarrow (0, x_2, x_1, 0) \rightarrow (0, 0, x_1 + x_2, 0)$$

Die Analyse von Algorithmen in den drei Mikrowelten mit Hilfe der Tupelschreibweise und damit der Umgang mit Variablen wird nun in vielfältiger Weise geübt. Anschließend entwickeln und analysieren die Schüler und Schülerinnen immer komplexere Algorithmen, z.B. für folgende Funktionen, die der Vorbereitung des Distributivgesetzes dienen:

$$(x_1) \rightarrow (2\,x_1), \quad (x_1, x_2) \rightarrow (2(x_1 + x_2)), \quad (x_1, x_2) \rightarrow (x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 2)$$

4. Der Einfluss des Konzeptes auf Motivation und Unterrichtskultur

Es hat sich erwiesen, dass die Unterrichtsreihe sehr motivierend für die Schülerinnen und Schüler ist, denn

- alle fangen mit den gleichen Voraussetzungen an;
- die Unterrichtsreihe erfüllt die Erwartungen, dass am Gymnasium etwas ganz Neues und Anspruchsvolles beginnt;
- die Rollenspiele an der Registerkiste, die Arbeit mit den Baukästen und die Arbeit an der Registermaschine sind sehr beliebt.

Außerdem prägt die Unterrichtsreihe auf ganz entscheidende Weise die Unterrichtskultur gleich zu Beginn der Jahrgangsstufe 5. Kaune (2001, S. 15-21) hat sowohl dargestellt, wie die hier vorgestellten Mikrowelten zum Aufbau eines Funktions- und Variablenverständnisses beitragen, als auch die mit ihnen verbundenen Möglichkeiten zur Einübung einer diskursiven Unterrichtskultur. Nach den Unterrichtserfahrungen aus Rahden unterstützt die Konzeption:

- dass die Lernenden relativ komplexe Prozesse analysieren und dabei verschiedene Analysetechniken erlernen: Arbeit mit Skizzen und farbigen Stiften (Kennzeichnen, Strukturieren), verbales Analysieren und Anwendung der Funktionsschreibweise;
- die Einsicht, dass es unabhängig vom Lehrer ist, ob eine Handlungsanweisung funktioniert, sondern allein abhängig ist von der Syntax und der Semantik;
- dass die Objektebene verlassen wird, und auch auf der Metaebene diskutiert wird;
- dass die Schüler sich auf die Lösungen und Denkweisen ihrer Mitschüler einlassen;
- dass die Lernenden argumentieren, begründen lernen;
- dass die Lernenden begreifen, dass Fehlersuche ein wichtiger Denkprozess ist.

Damit wird in einer für die Schülerinnen und Schüler sehr motivierenden Spielwelt der Grundstein für die Herausbildung wichtiger Kompetenzen im Mathematikunterricht gelegt.

6. Literatur

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. & Griep, M. (1995a): Einführung in die Computerwelt mit Registermaschinen. Textbuch für Schüler. (5. überarbeitete Auflage). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. & Griep, M. (1995b): Einführung in die Computerwelt mit Registermaschinen. Handbuch für Lehrer. (4. überarbeitete Auflage). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kaune, C. (2001): Merkmale eines konstruktivistischen Unterrichtsskripts und eine Analyse dazugehöriger Lehr- und Lernprozesse. *Der Mathematikunterricht*, 47(1), 14-34.

Kaune, C. (2005): Acht Jahre MUMAS - Eine Recherche in 1000 Unterrichtsszenen zum Variablenverständnis von Gymnasiasten. In Kaune, C., Schwank, I. & Sjuts, J. (Hg.): Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge. Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens, 131-151. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (1993): Verschiedene Repräsentationen algorithmischer Begriffe und der Aufbau mentaler Modelle. *Der Mathematikunterricht*, 39(3), 12-26.

Hans Niels JAHNKE, Essen

Beweise und Hypothesen

Beweise und empirisches Denken

Empirische Studien und Unterrichtserfahrungen zeigen, dass für viele Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I Beispiele und Messungen eine höhere Überzeugungskraft haben als ein mathematischer Beweis (z. B. Healey & Hoyles o. J.). Die Befunde bedürfen im Einzelnen einer sorgfältigen Analyse, sie belegen aber eine starke empirische Bindung des Denkens in dieser Alterstufe.

In der Literatur besteht die Tendenz, derartige Erscheinungen als „Fehlvorstellungen" einzuordnen. Sie lassen sich aber als sinnvolle Verhaltensweisen interpretieren, wenn man das Denken der Schülerinnen und Schüler mit dem von Physikern vergleicht, für die eine mathematische Deduktion ohne experimentelle Überprüfung auch nicht ausreichen würde, um ein Phänomen als existent zu akzeptieren. Daher sollte man im Unterricht nicht mit Normen für die Sicherheit mathematischen Wissens operieren, die im Widerspruch zu diesen gedanklichen Voraussetzungen stehen. Insbesondere läuft die häufige Erklärung ins Leere, Messen erfasse nur endlich viele Fälle, wenn man einen Sachverhalt für alle Objekte sichern wolle, müsse man ihn beweisen. Im Fall der Geometrie, die ja doch empirische Aussagen macht, widerspricht das auch Normen, die in den experimentellen Fächern vermittelt werden.

Ansätze zu einer genetischen Konzeption

In diesem Vortrag soll ein genetischer Zugang zum Beweisen vorgeschlagen werden, der das empirische Denken nicht beiseite zu schieben versucht, sondern es ernstnimmt und gerade dadurch die Kraft des theoretischen Denkens zeigt (Jahnke 1978). Er würde drei Phasen umfassen: 1. Phase der Gedankenexperimente (Klasse 1+), 2. Phase des hypothetisch-deduktiven Denkens (Klasse 7+), 3. Phase autonomer mathematischer Theorien.

Die 1. Phase beinhaltet die „präformalen" (Kirsch 1979), „inhaltlich-anschaulichen" (Wittmann & Müller 1988) und „erklärenden Beweise" (Hanna 1989) und ist z. B. durch die Materialien des Projekts mathe 2000 in der Grundschule und in den unteren Klassen der SI gut implementiert.

Der Begriff der Phase wird in Ermangelung eines besseren benutzt. Er soll eine erste, an den Rändern unscharfe Ordnung des Feldes ermöglichen. Phasen gehen ineinander über, insbesondere wird in einer späteren Phase nicht obsolet oder überwunden, was in einer früheren Phase im Mittelpunkt

steht. Präformale oder inhaltlich-anschauliche Beweise spielen auf allen Levels des mathematischen Denkens, auch in der mathematischen Forschung, eine wichtige Rolle.

In der 2. Phase ab Klasse 7 wird der Begriff des Beweisens explizit thematisiert. Dann muss man auch von Theorien sprechen, ohne mit einer fertigen Systematik zu arbeiten. Geeignet ist Freudenthals Konzeption des „Lokalen Ordnens“, allerdings mit Modifikationen. Das Problem des Messens sollte nicht in eine allgemeine Rede von Anschaulichkeit verflüchtigt werden, sondern wenn gemessen wird, sollte es auch tatsächlich um empirische Theorien gehen. Dazu müssen Zusammenhänge geometrischer Sachverhalte aufgebaut werden, die für die Schüler überschaubar sind und in denen Deduktionen und Messungen organisch integriert sind.

Die 3. Phase der Autonomisierung würde dem entsprechen, was man als ausgebildeter Mathematiker unter einem Beweis versteht. Ob dies in der Schule angestrebt werden sollte und überhaupt erreichbar ist, soll hier offen bleiben.

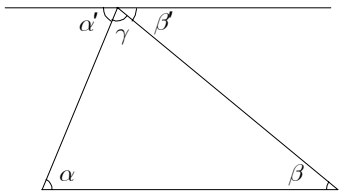
Im folgenden geht es um die 2. Phase. Immer wieder wird vorgeschlagen, dass man das Beweisen in der Mathematik mit Begründungsverfahren in anderen Disziplinen und Gebieten (von der Physik bis zur Jurisprudenz) in Zusammenhang bringen sollte. Dies wird im allgemeinen aber nur als Folie benutzt, um davon das „eigentlich mathematische Beweisen“ abzugrenzen. Statt dessen ginge es aber um Verknüpfung und Einbettung. Ein geeigneter Rahmen ist die für das wissenschaftliche Denken fundamentale Idee der *Hypothetisch – deduktiven Methode*. Durch eine Deduktion werden Konsequenzen aus einer Hypothese abgeleitet, die dann am Material überprüft werden. Diese Grundstruktur verbindet die Argumentationsweise des Physikers mit der des Soziologen, des Sprachwissenschaftlers und eben auch des Mathematikers.

Macht man damit ernst, dann tritt der klassische Begriff der Hypothese in den Mittelpunkt. Beweisen wird aufgefasst als Untersuchung von Hypothesen, die man auf ihre Konsequenzen hin befragt. Damit bringt man das Modellieren und Beweisen in einen engen Zusammenhang. Ein wichtiger Aspekt dieses Ansatzes ist es, dass die Begriffe „Beweis“ und „Hypothese“ nicht nur Konzepte der Hintergrundsphilosophie der Lehrperson sind, sondern ab Klasse 7 explizit im Unterricht benutzt und eingeübt werden.

Beispiel: Winkelsumme im Dreieck

Der Satz über die Winkelsumme im Dreieck wird in seiner Bedeutung häufig unterschätzt. Er muss aber zu den „tiefen“ Sätzen der Schulmathematik gerechnet werden. Er ist nicht offensichtlich, fundamental für die Geomet-

rie und steht paradigmatisch für die größte erkenntnistheoretische Revolution in der Geschichte der Mathematik. Es lohnt sich, ihn im Unterricht zu „inszenieren“.

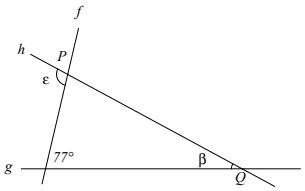


Zu Recht wird in fast allen Schulbüchern der in der Figur angedeutete Beweis mitgeteilt. Er führt den Satz auf die Gleichheit von Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen zurück. Letzterer Sachverhalt wird meist abbildungsgeometrisch ‚bewiesen', und zwar in einer Weise, dass ‚Widerspruch unmöglich' ist. Offenbar soll den Schülern der Eindruck vermittelt werden, dass durch einen mathematischen Beweis ein besonders hohes Maß an Gewissheit erreichbar ist. Nach dem oben Gesagten, muss das als kontraproduktiv betrachtet werden.

Die Kernidee des im folgenden skizzierten Vorschlags besteht darin, den Wechselwinkelsatz nicht als einen bewiesenen Satz (woraus?) zu präsentieren, sondern als eine „empirisch fundierte Hypothese“ und damit die empirische Gültigkeit der euklidischen Geometrie zu thematisieren.

Schritt 1: Arbeitsauftrag
Die Gerade *h* dreht sich gegen den Uhrzeigersinn um *P*. Miss für einige Positionen von *h* die Winkel β und ε und stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Notiere Deine Beobachtungen.

Die Schüler beobachten: *Q* wandert immer weiter nach außen. ε und β werden immer kleiner. β ist gleich der Abweichung des Winkels ε von 77°. Es gibt mindestens eine Position von *h* (Q ganz weit außen im „Unendlichen“), bei der $\varepsilon = 77°$. *h* und *g* werden sich in dieser Position nicht schneiden. Es ist plausibel, dass die Eigenschaft von β, die Abweichung des ε von 77° zu messen, auch im Unendlichen gilt, also $\beta = 0$. Das können wir aber nicht überprüfen. Das legt den Wechselwinkelsatz als empirische Hypothese nahe.



Schritt 2: Aus dem Wechselwinkelsatz lässt sich der Winkelsummensatz herleiten. Wir prüfen ihn durch Messung nach. Die Messung nehmen wird ernst, d. h. wir arbeiten mit großen, sorgfältig gezeichneten Dreiecken und notieren alle Messergebnisse, aus denen wir den Durchschnitt berechnen. Wir haben nun zwei Werte für die Winkelsumme, den aus der Hypothese deduzierten und den von den Schülern gemessenen Wert.

Schritt 3: Die Schüler erforschen durch Messen und Schlussfolgern das Feld aller (einfachen) Polygone. Das ist für sich eine spannende Aktivität.

Am Schluss steht der deduktive Beweis, dass die Winkelsummen der Polygone von der Winkelsumme des Dreiecks abhängen. Die Abhängigkeiten der verschiedenen Aussagen werden in einem Baum visualisiert, um den Einfluss der Hypothese des Wechselwinkelsatzes zu verdeutlichen.

Schritt 4: Es wird die Winkelsumme eines 10-Ecks prognostiziert, einmal mit dem Wert 180°, zum anderen mit dem unter Schritt 1 gewonnenen Messwert für die Winkelsumme des Dreiecks. I. A. wird das zu dem Ergebnis führen, dass der Messwert als wahrer Wert nicht haltbar ist. Dennoch ist damit der Wert 180° nicht endgültig bestätigt, sondern bleibt eine Hypothese.

Schritt 5: Es wird eine Information zur Geschichte des Parallelenaxioms und der Versuche, es durch Messen der Winkelsumme des Dreiecks zu verifizieren, gelesen und besprochen.

Durch Unterrichtsreihen, die die ganze SI begleiten (s. Beitrag von M. Kleinheinrich zur Anomalie der Sonnenbahn), sollte die Abhängigkeit zwischen Aussagen und Hypothesen immer wieder thematisiert werden. Letztlich sollte das zu einem fächerübergreifenden Modul „Wissenschaftliches Argumentieren“ führen. In diesen wäre das mathematische Beweisen sinnvoll integriert.

Literatur

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In: *Proceedings of the Thirteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, pp. 45-51). Paris: PME.

Healy, L., & Hoyles, C. (o. J.). Curriculum Change and Geometrical Reasoning. In P. Boero (Ed.), *Theorems in School* (pp. to be published). Dordrecht: Kluwer.

Jahnke, H. N. (1978). *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem*. Bielefeld: Universität Bielefeld.

Kirsch, A. (1979). Beispiele für prämathematische Beweise. In W. Dörfler & R. Fischer (eds.), *Beweisen im Mathematikunterricht* (pp. 261-274). Klagenfurt.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis. In P. Bender (ed.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (pp. 237-257). Berlin: Cornelsen.

Helga JUNGWIRTH, München

Implizite Botschaften: Software und Normen

Der Einsatz des Computers ist ein zentrales Thema in der Mathematikdidaktik. Bei seiner Behandlung dominiert eine letztlich wissensbezogene Perspektive; d.h. der Angelpunkt ist die Bedeutung des Computers für das Lernen eines Wissensbestandes namens Mathematik. Auch die Forschung zum Mathematiklernen ohne Computer hat das Lernen von Mathematik als Bezugspunkt. In zunehmenden Maß richtet sich die Aufmerksamkeit aber auch explizit auf das, was noch „mitgelernt“ oder „mitgelehrt“ wird in der unterrichtlichen Praxis: auf Werte und Normen. In meiner Forschung interessiere ich mich für die Normen, die mit Programmen für den Mathematikunterricht verbunden sind. Vorgestellt werden in diesem Beitrag erste Ergebnisse.

Theoretischer Ansatz und empirisches Vorgehen

Ausgangspunkt ist die in der Techniksoziologie vertretene und als Social Constructivism of Technology bezeichnete Auffassung von der sozialen Formung der Technik (Bijker & Law, 1992). Das bedeutet, dass auch Computerprogramme (verdeckt) gesellschaftliche Strömungen und Grundeinstellungen transportieren. Als Normen können die gesellschaftlichen Gegebenheiten insofern verstanden werden, als sie Erwartungen produzieren (vgl. Okruch, 1999). Grundlage der Begriffsverwendung ist also nicht die rechtsphilosophische Sicht - Norm als Ausdruck dessen, was sein soll -, sondern eine pragmatische, die dem Weltverständnis der interpretativen Soziologie entspricht (Idealität des Und-So-Weiter bei der handlungsmäßigen Konstitution der Gesellschaft). „Programm“ meint das Gesamt aus Prozeduren und „praktischen Erklärungen“. Letztere werden analog gesehen zu den ebendort, in der interpretativen Soziologie, angenommenen, stets ins menschliche Tun integrierten Darstellungen, von dem, was gerade Sache ist. Hier fallen darunter computerseitige Dialogelemente, Funktionserklärungen und Hilfen bis hin zu Handbüchern.

Untersucht wurden die deutschsprachige Version von Derive und das österreichische elektronische „Schulbuch“ (Lernprogramm) MathSchool-Help21 mit dem Trägerprogramm Mathematica. Für das Zur Verfügung Stellen sei den Verlagen, Herausgebern und Autoren herzlich gedankt. Grundlage der Analyse sind erstens Texte, die - direkt am Computer oder in Buchform - bereits vorlagen, und zweitens Texte, die in der Arbeit mit den Programmen erst generiert werden mussten, denn ein Computerprogramm erschließt sich auch in Hinblick auf die gegebene Fragestellung

zum Teil zumindest erst in der Nutzung.

Forschungsmethodisch ist es eine Arbeit im Stil der Interpretativen Unterrichtsforschung, die ja immer schon mit ihren Auslegungsverfahren versucht, „latente Sinnstrukturen“ in Texten aufzudecken (u.a. Jungwirth, 2005). Aus Platzgründen kann an der Stelle die hermeneutisch orientierte Analyse bloß angedeutet werden. Basis der Ergebnisse sind vor allem Einführungen für Anfänger.

Die Natur der Programme

„Es ist ein hervorragendes Werkzeug, um Mathematik zu betreiben ...“ (Kutzler & Kokol-Voljc 2004, Einleitung): Bemerkenswert ist hier der Ausdruck „Werkzeug“. Das Programm wird eingereiht in die Gerätschaften auch aus der vorelektronischen Zeit, die den Menschen im Laufe der Geschichte ihre Verrichtungen erleichterten oder erst möglich machten. Die Mathematikprogramme sind „Zeug“ also, um mit Heidegger zu sprechen; d.h. unproblematisch und nicht im Fokus während des Gebrauchs.

„Bin ich ein Term? *Mathematica* hilft dir bei der Suche.“ (Cyrmon, Gsaller & Wilding 2004, Lerneinheit „Terme“): Hilfe Geben bedeutet immer auch einen Gestus der Überlegenheit. Das trifft auf Programme stets zu, doch in den Selbstdarstellungen, die sich an ein breites und vor allem professionelles Publikum wenden (siehe erstes Zitat), wird trotzdem ihr Assistenzcharakter betont und damit die bestimmende Rolle den Nutzenden zugewiesen. Im Lernprogramm wird nun mit dem Ausdruck Helfen das Verhältnis zwischen Nutzenden und Mathematikprogramm umgekehrt: Das Programm wird gleichsam zur guten Fee, die man herbeirufen kann, wenn man nicht mehr weiter weiß.

Fehlermeldungen

Die Nutzenden werden mit präzisen Feststellungen konfrontiert, die aber gleichzeitig auch wieder vage sind. Die Mathematikprogramme geben den Nutzenden nicht alle Informationen, die diese brauchen, um weiter handeln zu können. Mit Blick auf den sozialen Gehalt bedeutet das, dass ein wissensmäßiges Gefälle errichtet wird. Wenn die Nutzenden die Fehlermeldungen richtig lesen können, wird es wieder aufgehoben. Lesen können sie diejenigen, die soviel Expertinnen sind wie die Verfasser. Die Programmiererinnen schreiben somit für Ihresgleichen und zeigen einander ihre Kompetenz.

Bedienung

„MATHEMATICA: Eine zehnminütige Einführung ... Sie stellt Ihnen die

Grundlagen vor, mit denen Sie vertraut sein müssen, ... Um mit Mathematica umzugehen, tippen Sie einfach Ihre Eingaben ...“ (Mathematica Help Browser). „Der Wunsch, DERIVE schnell und leicht zugänglich zu machen, insbesondere für Lehrer, hat zu diesem Buch geführt.“ (Kutzler & Kokol-Voljc 2004, Vorwort): „Schnell und leicht“ ist die Devise, wenn es um die Bedienung der Programme bzw. um deren Erlernen geht. Gerade einmal zehn Minuten sind etwa für die Einführung in das laut späterer Eigenaussage sehr elaborierte Mathematica veranschlagt, und „einfach“ ist auch das Eingeben selbst. Betont wird das in dem obigen Zitat noch durch das Verb „tippen“. Die u.a. mögliche Alternative „Formulieren Sie Ihre Eingaben“ würde im Vergleich einen aufwändigeren Prozess anzeigen. Die Programme fügen sich also in eine Welt, in der maximales Ergebnis bei minimalem Aufwand zählt.

Eingabemöglichkeiten

„Mit Part [m,i,j] kann auf das Element der i-ten Zeile und der j-ten Spalte der Matrix m zugegriffen werden. Die Kurznotation m[[ij]] liefert dasselbe.“ (Mathematica Help Browser). „Der Bruch 23/45 soll hoch 5 gerechnet werden. ... Markiere 23, dann auf BasicInput Palette ... Für Eilige! Die herkömmliche Eingabeart ...“ (Cyrmon, Gsaller & Wilding, 2004): Sofort werden Alternativen für eben genannte Eingabearten angeführt. Den Nutzenden die Wahl zu geben, ist offenbar ein wichtiges Moment. Doch wer von den Anfängern, an die sich solche Texte richten, sollte eine fehlende reklamieren? Nur Expertinnen haben das nötige Wissen. Somit läßt sich wieder eine Demonstration von Kompetenz von Experten für Experten rekonstruieren.

Gesellschaftliche Bezüge

Die Programme präsentieren sich als Kinder der Ersten Moderne (Beck & Bonß, 2001). In Gesellschaften dieses Typs erscheint die wissenschaftlich-technische Durchdringung der Welt nicht nur machbar, sondern auch kontrollierbar. Auf diesen Zugang deutet in den Programmdarstellungen der Umstand hin, dass nur von einer lokal begrenzten, zur Gänze vorab überschaubaren Wirkung ausgegangen wird. Im Zusammenhang mit dem Unterrichtseinsatz von Derive wird zwar die Veränderung des Mathematikunterrichts durchaus angesprochen, aber der Ausblick bezieht sich auf die Verschiebung der Gewichte der verschiedenen mathematischen Tätigkeiten allein. Im Lernprogramm kommen Kindheitsvorstellungen der Ersten Moderne (James & Prout, 1997), insbesondere die Irrationalität, zum Ausdruck. Der Verweis auf die Leichtigkeit und Schnelligkeit der Bedienung lässt die gängige Lösung der heutigen Gesellschaft für das Problem des

Transfers von Ergebnissen von einem Teilsystem in ein anderes erkennen: die Verpackung in leicht nutzbare black boxes (Maaß & Schlöglmann, 1988). Die Differenz zwischen den (Programm)experten und den (Bedienungs)laien wird nicht nur besonders markiert, sondern durch den Vorrang des wissenschaftlichen Wissens auch hierarchisiert. Das Anführen von jeweils mehreren Eingabemöglichkeiten verweist auf einen Aspekt der heutigen Gesellschaft, den Gross (1994) unter dem Begriff der Multioptionsgesellschaft abhandelt: Zu allem, was existiert, gibt es noch Mehr und Besseres, das auch allen Menschen zugänglich werden soll.

Relevanz der Ergebnisse

Bedeutung im didaktischen Zusammenhang bekommt die vorliegende Analyse dadurch, dass Normen ihrer Selbstverständlichkeit entkleidet werden. Mit den Ergebnissen wird gleichsam eine Sprache zur Verfügung gestellt, die die Artikulation gesellschaftlicher Bezüge erlaubt.

Literatur

Beck, U. & Bonß, W. (Hrsg.) (2001). *Die Modernisierung der Moderne*. Frankfurt: Suhrkamp

Bijker, W. & Law, J. (1992). General introduction. In: Bijker, W. & Law, J. (Hrsg.), *Shaping Technology / Building Society. Studies in Sociotechnical Change*. Cambridge/Mass.: The MIT Press, S. 1-14

Cyrmon, W. Gsaller, G. & Wilding, H. (2004). MATHSCHOOLHELP21. Linz: VERITAS-Verlag UNI SOFTWARE PLUS (3. Auflage)

Gross, P. (1994). Die Multioptionsgesellschaft. Frankfurt. Suhrkamp

Jungwirth, H. (2005). Interpretative Mathematikdidaktik - Methodisches und Methodologisches am Beispiel von Normen im Mathematikunterricht. In: *Tagungsband zum 4. Workshop zur Qualitativen Inhaltsanalyse in Klagenfurt 2004*. http://psydoc.sulb.uni-saarland.de/portal/ Klagenfurt/

Kutzler, B. & Kokol-Voljc, V. (2004). *Einführung in Derive 6. Der Mathematik Assistent für Ihren PC*. Hagenberg: Soft Warehouse GmbH & CoKG

Maaß, J. & Schlöglmann, W. (1988). Black Boxes im Mathematikunterricht. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 1/2, S. 123-147

Okruch, S. (1999). Innovation und Diffusion von Normen. Grundlagen und Elemente einer evolutorischen Theorie des Institutionenwandels. Berlin: Duncker & Humblot

James, A. & Prout, A. (Hrsg.) (1997): *Constructing and Reconstructing Childhood*. London/Washington: Falmer Press

Rainer H. KAENDERS, TU Delft und Radboud Universität Nimwegen

Kräne und Lemniskaten

Einleitung. Kräne üben nicht nur durch ihre Nützlichkeit sondern auch in ihrer Ästhetik große Faszination auf Menschen aus. In den zwanziger und dreißiger Jahren des letzten Jahrhunderts entstand durch den aufkommenden Stahlbau eine Vielzahl immer neuer Krankonstruktionen, bei denen sich die transportierte Last auf einer horizontalen Bahn bewegt ([7], [5]). Nun ist *horizontal* für einen Ingenieur etwas anderes als für einen Mathematiker; tatsächlich erreichen manche Krankonstruktionen nur für die Praxis hinreichend horizontale Lastwege ('level luffing'). Schon bei *Turm- und Portalkränen* liegt dem horizontalen Lastweg eine zwar einfache aber nicht offensichtliche Idee zugrunde, die oft mit einem Flaschenzug kombiniert wird. Krankonstruktionen wie der *Einziehdrehkran mit Ellipsensteuerung* – im folgenden kurz *Ellipsenkran* genannt – erreichen ihren horizontalen Lastweg auf besonders elegante Weise, wie mithilfe elementarer Geometrie erklärt werden kann. Mathematisch besonders interessant wird es beim *Einziehdrehkran mit Lemniskatenlenker* oder *Floating lemniscate crane* – im folgenden kurz *Lemniskatenkran* genannt.

Hier soll ein relevanter und tatsächlich vorkommender Kontext skizziert werden, der das Studium und die Anwendung von zugrundeliegenden geometrischen Konzepten fördern und motivieren kann. Dieser Kontext bietet eine reiche Quelle interessanter geometrischer Fragestellungen auf jedem Niveau und kann daher an verschiedenen Stellen im Unterricht herangezogen werden. Im Gegensatz zu Kontexten, die speziell für die Schule geschaffen wurden, setzen Ingenieure diese Anwendung von Geometrie wirklich ein, wie man zum Beispiel in jedem großen Hafen sieht.

Es gibt die folgenden Unterrichtserfahrungen zu diesem Thema: zwei halbjährliche Schülerkurse an der Universität Nimwegen (2003 und 2004), *wiskunde b-dag 2004* des Freudenthal Instituts [12], CWI Ferienkurs für Mathematiklehrer 2005 [6], Erfahrungen des Autors am Canisius College Nimwegen (9. Schuljahr und 'profielwerkstuk'). In diesem Jahr ist ein Schülerkurs im internationalen Känguruh Mathe-Camp in Eberswalde geplant (einschließlich Besuch bei [8]).

In diesem kurzen Beitrag möchten wir beispielhaft den Reichtum dieses Kontexts verdeutlichen. Dies tun wir anhand der Konstruktion des Parallelkrans und der Lage der Doppelpunkte von Koppelkurven mit denensprechenden Folgerungen für Kräne. Weitere Beispiele, Hintergründe und Literaturangaben finden sich in [6] (siehe auch [13]).

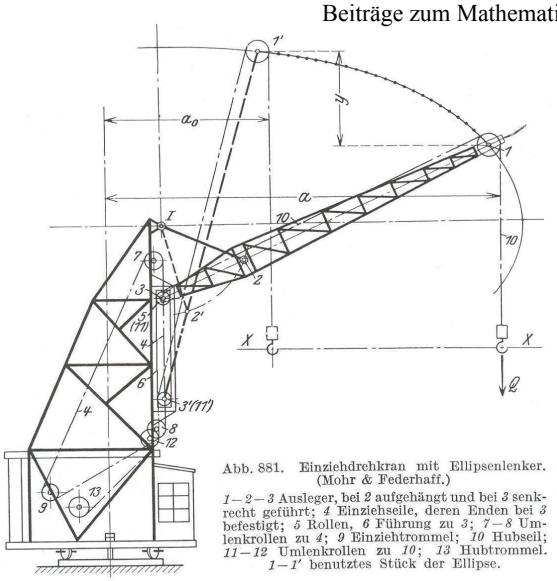


Abb. 881. Einziehdrehkran mit Ellipsenlenker. (Mohr & Federhaff.)
1—2—3 Ausleger, bei *2* aufgehängt und bei *3* senkrecht geführt; *4* Einziehseile, deren Enden bei *3* befestigt; *5* Rollen, *6* Führung zu *3*; *7—8* Umlenkrollen zu *4*; *9* Einziehtrommel; *10* Hubseil; *11—12* Umlenkrollen zu *10*; *13* Hubtrommel. *1—1'* benutztes Stück der Ellipse.

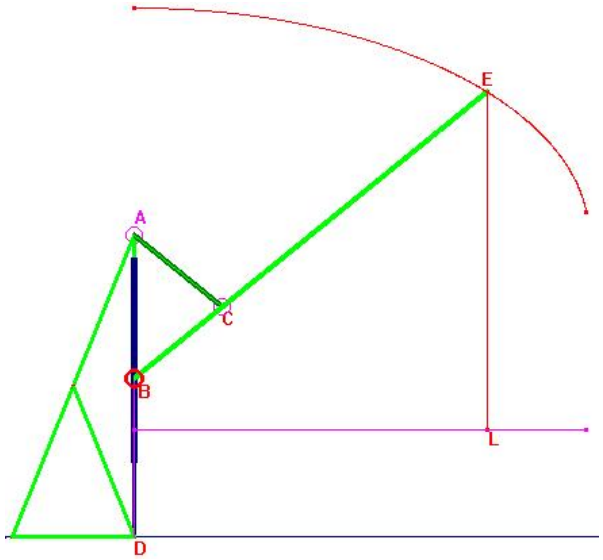


ABBILDUNG 1. Einziehdrehkran mit Ellipsenlenker. Technische Zeichnung aus [5] und *applet* aus [12]. Punkt B bewegt auf und ab und es gilt: $|AC|=|BC|=\frac{1}{4}|BE|$. Das Seil verläuft entlang von D-B-E-L.

Hintergrund. In den Niederlanden hat die zuständige Ministerin im Jahr 2005 in den vier mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern und der Informatik sogenannte *Erneuerungskommissionen* zur Erstellung neuer Lehrpläne für das Jahr 2010 eingesetzt. Das verbindende Element dabei soll die sogenannte 'Kontext-Konzept Herangehensweise' (siehe z.B. [3]) sein. Für uns in der Mathematikkommission [9] fallen – nach jahrelanger allzu großzügiger Interpretation von 'Realistic Mathematics Education' – sicherlich auch rein mathematische Kontexte, wenn sie für die Schüler Bedeutung haben und sich durch vielfältige Beziehungen zu anderen, eventuell ebenfalls mathematischen, Kontexten auszeichnen, unter den hier gemeinten Kontextbegriff. Neben diesen sollen aber auch den Schülern vertraute praktische und angewandte Kontexte eine Rolle spielen. Der Kontext *Kräne mit horizontalem Lastweg* bietet hierfür beispielhaft fachlich sinnvolle Möglichkeiten.

Ellipsenkran. Der *Ellipsenkran* ist eine Krankonstruktion, die in den unteren Klassen der Sekundarstufe als wirkliche Anwendung elementarer Geometrie betrachtet werden kann. Wir überlassen es dem Leser, anhand der Abbildung 1 herauszufinden, warum bei dieser Konstruktion, die Last am Ende des Seils mathematisch horizontal verläuft.

Gelenkvierecke und Koppelkurven. Das Studium von Gelenkvierecken ist wiederholt für den schulischen Mathematikunterricht vorgeschlagen und realisiert worden (siehe etwa [4], [1] oder [11]). Hieran kann die Betrachtung sogenannter *Koppelkurven* angeschlossen werden. Dabei handelt es sich um Kurven die entstehen, wenn man ein Gelenkviereck M-Q-B-A gegeben hat, bei dem die Punkte M und Q fest montiert sind (*Pivotpunkte*), und man dann die Spur eines relativ zu den Punkten A und B festen Punktes C betrachtet.

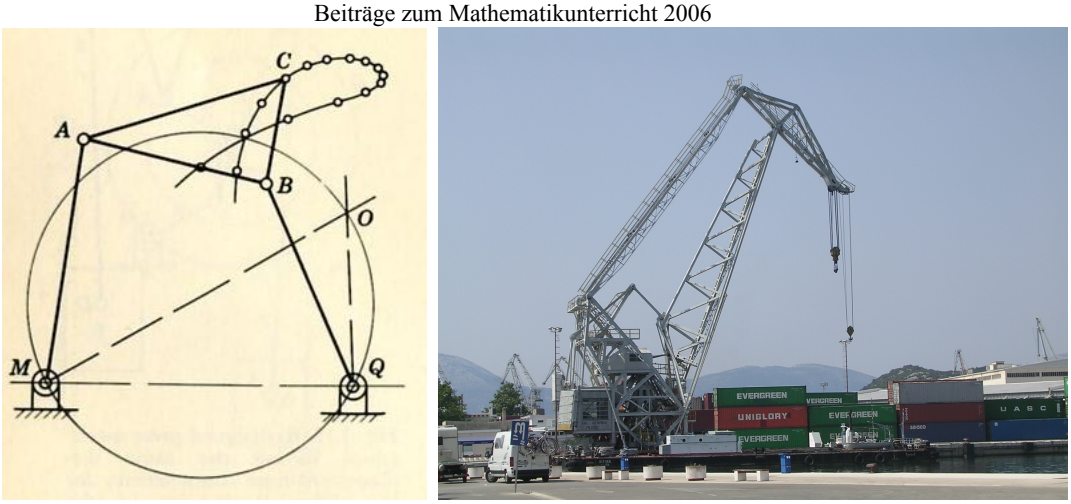


ABBILDUNG 2. Pivotkreis und Lemniskatenkran (Foto Fred Muijrers)

Man kann sich C als die Spitze eines Dreiecks $\triangle ABC$ vorstellen, das fest mit der sogenannten *Koppelstange* (das ist die Stange AB) verbunden ist und sich mit der Koppelstange bewegt. (siehe Abbildung 2)

Auch eine solche allgemeine Klasse von Kurven ist noch zugänglich für elementare Geometrie. Bestimmt man zum Beipiel den Punkt O, bei dem das Dreieck $\triangle MQO$ dem Dreieck $\triangle ABC$ ähnlich ist, dann nennt man den Umkreis des Dreiecks $\triangle MQO$, den *Pivotkreis*. Ein elementarer geometrisch zu beweisender Satz besagt, dass die Doppelpunkte einer Koppelkurve, falls vorhanden, sich immer auf diesem Pivotkreis befinden.

Lemniskatenkran. Bei einer grossen Klasse von Kränen, den *Lemniskatenkränen*, beschreibt die bewegte Last eine solche Koppelkurve. (Bei manchen Wippkränen auch die Seilausgleichsrolle.) Hierbei handelt es sich meistens um Koppelkurven, bei denen das Dreieck $\triangle ABC$ zu einer Strecke (und der Pivotkreis zu einer Geraden) degeneriert ist. Die klassische *Lemniskate von Bernoulli* kann gleich auf zwei Arten und Weisen als eine solche Koppelkurve konstruiert werden. Gelenkvierecke, Koppelkurven und damit auch die Lastwege von Lemniskatenkränen bieten unzählige Anknüpfungspunkte für 'höhere Mathematik'. Zum Beispiel kann man Gelenkvierecke mittels der sogenannten *Darbouxabbildung* [2] mit der Theorie komplex projektiver kubischer Kurven in Verbindung bringen, deren elementare Eigenschaften sich direkt auf Eigenschaften der Gelenkvierecke übertragen.

Kontext-Konzept bei Kränen mit horizontalem Lastweg. Die Fragestellung nach einem horizontalen Lastweg ist eine für jeden Schüler nachvollziehbare mathematische Frage. Viele Konstruktionen für solche Kräne (siehe etwa [7]) bieten interessante und nicht-triviale Beispiele zur Verwendung im Mathematikunterricht auf unterschiedlichen Niveaus. Dieser Kontext ist offen für eigene Kreativität von Schülern. Es ergeben sich sinnvolle Anwendungen von dynamischer Geometriesoftware und Computeralgebra. Der Kontext bietet zudem die Möglichkeit zu immer tieferen Einsichten von elementar- und

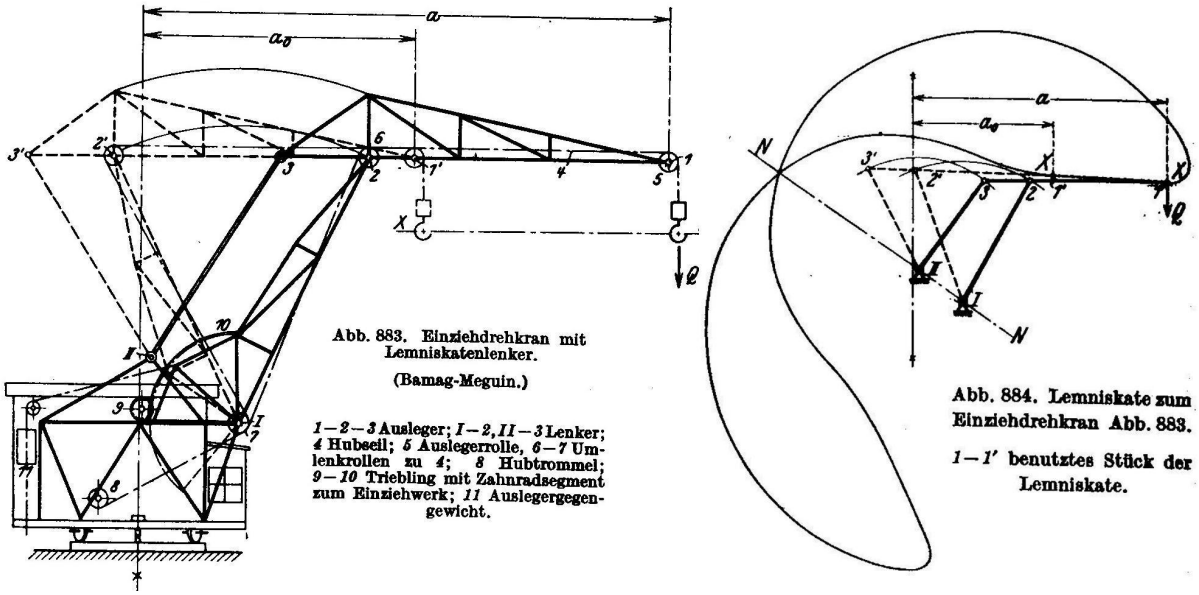


Abbildung 3. Einziehdrehkran mit Lemniskatenlenker

differentialgeometrischer, kinematischer, mechanischer und sogar algbraisch geometrischer Art. Etwa in der Lehrerausbildung eingesetzt kann er helfen, das Zusammenspiel verschiedener mathematischer Disziplinen in einem auch für Schüler interessanten Kontext kennen zu lernen. Ein Kontext wie dieser kann zur mathematischen Entwicklung beitragen. Zu seinem Verständnis muss man jedoch immer anderswo erworbene geometrische Erfahrung mitbringen.

Literatur

[1] M.G. Bartolini Bussi, M. Pergola (1996). *History in the Mathematics Classroom: Linkages and Kinematic Geometry*, in: History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences, H.N. Jahnke, N. Knoche, M. Otte (Eds.), Studien der Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, 11, 39-67.

[2] M.G. Darboux (1879). *De lémploi des fonctions hyperelliptiques dans la théorie de quadrilatère plan*, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, Gauthiers-Villars, Paris, 109-128.

[3] H.P.W. Driessen, H.A. Meinema (2003). *Chemie tussen context en concept*, Enschede, Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO).

[4] A. Engel (1971). *Geometrical Activities for the Upper Elementary School*, Educational Studies in Mathematics, 3, 353-394.

[5] R.Hänchen (1932). *Winden und Krane, Aufbau, Berechnung und Konstruktion.* Verlag Julius Springer, Berlin.

[6] R.H. Kaenders (2005). *Kranen en Lemniscaten* , in *De schijf van vijf (Meetkunde – Algebra – Analyse – Discrete wiskunde – Stochastiek)*, Syllabus CWI vakantiecursus, 54, 31–59 (erhältlich unter http://www.cwi.nl/).

[7] G. Niemann(1928). *Über Wippkrane mit waagerechtem Lastweg*, Dissertation Technische Hochschule Berlin.

Webseiten

[8] KE Kranbau Eberswalde, http://www.kranbau-eberswalde.de/ (ehemals ARDELT Werke).

[9] Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO), http://www.cTWO.nl.

[10] FIGEE crane building, Haarlem, http://www.figee.com/.

[11] Ratio Instituut en Internetmethode, http://www.ratio.ru.nl/, Radboud Universiteit Nijmegen.

[12] Wiskunde-B-dag (2004). *Dansende Stangen*, http://www.fi.uu.nl/wisbdag, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.

[13] Homepage des Autors: http://www.ils.kun.nl/ R.Kaenders.

Tünde KÁNTOR, Universität Debrecen, Debrecen (Ungarn)

Über die neue Ungarische Zentralabitur

In 2005 wurde in Ungarn ein neues Abitursystem eingeführt. Die Schüler können zwischen zwei Niveaus wählen: mittleres oder höheres Niveau (ohne Technologie Einsatz).

Charakteristische Eigenschaften

- Bildungsstandards und Kompetenzen
- Offenes Prüfungssystem
- Unabhängige Prüfung
- Objektivität
- Neues Bewertungssystem
- Grundlagen des höheres Studiums
- Neue Formen und Möglichkeiten.

Die Rolle der Mathematik Abitur veränderte sich. Neue Herausforderungen sind für den Mathematikunterricht entstanden. Die neuen Standards basieren auf fachspezifisch definierten Kompetenzmodellen in Konsequenz der PISA-Studie.

Über die mathematischen Kompetenzen

Im Mathematikunterricht betonen wir die folgenden Kompetenzen:

- Mathematisch denken
- Mathematisch argumentieren
- Probleme mathematisch lösen
- Mathematisch modellieren
- Mathematische Darstellungen verwenden
- Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- Kommunizieren
- Hilfsmittel und mathematische Werkzeuge verwenden.

Zu diesen mathematischen Kompetenzen gehören Klassen von Kompetenzen:

- Klasse 1.: Reproduktionen, Definitionen, Berechnungen
- Klasse 2. : Zusammenhänge und Regelung
- Klasse 3. : Mathematisch Denken, Verallgemeinerung und Intuition.

Über mathematische Kenntnisse

Mathematische Kenntnisse für mittleres und höheres Niveau sind im 5 Teil gegliedert:

- Methoden des Denkens, Mengen, Logik, Kombinatorik, Graphentheorie
- Arithmetik, Algebra, Zahlentheorie
- Funktionen, Elemente der Analysis

- Geometrie, Analytische Geometrie
- Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Ein Ziel ist es die Kommunikation des Schülers zu verbessern. Sie müssen die Endergebnisse der Aufgaben in einem Antwortsatz formulieren.
Schüler können mathematische Werkzeuge benützen, wie Formelsammlungen, einfache Taschenrechner, die keine Textangaben und Daten speichern und darstellen können.

Über das mittleres Niveau

Auf dem mittleren Niveau gibt es keine Beweise, aber die Schüler müssen kurz begründen welcher Satz verwendbar war und warum. Bekannte Sätze (z.B. Satz von Pythagoras, Höhensatz, usw.) müssen nicht formuliert werden.
Auf dem mittleren Niveau finden wir Kompetenzklassen 1-2, auf dem höheren Niveau Kompetenzklassen 2-3. Die mittlere Abiturprüfung in Mathematik ist eine schriftliche zentrale Abiturprüfung mit zwei separierten Teilen. Teil I. besteht aus 12 einfachen Aufgaben (Kompetenzklasse I.), welche die Kenntnis von Definitionen, Grundbegriffen, einfacher Zusammenhänge, sowie logisches Denken kontrollieren. Einige von diesen Aufgaben sind Testaufgaben ohne Argumentierung. Teil II. zerfällt in die Teile II.A und II.B. In Teil II.A sind 3 Aufgaben (13-15), in Teil II.B sind 3 Wahlaufgaben (16-18), von diesen sind 2 Aufgaben obligatorisch zu lösen.
In 2005 finden wir auf dem mittleren Niveau die Definitionen von Graphen, Mengen, absoluter Wert, Vektoren, Tangenten des Kreises. Die Aufgaben kontrollieren einige einfache Berechnungen des Flächeninhalts, Volumens, Prozentrechnung mit Alltagswissen, Darstellung und Analysierung einer Funktion, goniometrische Zusammenhänge, Arbeit mit Tabellen und Diagrammen, einfache Gleichungen, arithmetische Reihen, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und einfache, Realitätsnähe Aufgaben.
Die Aufgaben in Teil II. sind zusammengesetzt, haben mehrere Fragen und mehrere Teile. Manchmal ist der Text dieser Aufgaben lang, und schwer zu verstehen. So war von den Wahlausgaben 17. Ich präsentiere die Aufgabe 17.

Aufgabe 17

Mit einem Lastwagen wurden Äpfel in mehrere Obstläden transportiert. In einen Laden wurden 60 kg Jonathan, 135 kg Starking, 150 kg Idared und 195 kg Golden geliefert. Der Obsthändler verkaufte die zwei Sorten Jonathan und Idared für 120 Ft je kg, die Sorten Starking und Golden für 85 Ft pro kg.
a) Wie viel Prozent teurerer war der Jonathan als der Golden?
b) Wie gross war die Einnahme des Händlers, wenn er alles verkauft hat?
c) Berechnen Sie, wie viel durchschnittlich 1 kg Äpfel bei dem Händler kosteten!
d) Stellen Sie in einem Kreisdiagramm die Verteilung der einzelnen Apfelsorten bei diesem Händler dar!

Ein Jonathanapfel ist kleiner als ein Idared, deshalb passen in eine Kiste 25% mehr von der Sorte. Bei dem Abladen sind von die zwei Sorten je einen vollen Kisten hinausgestürzt und haben sich vermischt.
e)Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, von den hinausgestürzten Äpfeln zufällig einen Jonathanapfel auszuwählen?
Bemerkung
Viele Schüler hatten Probleme mit der Lesekompetenz. Sie konnten Frage 17.e) nicht gut verstehen. Ihre Lösung war falsch.

Über das höheres Niveau
Das höhere Niveau der Abiturprüfung ist ein schriftliches und später ein mündliches Examen. Das schriftliche höhere Niveau besteht aus zwei separierten Teilen. Teil I. besteht aus 4 Aufgaben. Themen dieser Aufgaben waren: Analytische Geometrie, Kombinatorik, Logik, Funktionen.
Teil II. besteht aus 5 Wahlaufgaben. Lösung von 4 Aufgaben war obligatorisch. Mindestens in zwei Aufgaben finden wir alltägliche Probleme, so müssen für ihre Lösung die Schüler mathematische Modelle bilden. Ihre Themen waren: Mengen, Kombinatorik, trigonometrische Gleichungen, Geometrie. Neue Kenntnisse waren: Graphentheorie, Logik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, die Vermittlung der für Alltag wichtiger mathematischer Kompetenzen Die Aufgaben im Teil II. sind zusammengesetzt, haben mehrere Fragen.
Ich präsentiere die Aufgabe 2.

Aufgabe 2
a) Entscheiden Sie, welche Aussagen richtig and welche falsch sind! Schreiben Sie ihre Antworten in die Tabelle!
A: Ein vollständiger Graph, der 6 Punkte enthält, hat 15 Kanten.
B: Falls Die Kantenzahl bei einem vollständigen Graphen gerade ist, ist die Punktzahl auch gerade.
C: Falls ein Graph aus 51 Punkten keinen Kreis enthält, dann hat der Graph höchstens 50 Kanten.
D: Es gibt keinen Graphen mit 6 Punkten, in dem die Summe des Grades der Punkte genau 11 ist.

A	B	C	D

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer alle vier Antworten richtig hat, falls er noch nie etwas über Graphe gehört hat?
c) Vermeine den folgenden Satz:
„ Es gibt keine Liebe, die nicht vergeht.“ (Volksliedsammlung)
d) Formulieren Sie eine Textaufgabe, deren Lösung mit der folgenden Angabe zu berechnen ist: $\binom{17}{2}$.

Bemerkungen

Im Frage **c)** der Zusammenhang zwischen einem Volkslied und mathematischer Logik ist eine fachübergreifende Idee in Kompetenzklasse 2.
Problem **d)** ist eine offene Aufgabe in Kompetenzklasse 3.
Die Resultate waren besser als in den vorigen Jahren. Die Schüler lieben diese Formen, weil es nicht notwendig ist zu viel schreiben. Weniger Schüler probierten das höhere Niveau. In 2005 war es nicht schwer, die Aufnahmeprüfungen waren schwerer in den vorigen Jahren. Aber es war unmöglich mit dem mittleren Niveau mit 100 % auf einige Fachen (z. B. Wirtschaft) Aufnahme auf die Universität zu bekommen.

Aktuelle Probleme

- Welches Niveau zu wählen? Mittleres Niveau oder höheres Niveau?

Es gibt einen Widerspruch zwischen den zwei Niveaus:

Mittleres Niveau	***Höheres Niveau***
obligatorisch	fakultativ
Prozent ist höher	Prozent ist niedriger
keine plus Punkte	7 plus Punkte
innere Prüfung	äussere Prüfung
schriftliche Prüfung	schriftliche und mündliche Prüfung

- In 2005 gab es Probleme mit der Geheimhaltung, so hatten die Schüler in dem ganzen Land das mittlere Niveau zweimal geschrieben. Frage: was wird in 2006 geschehen?
- Es gibt eine grosse Auswahl von Probeabitur Aufgaben. Welches Niveau wird gut sein, welche Probleme werden klappen?

Ich hatte eine Serie in den KöMal geschrieben. Ich probierte diese Serie mit meiner Gruppe. Für Sie war das folgende Problem 12 ziemlich schwer, sie könnten nur die Figur zeichnen (Kompetenzklass 1.)

Problem 12

Gegeben sei eine konvexe Viereck ABCD. Verlängern wir jede Seite des Vierecks mit seiner Länge im derselben Richtung. So bekommen wir den Viereck A'B'C'D'. Wie gross ist das Verhältnis der Flächeninhalte der Vierecks A'B'C'D' und ABCD?
(A) 4 : 1 (B) 5 : 1 (C) 6 : 1 (D) 7 : 1 (E) 8 : 1

Literatur

1. Kántor,T.. Warum und wie? Ideen über die ungarischen Abiturprüfungen in Mathematik Bielefeld, GDM Tagung, 2005
2. Kántor, T.: Probeabitur Aufgaben (mittlere Niveau), KöMal 2005/4 (Ungarisch)
3. www.okev.hu matematika erettsegi 2005

Romualdas KASUBA, Vilnius

Psychologie und Tiefe des Denkens oder über Einstiegsfähigkeit bei der Lösung von Aufgaben

Bei allen Tätigkeiten stößt man auf Schwierigkeiten, ganz gleich, welche konkreten, welche nützlichen oder sogar unersetzbaren Wirkungsfelder diese Tätigkeiten umfassen, selbst wenn sie nicht so breit sind wie in der Mathematik oder wenn Denk- und Einfühlungsvermögen nicht in gleichem Maße gefordert sind.

Mathematik gehört für manche zu den höchsten Künsten. Ohne Zweifel bietet sie – und darin sind sich alle einig, die etwas davon verstehen – schönste Betätigungs- und Entfaltungsmöglichkeiten. Doch viele wissen es ja, wie die Mathematik, einmal abgesehen von ihren konkreten Inhalten, allein von der Form her doch merkbar abstrakt ist. Schönheit und Eleganz haben eben ihren Preis und das muss man in Rechnung stellen und in Kauf nehmen.

Auch vom menschlich verständlichen psychologischen Standpunkt erscheint Mathematik zweifellos als eine der reinsten und herausforderndsten Künste. Sie wirkt wie ein Stern im klaren Nachthimmel – lockt und ist nicht zu übersehen. Unbestreitbar sind solche Umstände die wertvollsten und schon alleine deswegen lohnt es sich sehr, aus dem Wunsch, nach den Sternen greifen zu wollen, besondere Fähigkeiten möglichst intensiv zu entwickeln.

Entwicklungsmöglichkeiten sind im Falle der Mathematik in praktisch unbeschränktem Maße stets vorhanden. Es gibt in der Mathematik erstaunliche Möglichkeiten der Förderung menschlichen Einfühlungvermögens, verbunden mit dem Wachsen der Persönlichkeit.

Doch nicht umsonst ist auch für uns alle gesagt worden: „Grau teuerer Freund, ist alle Theorie ...“ – Also zurück zu Quellen und Beispielen.

Fangen wir an mit einfachsten Beispielen, auch wenn diese beinahe kinderleicht erscheinen. Solche „kinderleichten“ Aufgaben sind wegen ihrer herausfordernden und mahnenden Einfachheit psychologisch gesehen wahrscheinlich gerade deshalb von größter Bedeutung. Einerseits, weil solche einfachen Dinge gleichzeitig auch echte Produkte der reinen Vernunft sind. Andererseits sind diese auch für viele zugänglich und jagen also den Leuten keine unnötige Angst ein. Und drittens sind die Ereignisse, die wir hier sehen, zu verstehen und zu begreifen. Sie bringen uns viele Ideen, bleiben offen für weitere Entwicklungen und sind von Interesse für viele, die sich wenigstens ein bisschen sich damit befassen wollen.

Wenn wir uns schon wirklich um Verständnis der Leute kümmern wollen, die wir eingeladen haben etwas zu unternehmen, dann sind wir auch verpflichtet, uns so zu benehmen, dass erste Erfolge bereits gut vorbereitet sind, also praktisch unvermeidbar und unauffällig eintreten. Solche Bemühungen haben größten Wert. Vergessen wir vor allem nicht, dass das Einsteigen möglichst leicht ausfallen muss, also praktisch blitzschnell und unbemerkt geschehen soll. Der psychologische Wert solcher Dinge ist, dass wir uns plötzlich engagiert fühlen, ohne praktisch bemerkt zu haben, wann und wie es geschehen ist.

Gehen wir nun, wie versprochen, zu konkreten Beispielen über.

Eine glänzende Miniatur belorussischer Herkunft

Man muss nicht unbedingt tagelang mühsam überlegen, um zu begreifen, dass wir, wenn wir 4 verschiedene Zahlen nehmen und je 2 dieser Zahlen auf alle möglichen Weisen summieren, dann höchstens 6 verschiedene Summen bekommen können.

Nehmen wir zum Beispiel die vier Zahlen 1, 10, 100 und 1000. Dann sind alle möglichen Summen aus je 2 dieser Zahlen eben 11, 101, 110, 1001, 1010 und 1100.

Und jetzt erlauben wir uns, zu zwei ähnlich, ja sogar beinahe identisch aussehenden Beispielen ein und dieselbe Frage zu stellen:
Gibt es denn 4 Zahlen so, dass alle möglichen Summen aus je 2 dieser Zahlen die folgenden vorgegebenen Zahlenmengen erzeugen?
Eine Zahlenmenge ist 1, 2, 3, 4, 5, 6, die zweite ist 1, 2, 3, 4, 5, 7.

Wie der Leser bereits erwartet, ist die Antwort in diesen zwei Beispielen verschieden, – einmal ist die Antwort “Ja”, im zweiten Falle ist die Antwort “Nein”. Wenn wir den Fall der Summen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 als „regelmäßig“ bezeichnen und den zweiten Fall mit den Summen 1, 2, 3, 4. 5 und 7 „ein bisschen unregelmäßig“ nennen, dann entsteht die fast philosophische Frage, welche Zahlenmenge – die regelmäßige oder auch die unregelmäßige - größere Chancen hat, erzeugt zu werden?

Aber der regelmäßige Fall hat auch nicht immer Vorrang gegenüber dem unregelmäßigen.

Nehmen wir jetzt 5 verschiedene Zahlen und summieren wir diese wieder paarweise. Kann man 5 Zahlen finden, dass alle ihre möglichen Summen aus je zwei von ihnen die Zahlenmengen

(A) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 bzw.
(B) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 erzeugen?

Auch diesmal ist erste Zahlenmenge hundertprozentig regelmäßig und die zweite wieder nicht ganz. Mit der mit Erzeugbarkeit ist es jetzt aber gerade umgekehrt.

Hans hat wieder 4 Zahlen genommen, diese wiederum paarweise summiert und 5 von 6 Summen gezeigt. Diese Summen waren 14, 16, 18, 19 und 22. Als der Vater das sah, wurde er traurig und sagte: „Da ist etwas schief gelaufen." Woher wusste er es?

Die eine Tabelle lässt sich leicht aufstellen. Warum gelingt das nicht mit einer ähnlichen, nur wenig veränderten?

Die folgende Tabelle enthält genau drei Zeilen. In der ersten Zeile sind alle aufeinanderfolgenden Zahlen von 1 bis 9 aufgeschrieben. In der zweiten Zeile möchten wir diese Zahlen so umstellen, dass wir, wenn wir in der dritten Zeile die Differenz der Zahlen aus der ersten und der zweiten Zeile bilden, alle möglichen Zahlen von 0 bis 8 bekommen (wir ziehen immer die kleinere Zahl von der größeren ab, falls diese nicht gleich sind). Lässt sich das machen?

Die Antwort ist „Ja", wie z. B. die folgende Tabelle ausweist.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	1	5	4	6	3	2
8	6	4	3	0	2	1	5	7

Wir machen nun die Tabelle um eine Spalte länger. In der ersten Zeile tauchen dann alle Zahlen von 1 bis 10 auf. In der zweiten werden diese Zahlen wieder vertauscht angeschrieben, in der dritten Zeile die Differenzen der entsprechenden Zahlen aus der ersten und zweiten Zeile gebildet. Wir fragen, ob es auch jetzt möglich ist, dass als Differenzen alle ganzen Zahlen von 0 bis 9 auftauchen?

Warum geht das jetzt nicht mehr? Ist dieser Fall denn jetzt so viel schwerer? Sind die Dinge so ganz anders geworden? Wie kann man es erklären?

Eine riesige Schokoladentafel und die Nüsse

Betrachten wir jetzt in einer Aufgabe den allgemeinen Fall. Adam hat eine quadratische n x n Schokoladentafel, die üblicherweise aus n^2 1 x 1 Teilchen gebildet ist. Auf manche Teilchen legt Eva eine Nuss. Dann bricht Adam die Schokoladentafel in zwei rechteckige Teile.

Und jetzt kommt die recht schwierig erscheinende Frage:

Wieviel Nüsse soll Eva mindestens auf die Tafel hinlegen, damit, wenn Adam sie – egal auf welche Weise – in zwei rechteckige Teile bricht, mindestens auf einem der beiden Teile mindestens n Nüsse zu finden sind?

Uns ist klar, das ist eine Aufgabe von der Sorte, wo wir am Anfang die einfacheren, ja sogar möglichst die einfachsten Fälle betrachten sollten, falls wir die Aufgabe wirklich lösen möchten.

So gehen wir zunächst zum Fall der 2 x 2 Tafel. Die Aufgabe zu vereinfachen ist nicht immer wünschenswert für den Lösenden, denn man möchte gerne alle möglichen Fälle auf einen Schuss erledigen. Aber das gelingt durchaus nicht immer sogleich, besonders wenn die Aufgabe etwas geschickter gemacht und nicht immer gleich am Anfang zu erraten ist, welchen Weg man einschlagen muss.

Das ist dann oft ein psychologisches Problem, denn es mag mir scheinen, dass ich dann, wenn ich die Aufgabe vereinfache, schlechter bin als diejenigen, für die der allgemeine Fall gedacht ist. Aber wenn ich die Aufgabe lösen will, so sollte ich solche Gedanken nicht zulassen. Ich sollte mich zunächst um konkrete einfache Beispiele kümmern, um vielleicht später die komplexe Wahrheit doch noch entdecken zu können.

Es ist ja bekannt, dass auch eine passende Aufgabe genauso wie jede wahre Tätigkeit uns lehrt zu unterscheiden, was machbar ist und was nicht – eine richtig dosierte Portion Bescheidenheit zusammen mit der Freude, die Aufgabe schließlich doch gemeistert zu haben, sind dem Lösenden also immer sicher.

In den Fällen der 2 x 2, 3 x 3 und 4 x 4 Tafeln sind 3, 4 bzw. 5 Nüsse die minimalsten Anzahlen an Nüssen, die Eva auf die entsprechende Tafel legen soll. An dieser Stelle könnte man meinen, dass da eine einfache (also auch schöne) Gesetzmäßigkeit entsteht, dass für die n x n Tafel Eva n + 1 Nüsse hinlegen muss.

Doch im Fall der 5 x 5 Tafel scheitern diesmal alle unsere Versuche, mit 6 Nüssen auszukommen. Warum? Und wie kann man es beweisen?

Wenn ich aber einen Beweis nicht führe, dann kann ich dem Gedanken nicht entgehen, dass ich wahrscheinlich etwas doch nicht sehe oder dass ich vielleicht nicht fähig bin, das zu beweisen, was die anderen imstande sind zu verwirklichen. Ich möchte mir jedoch Klarheit verschaffen.

Also will ich mich in diesem Fall um den Beweis als einen Weg zur endgültigen Klarstellung der Dinge bemühen.

Andreas KITTEL, Schwäbisch Gmünd

Unterrichtliche Erprobung von Dynamischen-Geometrie-Systemen in der Hauptschule

1. Einleitung

In vielen Forschungsprojekten, Aufgabensammlungen und Erfahrungsberichten aus dem Schulalltag wird gezeigt, wie der Einsatz von Dynamischen-Geometrie-Systemen (DGS) zum besseren Verstehen von geometrischen Zusammenhängen beitragen kann (vgl. Elschenbroich et al. 2000-2005, Hölzl 1994, Ritter 2002, Roth 2005, Schumann 2001). Alle diese Untersuchungen beziehen sich auf den Einsatz dieser Systeme in Realschulen oder Gymnasien. Hauptschulen sind nicht berücksichtigt. Traut man Hauptschülerinnen und -schülern den Umgang mit diesen Systemen nicht zu, gibt es keine passenden Unterrichtsstoffe im Bildungsplan oder gibt es weitere Gründe, DGS in der Hauptschule nicht zu berücksichtigen?

2. DGS in der Hauptschule

Dabei gibt es eine Reihe von Argumenten, die insbesondere auch in der Hauptschule für einen Einsatz von DGS sprechen und die gerade für Hauptschülerinnen und -schüler von Bedeutung sind:

- DGS verlangen korrektes Konstruieren.
- Die mathematische Computer-Syntax wird akzeptiert (Lutz/Weth 1994).
- DGS zeigen eine Zeichnung als Repräsentant einer Figur.
- Heuristisches Vorgehen (Weigand/Weth 2002) ist möglich, dadurch kann eine Vermutung verifiziert oder falsifiziert werden.
- Im Bildungsplan für die Hauptschule (KMK Beschluss vom 15.10.2004) wird die Verwendung dieser Systeme vorgeschlagen.

Trotzdem sind DGS in der Hauptschule unterrepräsentiert. Bereits vor einigen Jahren merkte Hole (1998, S. 26) an, dass „spezielle Mathematik-Werkzeugprogramme wie […] Cabri, Geolog bislang kaum Eingang in den Mathematikunterricht der HS gefunden [haben].“

Ein Indiz, dass sich die Häufigkeit des Einsatzes dieser Systeme bis heute kaum geändert hat, zeigt sich darin, wie schwer es war, Hauptschullehrkräfte für die hier vorgestellte Untersuchung zu finden, die wussten was DGS sind oder in einem Interview Fragen zu diesem Themenkomplex beantworten konnten. Diese Untersuchung sollte klären, welche Gründe es für diese Unterrepräsentanz gibt. Sie wurde im Rahmen eines Leitfadeninterviews mit Lehrern durchgeführt. Die Ergebnisse der Auswertung dieser Interviews lassen sich in fünf wesentlichen Punkten zusammenfassen.

- **Mangelnde Kompetenz der Lehrer**
  Vielen Hauptschullehrkräften sind DGS bzw. deren Bedienung unbekannt.
- **Schwierigkeiten bei der Organisation mit Computerunterricht**
  Der 45 Minuten Takt wird als störend empfunden bzw. nicht in Einklang mit der Belegung des Computerraumes gebracht. Hinzu kommt die ungenügende Computer- bzw. Softwareausstattung an der Schule.
- **Priorität von Unterrichtsinhalten**
  Geometrie gilt als nicht so wichtig erachteter Unterrichtsstoff.
  Die Prüfungen müssen mit traditionellen Werkzeugen abgelegt werden.
- **Kompetenz der Schüler und Lernerfolg**
  Es gibt die Befürchtung, dass Schüler mehr mit dem Programm als mit mathematischen Inhalten beschäftigt sind.
- **Nutzungsmöglichkeit**
  Aufgabenstellungen die sich für DGS eignen sind unbekannt.

Die ersten drei Punkte befassen sich hauptsächlich mit organisatorischen Fragestellungen. Beim vierten Punkt, der sich auf die Kompetenz der Schülerinnen und Schüler im Umgang mit DGS bezieht, handelt es sich auf Grund fehlender Erfahrung erst um eine Vermutung. Ob sie zutrifft, soll durch weitere Untersuchungen geklärt werden.

3. Aufgabenstellung

Im Schuljahr 2004/05 wurden deshalb in einer größeren empirischen Untersuchung Hauptschülerinnen und -schüler in ihrem Umgang mit DGS begleitet. Dabei bearbeiteten jeweils zwei Schülerinnen oder Schüler Aufgaben am Computer unter Aufsicht eines Interviewers. Da sie bisher keine Erfahrungen mit diesen Systemen hatten, wurde zur Einführung eine Aufgabenstellung formuliert, bei der die Kinder Figuren aus ihrer Fantasie erstellen sollten (Kittel 2006). Dies geschah in Anlehnung an ein englisches Schulprojekt (Hölzl 1994). Alle Körperteile sollten miteinander verbunden sein oder in Abhängigkeit zueinander stehen. Dabei standen die Entdeckung des Zugmodus und der unterschiedlichen Punktarten im Vordergrund. Nach dieser kurzen Begegnung mit dem DGS DynaGeo sollten sie Aufgaben lösen, die sich auf den Bildungsplan des Landes Baden-Württemberg beziehen. Die Schülerinnen und Schüler sollten darin:

- über den geometrischen Ort aller Punkte mit bestimmten Abstand zu einem Punkt den geometrischen Ort aller Punkte zu drei Punkten finden und die Existenz bzw. Lagemöglichkeiten dieses Punktes untersuchen.

Diese Aufgaben wurden der Hälfte der Gruppen in kontextgebundener, der anderen Hälfte als rein mathematisch formulierte Aufgaben vorgelegt.

4. Forschungsfragen

Als Untersuchungsziele wurden drei Hauptfragestellungen formuliert:

- **Softwarespezifische Fragen**
  Entdecken neuer Werkzeuge und Funktionen - Nutzung der Werkzeuge und Funktionen - Schwierigkeiten im Umgang mit der Software - Umgang mit Hilfen - Nutzen von Strategien - Nutzung komplexer Werkzeuge - Konstruieren vs. Statischem Zeichnen - Probleme die durch das neue Medium entstehen
- **Umgang mit dem Zugmodus**
  Selbstnutzung oder Fremdnutzung - Überprüfen der Lösung (Zugmodusinvarianz) - Erstellen von Fallunterscheidungen - Lösungsfindung, Finden von Hypothesen - Eisenbahnprinzip (Bewegung voneinander abhängiger Punkte) - Pragmatische Nutzung (bspw. Zeichnung verkleinern, damit sie auf das Arbeitsblatt passt) - Welches Wissen über den Zugmodus liegt vor
- **Bearbeitung der Aufgaben**
  Umgang mit Fehlern - Mathematische Argumentation - Anwendung von Fachsprache - Von der Vorstellung zur Konstruktion - Allgemeine Lösungen oder Spezialfall

Während bei anderen Forschungsvorhaben (vgl. Gawlick 2002) quantitative Vergleiche zwischen traditioneller Paper-Pencil und DGS im Mittelpunkt standen, sollte hier rein qualitativ untersucht werden, ob Schülerinnen und Schüler der Hauptschule in der Lage sind, qualifiziert mit diesen für sie neuen Systemen im Rahmen der oben genannten Forschungsfragen umgehen können. 26 Schülerinnen und Schüler in 13 Gruppen wurden dazu zufällig ausgewählt, die dabei entstandenen Interviews transkribiert und interpretativ in einer Forschungsgruppe (Autor des Artikels, Prof. Dr. habil Astrid Beckmann, Stud. Päd. Katrin Beiermeister, Stud. Päd. Stefanie Schüle, PH Schwäbisch Gmünd) ausgewertet (nach Krummheuer/Naujuk 1999, 61-73).

5. Ergebnisse

Umgang mit der Software

- Viele Funktionen werden ohne Erklärung selbständig entdeckt. Hierbei spielen Icons und Hotspots eine wichtige Rolle.
- Strategien, wie die Übernahme von Teillösungen, werden angewandt.
- Die Aufgaben werden ohne Angst vor Fehlern bearbeitet (Wissen um „Bearbeiten/Rückgängig“).
- Unterschiedliche Punktarten bereiten Probleme.
- Fehlermeldungen können produktiv genutzt werden, wenn der Text verständlich und nicht zu lang ist.

Umgang mit dem Zugmodus

- Nach mehrmaliger Aufforderung zur Nutzung des Zugmodus werden auch nicht erwähnte Aspekte gefunden und genutzt.
- Die pragmatische Nutzung des Zugmodus wird von allen Gruppen selbst entdeckt.

Mathematische Schüleraktivitäten

- Die Verwendung DGS kann zu einer zeitintensiven Beschäftigung mit der Aufgabenstellung führen.
- Die Fachwörter der Hotspots werden auffallend häufig verwendet.
- Konstruktionen werden häufig ohne Vorüberlegungen begonnen.
- Mathematisches Begründen mit Hilfe der Konstruktion am Computer, wird erst nach einer Eingewöhnungsphase genutzt.

Insgesamt lässt sich belegen, dass sich die Schülerinnen und Schüler intensiv mit mathematischen Fragestellungen beschäftigen. Softwareprobleme sind von untergeordneter Natur und können meist mit den im Programm integrierten Hilfefunktionen selbständig gelöst werden. Bereits nach kurzer Zeit gehen die Kinder routiniert mit den ihnen aus der Einführung bekannten Funktionen und Werkzeugen um. Das in den Leitfadeninterviews einbrachte Argument, dass die Software für diese Klientel zu schwer zu verstehen sei, kann im Rahmen dieser Untersuchung eindeutig widerlegt werden. Aufgrund der unter Punkt 2 genannten Argumente und der vorliegenden Untersuchungsergebnisse wird die Verwendung von DGS in der Hauptschule empfohlen.

6. Literatur

Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss (2004). Beschluss der Kultusministerkonferenz (Hg.) vom 15.10.2004.

Elschenbroich, H.J., Seebach, G. (2000): Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter mit Euklid-DynaGeo und Cabri II, CoTec, Rosenheim.

Hölzl, R. (1994): Im Zugmodus der Cabri-Geometrie. Weinheim.

Gawlick, T. (2002): On dynamic geometry software in the regular claasroom. ZDM.

Hole, V. (1998): Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer. Donauwörth.

Kittel, A. (2006): Dynamische Teddybären – Eine Einführung in DGS. PM 6/47.

Krummheuer, G., Naujok, N. (1999): Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung. Oppladen.

Lutz, B., Weth, T. (1994): Beobachtungen beim Einsatz von Geolog. MidS 32/9, 500-508 und 32/10, 557-569

Ritter, W. (2002): Ein Jahr dynamische Geometrie mit Geonext in der 8. Klasse. Bayreuth.

Roth, J. (2005): Figuren verändern – Funktionen verstehen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim.

Schumann, H. (2001): Modulares Arbeiten im Geometrieunterricht. In: Schumann H. (Hg.) Dynamische Geometrie - Offene Aufgaben - Analytische Geometrie. Weingarten.

Dieter KLAUDT, Ludwigsburg

Operieren am mentalen Zahlenstrahl

Gibt man Kindern in Klasse 1 der Grundschule die Aufgabe: 'Zeichne die Zahlen 0, 5, 11, 19, 20 auf den Rechenstrich', dann erhält man z.B. folgende Bilder:

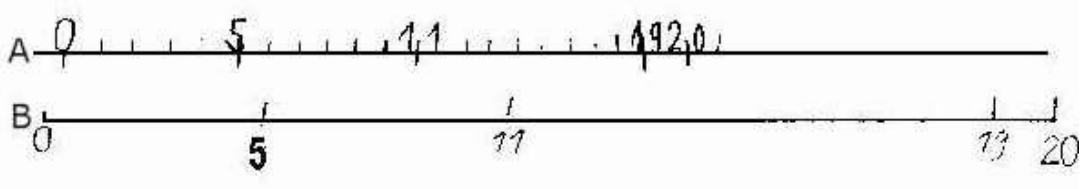


Abbildung 1: Papier-Bleistift Konstruktionen des Zahlenstrahls

Bei diesen fertigen Papier/Bleistift Konstruktionen am Rechenstrich (leerer Zahlenstrahl) wird nicht deutlich, dass die Kinder ihre Konstruktionen mit ganz unterschiedlichen Strategien aufbauen. Auf den ersten Blick sieht Konstruktion A (s.o.) sogar genauer aus, als Konstruktion B, sie enthält eine Skalierung und die Längenverhältnisse scheinen genauer getroffen als in Figur B. Diese Beurteilung der fertigen Produkte muss man jedoch revidieren, wenn man sich das Vorgehen der beiden Kinder, den Konstruktionsprozess, ansieht. Kind A wendet Zählstrategien an, der Zahlenstrahl wird schrittweise aufgebaut, beginnend bei Null. Kind B konstruiert völlig frei und nutzt operative Strategien, bei denen der gesamte Kontext, also das Wissen über die Zahlen in der Umgebung, Relationen und Operationen verwendet werden (siehe *Klaudt 2003, 63f: 'How children construct the number line.'* und *Klaudt/Spannagel 2004, 248f*). Die verschiedenen Strategien können aber nur während der Konstruktion beobachtet, oder an der fertigen Konstruktion durch Interviewtechniken ans Licht gebracht werden. Es kann deshalb nicht nur das Endprodukt beurteilt werden, wenn man sich für den Prozess interessiert.

Mentale Zahlvorstellung

Mit mentaler Zahlvorstellung wird unsere interne Vorstellung von Zahlen bezeichnet, die dabei hilft, kleinere Anzahlen zu schätzen, Relationen zwischen Zahlen zu beurteilen, bestimmte Zahlen und ihre Nachbarschaft in den Blick zu nehmen, usw.... Dieses ‚Wissen über Zahlen', die Semantik einer Zahl ist nach *Dehaene [1992]* in einem Modul repräsentiert das als 'Analoge Repräsentation der Zahlengrößen' (analogue magnitude representation) bezeichnet wird. Hier ist die größen- und auch mengenmäßige Bedeutung des gespeicherten Zahlenwissens angelegt. Das

Modul ermöglicht das Vergleichen von Anzahlen über die internen Zahlengrößen sowie Überschlagsrechnungen. Die numerischen Größen, also die Zahlen, sind räumlich repräsentiert. Diese automatische Verknüpfung zwischen Zahl und Raum führt zu einem einfachen, aber bemerkenswert guten Bild für die mentale Repräsentation numerischer Größen in unserem Gehirn, nämlich zum Zahlenstrahl.

Metaphern und Mathematiklernen

Dieses Wissen über die interne Repräsentation von Zahlen ist jedoch für den Mathematikunterricht nicht ausreichend. Um unterrichten zu können, muss man Kenntnisse darüber haben, wie dieses Wissen über Zahlen aufgebaut wird. *Lakoff/Nunez [2000]* gehen davon aus, dass die Grundideen dieses Wissens , das über die Zahlen aufgebaut werden muss schon als interne Denkstrukturen angelegt sind, die dann im Unterricht aktiviert werden sollten. D.h., die Ideen als Strukturen sind schon da, sie müssen nur angeregt und verknüpft werden und zwar durch Metaphern, die Bezug nehmen auf diese vorhandenen Strukturen. Genau diese Strukturgleichheit ermöglicht dann das selbständige Lernen in Mikrowelten. Man hat mit den Metaphern bekannte Werkzeuge die einem helfen, in einem neuen Gebiet neues Wissen und neue Fähigkeiten selbständig zu lernen. Für die Bewegung am realen oder gedachten mentalen Zahlenstrahl spielen zwei Metaphern eine Rolle. Die Bewegungsmetapher veranschaulicht die Bewegung, vorwärts und rückwärts, während die Meterstabmetapher eher die Proportionalität und die operationalen Zusammenhänge ausdrückt: vier Schritte sind zwei mal zwei Schritte, egal welche Skalierung momentan gerade verwendet wird.

Mikrowelten im LOGO-System

Für die Umsetzung der Ideen in eine computerbasierte Mikrowelt wurde ein LOGO-System verwendet. Alle Mikrowelten versuchen, bei den Kindern Vorstellungen zum mentalen Zahlenstrahl und zu den Zahlvorstellungen zu aktivieren und sollen die Kinder gleichzeitig anregen, ihre Vorstellungen unter Verwendung der Metaphern zu explizieren. Die Mikrowelten haben verschiedene Kontexte und Ausprägungen, die in *Klaudt [2005]* beschrieben werden. Die Daten der der Schüler aus den Mikrowelten wurden in Protokolldateien gesammelt um sie danach automatisch auswerten zu können. In der ebenfalls durchgeführten Visualisierung der Daten nach deren Bearbeitung werden die Daten anschaulicher.

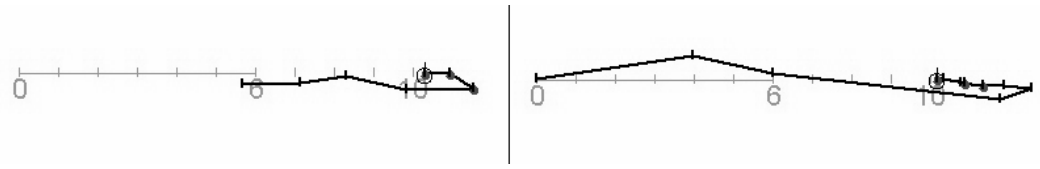


Abbildung 2: Beispieldaten - Visualisierung des Arbeitsprotokolls

Ergebnisse

Die Untersuchung der Zusammenhänge zwischen den Strategien in den Mikrowelten und mathematischen Grundfertigkeiten, die in verschiedenen standardisierten mathematischen Leistungstests zu Beginn und nach einem Jahr am Ende des Projekts erhoben wurden, zeigt:

- Kinder, die in den Mikrowelten häufig Strategie 3 (Direktstrategie) wählen, haben auch beim mathematischen Eingangstest und beim Abschlusstest höhere Punktzahlen erreicht. Es gibt also einen deutlichen Zusammenhang zwischen mathematischen Fertigkeiten und mentaler Zahlvorstellung.
- Kinder, die beim Eingangstest im Bereich 'Zählen' und beim Abschlusstest erfolgreich sind, wählen bei der Konstruktion des Zahlenstrahls gerade nicht die primitive Zählstrategie sondern eine Direktstrategie.
- In den Mikrowelten haben diejenigen Kinder viele richtige Lösungen, die in den Teilbereichen 'Zählen', 'Merkmale erkennen' und 'Proportionalität' der mathematischen Tests erfolgreich waren.
- Kinder, die bei den mathematischen Tests erfolgreich sind, arbeiten in den Mikrowelten erfolgreicher und genauer. Sie haben mehr richtige Lösungen und eine geringere Abweichung von der gesuchten Zahl.
- Geringe Durchschnittszeiten bis zum ersten Klick in der ersten Mikrowelt gehen gleichzeitig einher mit hohen Punktzahlen in den mathematischen Tests. Diese Kinder können ihre mentalen Modelle und ihr Wissen offensichtlich schnell aktivieren.

Zusammenfassung

Durch Aufzeichnungs- und Visualisierungswerkzeuge, wie sie im CEKA-Projekt entwickelt, genutzt und in der vorliegenden Arbeit präsentiert wurden, können die Abläufe der individuellen Wissenskonstruktionen am

Computer bei Kindern aufgezeichnet und bei Bedarf wiedergegeben werden *(Protokollbeispiele siehe: Klaudt 2005)*. Den Lehrenden wird so konstruktives Wissen, bzw. Wissen über Teilkonzepte, das Schüler bereits erworben haben, in anschaulicher Weise des informatischen Protokolls zugänglich gemacht. Durch die Dynamik die sich in jeder Visualisierung der Bearbeitungsprotokolle zeigt, wird zusätzlich der Prozesscharakter des Lernens betont. Lernen ist ein aktiver, individueller, sich wiederholender Prozess, der eine immer bessere Anpassung an die Problemstellung erreicht. Damit rückt das individuelle Lernen in den Mittelpunkt des Interesses der Lehrpersonen. Dieses Lernen kann dann nicht mehr nur über Lernzielkategorien beschreiben werden, sondern muss mit Hilfe von evaluierenden Forschungsmethoden begleitet und unterstützt werden. Der Lehrer ist in solch einem Kontext nicht länger der Kontrolleur, der erreichte Lernziele abhakt, sondern wird zum Organisator und zum Forscher, der versucht, möglichst viel über die Lernprozesse der einzelner Kinder herauszufinden, um diese Kinder dann individuell fördern und fordern zu können.

Literatur:

Dehaene, S. (1999). Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können. Basel, Boston,Berlin (Birkhäuser).

Klaudt, D. (2003). Exploring number sense - a research project in Primary School using Logo. In: Futschek, G. (ed.) EUROLOGO 2003 be creative… Re-inventing tecnology on education. Proceedings of the 9th European Logo Conference, Porto, Portugal. Coimbra (Cnotinfor), S.62-68.

Klaudt, D.; Spannagel, C. (2004). Computerunterstütztes Operieren am mentalen Zahlenstrahl. In: Erziehung und Unterricht - Österreichische Pädagogische Zeitschrift, Heft 3/4 2004. S. 246-257.

Klaudt, Dieter (2005): Zahlvorstellung und Operieren am mentalen Zahlenstrahl – Eine Untersuchung im mathematischen Anfangsunterricht zu computergestützten Eigenkonstruktionen mit Hilfe einer LOGO-Umgebung. Dissertation online veröffentlicht http://elib.uni-stuttgart.de/opus/frontdoor.php?source_opus=2501

Lakoff, G.; Nunez, R.E. (2000). Where Mathematics comes from. How the embodied Mind brings Mathematics into Being. New York (Basic Books).

Martina KLEINHEINRICH, Essen

Hypothesen über die Sonnenbahn als Gegenstand des Geometrieunterrichts

Der Entwurf einer Unterrichtsreihe für den Geometrieunterricht der 10. Jahrgangsstufe wird vorgestellt. Der Planung der Unterrichtsreihe lagen zwei Ziele zugrunde:

1. Die Unterrichtsreihe soll eine umfassende Modellierungs- bzw. Anwendungsaufgabe zur Geometrie beinhalten.
2. Die wissenschaftliche Methode, d.h. das Aufstellen, Überprüfen und ggfs. Abändern von Hypothesen soll explizit thematisiert werden (vgl. Beitrag „Beweise und Hypothesen“ von Niels Jahnke).

Gegenstand der Unterrichtsreihe ist die Beschreibung der Sonnenbahn um die Erde. Dieses Thema eignet sich besonders gut, da zur Beschreibung der Sonnen- bzw. Erdbahn verschiedenste Hypothesen geläufig sind, zum Beispiel: die Erde dreht sich um die Sonne, die Sonne dreht sich um die Erde, die Bahn ist kreisförmig, die Bahn ist ellipsenförmig. Jede dieser Beschreibungen kann – abhängig vom Kontext – sinnvoll sein. Andererseits ist aber keine der Beschreibungen „richtig“ in dem Sinne, dass sie die Realität exakt wiedergibt.
Der Unterrichtsreihe liegt eine Beschreibung des Griechen Hipparch (ca. 190-120 v. Chr.) zugrunde. Hipparch nahm an, dass sich die Sonne auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt. Diese Hypothese überprüfte und verbesserte er durch Vergleich der vorhergesagten und beobachteten Dauern der Jahreszeiten.

Die Unterrichtsreihe

Den Einstieg bildet eine Sammlung des Vorwissen der Schülerinnen und Schüler (SuS) bzgl. der Bahn von Erde bzw. Sonne sowie zur Entstehung und Merkmale der Jahreszeiten. Vermutlich „wissen“ die SuS bereits, dass sich die Erde auf einer Ellipsenbahn um die Sonne bewegt, so dass bereits thematisiert werden kann, ob bzw. unter welchen Umständen es erlaubt ist, die Erdbahn als kreisförmig zu beschreiben. Außerdem kann thematisiert werden, ob sich die antiken Griechen mit der Annahme, dass sich die Sonne um die Erde drehe, „geirrt“ haben.

Die anfänglichen Hypothesen von Hipparch lauten:
Hypothese 1: Die Sonne bewegt sich im Laufe eines Jahres auf einem Kreis um die feststehende Erde, dessen Mittelpunkt im Zentrum der Erde liegt.
Hypothese 2: Die Sonne bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

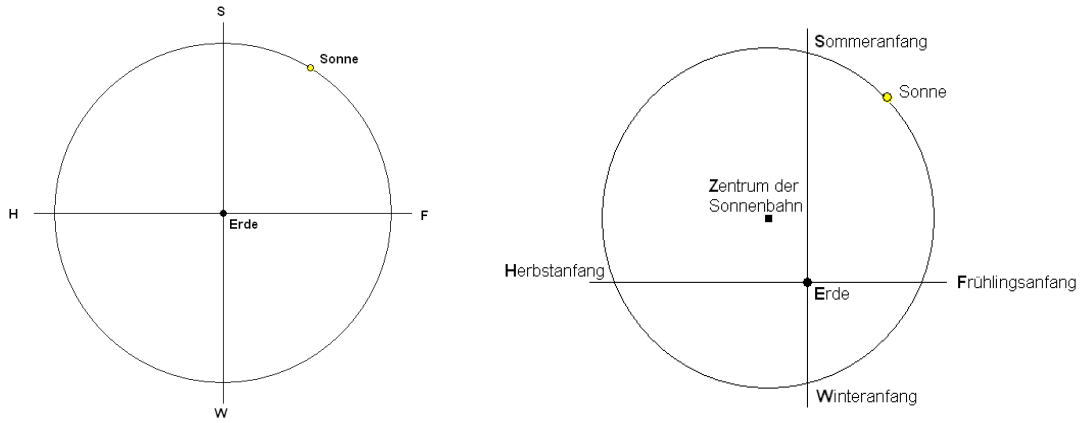


Abbildung 1: Skizze der Sonnenbahn um die Erde entsprechend der Hypothesen 1 und 2 (links) bzw. entsprechend der Hypothesen 1' und 2 (rechts)

Außerdem wird den SuS mitgeteilt, dass Hipparch bereits aus seinen Beobachtungen wusste, dass sich die Position der Sonne während einer Jahreszeit um genau 90° ändert. (Tatsächlich ist das kein reines Beobachtungsergebnis, sondern folgt zwangsläufig aus den Entstehungsbedingungen der Jahreszeiten.) Eine Skizze der Sonnenbahn gemäß der beiden Hypothesen ist in Abbildung 1 dargestellt, die Sonnenpositionen zu den Jahreszeitenanfängen sind mit F, S, H und W markiert. Als Vorhersage ergibt sich aus den Hypothesen, dass jede Jahreszeit genau 91,25 Tage dauert (1 Jahr = 365 Tage). Andererseits kann man aus der astronomischen Literatur die Jahreszeitenanfänge entnehmen; auf einen halben Tag genau sind diese für das Jahr 2004/05: 20.3.2004 12 Uhr, 21.6.2004 0 Uhr, 22.9.2004 12 Uhr, 21.12.2004 12 Uhr und 20.3.2005 12 Uhr. Daraus ergeben sich folgende Längen der Jahreszeiten: Frühling 92,5 Tage, Sommer 93,5 Tage, Herbst 90 Tage, Winter 89 Tage.

Der Widerspruch zwischen den Voraussagen der Hypothesen 1 und 2 und den tatsächlichen Dauern der Jahreszeiten und mögliche Auflösungen des Widerspruches werden mit den SuS diskutiert. Weitergearbeitet wird dann mit den geänderten Hypothesen von Hipparch:
Hypothese 1': Die Sonne bewegt sich im Laufe eines Jahres auf einem Kreis um die feststehende Erde, dessen Mittelpunkt **nicht** im Zentrum der Erde liegt.
Hypothese 2: Die Sonne bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Daran, dass sich die Sonne während einer Jahreszeit um 90° weiterbewegt, ändert sich nichts.

Um die SuS mit dieser ungewohnten Beschreibung vertraut zu machen, können einige Bespiele betrachtet werden, bei denen die Sonnenbahn, die Position der Erde und die Sonnenposition zu Frühlingsanfang vorgegeben sind und dann die Sonnenpositionen zu Sommer-, Herbst- und

Winteranfang bestimmt werden sollen (vgl. Abbildung 1). Schließlich soll in zwei Schritten die Position der Erde relativ zum Mittelpunkt der Sonnenbahn für die oben genannten Daten berechnet werden (vgl. Abbildung 2):

1. Es wird nur benutzt, dass das Sommerhalbjahr (also Frühling + Sommer) 7 Tage länger dauert als das Winterhalbjahr bzw. 3,5 Tage länger als ein Halbjahr. Also muss der Frühlingsanfang 1,75 Tage früher bzw. der Herbstanfang 1,75 Tage später erreicht werden als es aus der ursprünglichen Hypothese 1 folgen würde. Setzt man den Radius der Sonnenbahn gleich 1, dann erhält man $|\overline{ZE}| = \sin(\angle F'ZF)$.
2. Nun wird auch benutzt, dass Sommer bzw. Herbst jeweils 1 Tag länger dauern als Frühling bzw. Winter. Die Bogenstücke SS' bzw. WW' werden also in jeweils 0,5 Tagen durchlaufen. Die Position der Erde relativ zu Z ergibt sich zu $\left(\sin(\angle S'ZS) \,|\, -\sin(\angle F'ZF)\right) \approx \left(0{,}01 \,|\, -0{,}03\right)$.

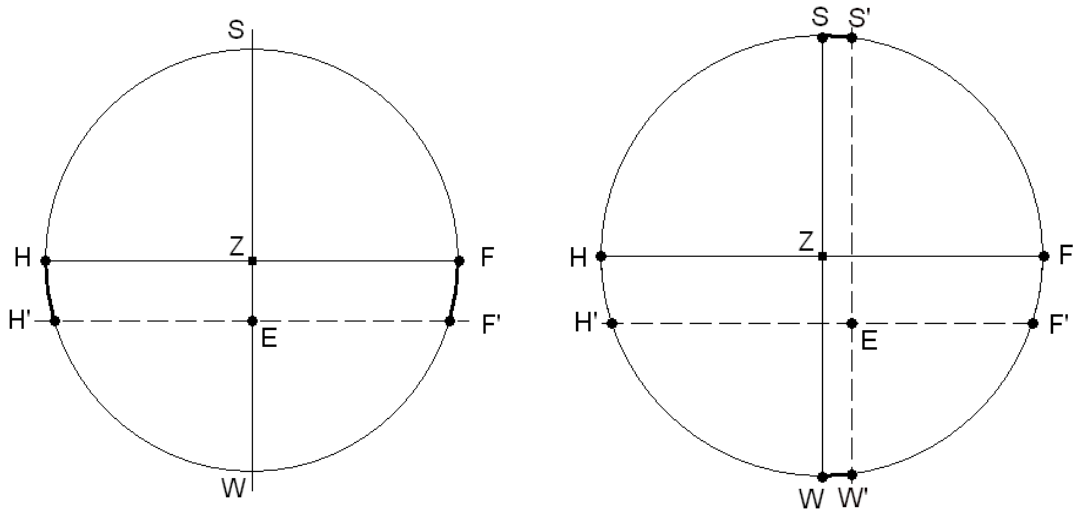


Abbildung 2: Bestimmung der Sonnenpositionen F', S', H' und W' zu den Jahreszeitenanfängen gemäß der Hypothesen 1' und 2, ausgehend von Abbildung 1 links. Linke Seite: nur die Differenz zwischen Sommer- und Winterhalbjahr wird beachtet. Rechte Seite: die linke Abbildung wird so verändert, dass der Sommer länger als der Frühling bzw. der Herbst länger als der Winter wird.

Nachdem die Verschiebung der Erde bzgl. des Zentrums der Sonnenbahn eindeutig berechnet wurde, werden Vorhersagen aus dem Modell abgeleitet und mit Beobachtungsdaten verglichen. Beobachtbar ist z.B. der Winkel α, der von der Erde aus gesehen zwischen der aktuellen Sonnenposition P und der Sonnenposition zu Frühlingsanfang F' liegt (vgl. Abbildung 3). Dieser Winkel soll von den SuS für 4 verschiedene Daten (je Jahreszeit ein Datum) berechnet werden. Für den 1.5.2004 12 Uhr erhält man z.B. (vgl. Abbildung 3): der Bogen F'P wird in 42 Tagen bzw.

der Bogen FP in 40,25 Tagen durchlaufen, also ist $\angle FZP = \frac{40{,}25}{365} \cdot 360° \approx 39{,}7°$. Bezüglich Z hat P daher die Koordinaten $(\cos(39{,}7°) \mid \sin(39{,}7°))$ und bzgl. E die Koordinaten $(\cos(39{,}7° - 0{,}01) \mid \sin(39{,}7°) + 0{,}03) \approx (0{,}76 \mid 0{,}67)$. Also ist $\alpha = \arctan\left(\frac{0{,}67}{0{,}76}\right) \approx 41{,}4°$. In astronomischen Tabellenwerken findet man dagegen α=41,2°. Führt man diesen Vergleich außerdem für den 1.8.2004, 1.11.2004 und 1.2.2005 durch, findet man Abweichungen bis zu 0,6° zwischen den Vorhersagen von Hipparchs Modell und den Beobachtungen (bzw. Berechnungen der Astronomen). Diese kleinen, aber vorhandenen Differenzen werden benutzt, um mit den SuS den Wert von Hipparchs Modell bzw. die Gültigkeit der Hypothesen 1' und 2 zu diskutieren.

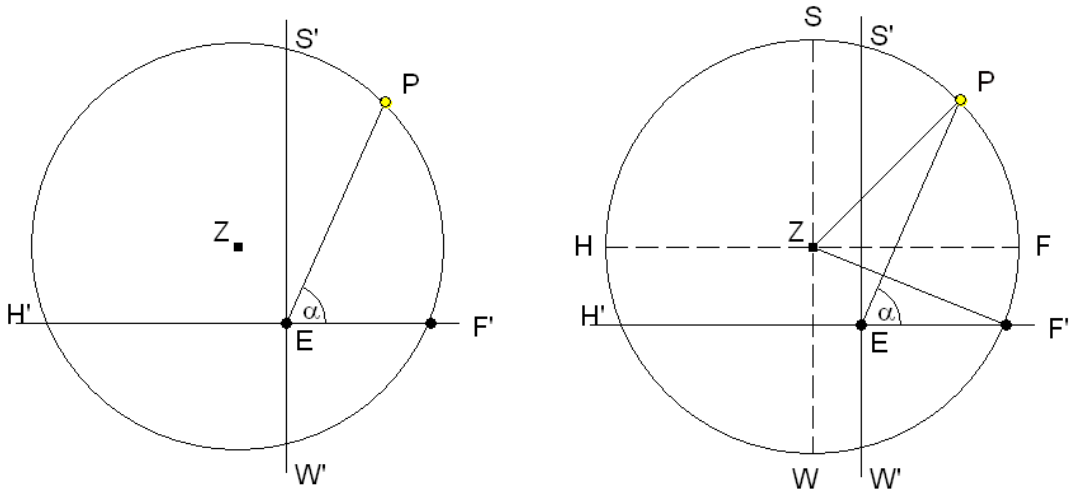


Abbildung 3: Der Winkel α, der von der Erde aus gesehen zwischen aktueller Sonnenposition P und der Sonnenposition zu Frühlingsanfang F' liegt, kann einerseits aus dem Modell berechnet werden und andererseits von Astronomen gemessen werden.

Weiterführende Informationen

Details zur Unterrichtsreihe (z.B. Hintergrundinformationen, Arbeitsblätter) können von der Autorin angefordert werden. Lehrende, die die Unterrichtsreihe durchführen möchten, werden herzlich gebeten, ihre Erfahrungen der Autorin mitzuteilen. Die Autorin ist erreichbar unter der Email-Adresse martina.kleinheinrich@uni-due.de.

Olaf KNAPP und Heinz SCHUMANN, PH Weingarten

Evaluation von Instruktionsvideos für raumgeometrische Konstruktionen

Schüler/-innen sollen sich im Mathematikunterricht Kompetenzen zur Lösung von Problemen mittels adäquater Computerwerkzeuge (CAS, DGS, TKS etc.) aneignen. Dazu gehört das Lernen von Handlungsroutinen für das interaktive Lösen von Problemen zur Begriffsbildung, Satz- und Beweisfindung, zu Berechnungen, Konstruktionen etc. Wir gehen vorerst von der generellen Hypothese aus, dass die Präsentation geeigneter Instruktionsvideos zur Beobachtung des interaktiven Problemlösens bei musterhafter Lösung von Musteraufgaben geeignet ist für effektives selbständiges Lernen, das somit die Lehrkraft unterstützt und entlastet. In diesem Zusammenhang stellt sich die Forschungsfrage: Welche Modi der mittels Bildschirmaufzeichnungen (Screen Recording) generierten und dann nachzubearbeitenden Instruktionsvideos sind im Hinblick auf Reproduktionsleistungen effektiv (Schumann u. Knapp 2005).
Die nachfolgende medientechnologische Einteilung verschafft uns einen ersten Überblick über die Modi solcher Instruktionsvideos:

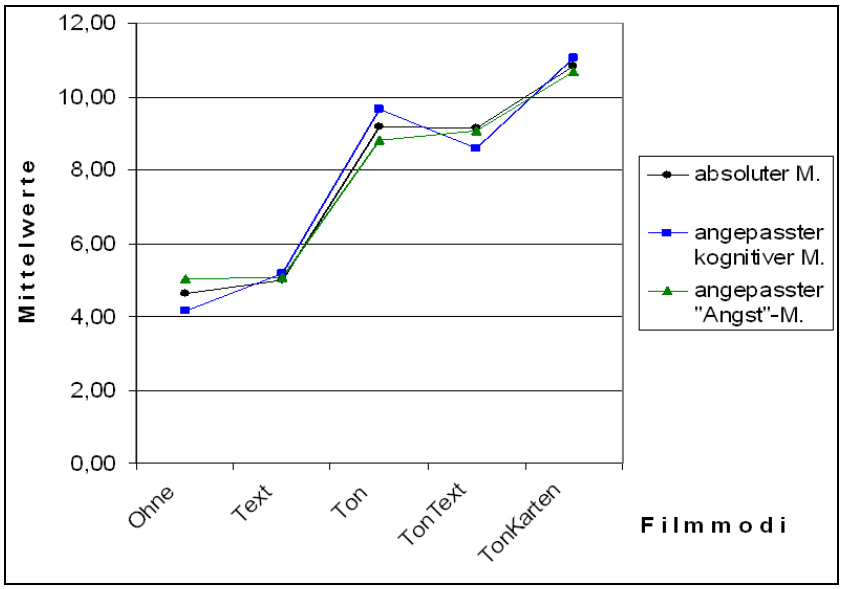
- Film ohne hörbaren Kommentar und ohne Texteinblendungen („Ohne“)
- Film ohne hörbaren Kommentar und mit Texteinblendungen („Text“)
- Film mit hörbarem Kommentar und ohne Texteinblendungen („Ton“)
- Film mit hörbarem Kommentar und mit zeitgleich unterstützenden Texteinblendungen („TonText“)
- Film mit hörbarem Kommentar und ohne zeitgleich unterstützende Texteinblendungen, aber mit Stichwortkarten („TonKarten“)

Es stellt sich die Frage nach der Effektivität dieser verschiedenen Modi hinsichtlich der Reproduktionsleistungen der Schüler/-innen. Wir schränken hier unsere Effektivitätsuntersuchung auf Instruktionsvideos über das interaktive Lösen von geometrischen Konstruktionsaufgaben im virtuellen Raum unter Nutzung des Tools Cabri 3D (Bainville/Laborde 2004) ein, das eine weitere Einteilung von Instruktionsvideos nach Visualisierungen, Manipulationen und Konstruktionen nahelegt (Schumann 2006).
Im Rahmen einer Pilotstudie wurden anhand der Instruktion zu einer Würfelkonstruktion im virtuellen Raum die Reproduktionsleistungen von Schüler/-innen der achten Jahrgangsstufe der Realschule (n = 118) untersucht.
Um intervenierende Variable auf Seiten der Schüler/-innen zu berücksichtigen, wurden diese im Vorfeld einer Reihe von unterschiedlichen

Messungen unterzogen. Die Datenerhebungen erfolgten mittels entsprechender Fragebögen und (Teil-)Tests. Als klassisches statistisches Verfahren zur Prüfung auf Mittelwertsunterschiede wurde die Kovarianzanalyse gewählt, da die Untersuchung aus organisatorischen Gründen nur in intakten Gruppen (Klassen) durchgeführt werden konnte.
Die Messungen möglicher intervenierender Variablen wurden hierbei auf die kognitive Leistungsfähigkeit, das Angstverhalten, die Einstellung und die Computervorerfahrungen mit jeweils ausgewählten Untervariablen beschränkt.
Die Zusammensetzungen der Versuchsklassen wurden hinsichtlich der Geschlechtsanteile, des Alters, der Selbsteinschätzung im Fach Mathematik, des Computerzugangs, der PC-Nutzungsarten und der DGS-Vorkenntnisse jeweils mit deskriptiven und induktiven Statistikverfahren untereinander verglichen, wobei sich bis auf den Umgang mit Tabellenkalkulations- und sonstigen Lernprogrammen keine signifikanten Unterschiede ergaben. Diese ließen sich aber aufgrund der Stichprobenteilgrößen erklären.
Jeder Klasse wurde nach Erhebung der verschiedenen Messwerte für die ausgewählten Einflussvariablen einer der fünf Filme gezeigt. Im Anschluss daran mussten die Schüler/-innen die gezeigte Konstruktion mit Cabri 3D reproduzieren. Eine Prüfung des Behaltens der zu reproduzierenden Konstruktion ist in weiteren Untersuchungen vorgesehen.

Ergebnisse der Pilotstudie

Die verschiedenen Filmmodi zeigen bezüglich der kognitiven Leistungsfähigkeit sehr signifikante Reproduktionsleistungsunterschiede ($p < 0.004$) bei einer Kovarianzanalyse mit den Kovariablen Merk- und Konzentrationsfähigkeit, Denk- und Gliederungsfähigkeit und Raumvorstellungsvermögen.
In Bezug auf das Angstverhalten ergeben sich für die verschiedenen Filmmodi sehr signifikante Reproduktionsleistungsunterschiede ($p < 0.01$) mit den Kovariablen Prüfungsangst, manifeste Angst, Schulunlust und soziale Erwünschtheit.
Hinsichtlich der Selbsteinschätzung im Fach Mathematik und den Computervorerfahrungen lassen sich die absoluten Mittelwerte als Vergleichskriterium heranziehen.
In allen drei vorgestellten (angepassten) Mittelwerten zeigt der Film mit hörbarem Kommentar und ohne zeitgleich unterstützende Texteinblendungen, aber mit Stichwortkarten die höchsten Mittelwerte (vergl. Diagramm).



Diagramm

Hinsichtlich der Geschlechtszugehörigkeit lässt sich feststellen, dass die Jungen bei jedem der vorgestellten fünf Filmmodi höhere Reproduktionsleistungen erbringen als die Mädchen.

Aufgrund weiterer Untersuchungsergebnisse dieser Pilotstudie stellen sich folgende Gesichtspunkte zur Entwicklung und Bewertung von effizienten Instruktionsvideos für raumgeometrische Konstruktionen als besonders relevant heraus:

Darbietungsform
Darbietungsformen für Instruktionsvideos sind u.a. hörbare, bildhafte, textliche und symbolische Kommentare, die sich auf den filmischen Kontext beziehen. Die Darbietung der Informationen sollte klar, eindeutig und verständlich erfolgen, unter Berücksichtigung des Entwicklungsstandes (u.a. Wahrnehmung, Aufmerksamkeit, Denken, Gedächtnis) der Adressaten.

Nur singuläre Darbietungen
Die Informationen sollten nicht doppelt gelagert sein, also entweder textliche Kommentare oder hörbare Kommentare oder filmische Darbietungen (Mauszeigerbewegungen etc.). Die Texteinblendungen sollten in Sprechpausen und die hörbaren Kommentare in Textpausen erfolgen etc.

Darbietungen müssen einander unterstützen
Die dargebotenen Informationen müssen sich aufeinander beziehen und einander unterstützen. Sie sollten zeitnah, aber nicht zeitgleich erfolgen und zueinander im inhaltlichen Zusammenhang stehen.

Schlicht gehaltene Variationen
Innerhalb der verschiedenen Darbietungsformen sollten Veränderungen nur sehr sparsam verwandt werden, so etwa bei hörbarem Kommentar nur die Abwechslung zwischen einer Männer- und einer Frauenstimme. Diese sollten für bestimmte didaktische Zwecke reserviert sein. So könnte etwa eine Frauenstimme immer die Zusammenfassung einzelner Teilschritte und eine Männerstimme immer die Erklärungen innerhalb der Teilschritte darbieten.

Stichwortkarten verwenden
Mit maximal 5 Worten sollte das Wichtigste der nachfolgenden Erklärung zusammengefasst werden und während des gesamten Konstruktionsprozesses sichtbar bleiben. Die hier verwendeten Worte müssen auch gesprochen werden.

Sequentielle finale Zusammenfassung
Am Ende eines jeden Teilschrittes sollte noch einmal eine prägnante Kurzfassung des gerade gezeigten Teilschrittes erfolgen.

Softwareergonomische Prinzipien
Prinzipien der Bildschirmdialoggestaltung wie Aufgabenangemessenheit, Übersichtlichkeit etc. sind zu beachten. Dies gilt sowohl für den gezeigten Inhalt als auch für die Darbietung des Mediums „Instruktionsfilm“.

Die vorgenannten Gesichtspunkte verhalten sich interdependent. Zwischen ihnen besteht ein Kontinuum.

Literatur

Bainville, E., Laborde, J.-M. (2004): Cabri 3D 1.2 (Software). Grenoble: Cabrilog. Deutsche Version (Bearbeitung von H. Schumann) zu beziehen von www.cotec.de
Dörr, G. (1997): Fernsehen und Lernen – attraktiv und wirksam? München: Oldenbourg
Issing, L.J., Klimsa, P. (Hrsg.) (2002): Information und Lernen mit Multimedia und Internet. 3. Auflage. Weinheim: Beltz
Kerres, M. (2001): Multimediale und telemediale Lernumgebungen. Konzeption und Entwicklung. 2. Auflage. München: Oldenbourg
Kleiter, E.F. (1988, 1990): Lehrbuch der Statistik in KMSS. Band 1/1 Übersicht und niedrig-komplexe Verfahren, Band 1/2 Niedrig-komplexe Verfahren. Weinheim: Deutscher Studien Verlag
Schumann, H. (2006): Gestaltung einer interaktiven Lernumgebung für synthetische Raumgeometrie. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Hildesheim: Franzbecker
Schumann, H., Knapp, O. (2005): Instruktionsvideos für das Arbeiten mit Computerwerkzeugen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 537-540
Folgende Tests wurden verwendet: Angstfragebogen für Schüler, Deutsche Fassung des MRT, Test d 2 Aufmerksamkeits-Belastungs-Test, Lern und Gedächtnistest LGT3, Prüfsystem für Schul- und Bildungsberatung (Hogrefe)

Evelyn KOMOREK, Darmstadt

Mit Hausaufgaben Anlässe für eigenverantwortliches Lernen schaffen und Problemlösekompetenzen fördern

Im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms BIQUA[1] wurde an der TU Darmstadt in Zusammenarbeit mit Mathematiklehrkräften ein Hausaufgabenkonzept für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I entwickelt, das neueste Forschungsergebnisse zu Mathematikhausaufgaben, zu Problemlösen und zu Selbstregulation mit bewährten Methoden zum Arbeiten mit Hausaufgaben verbindet (vgl. Abbildung 1).

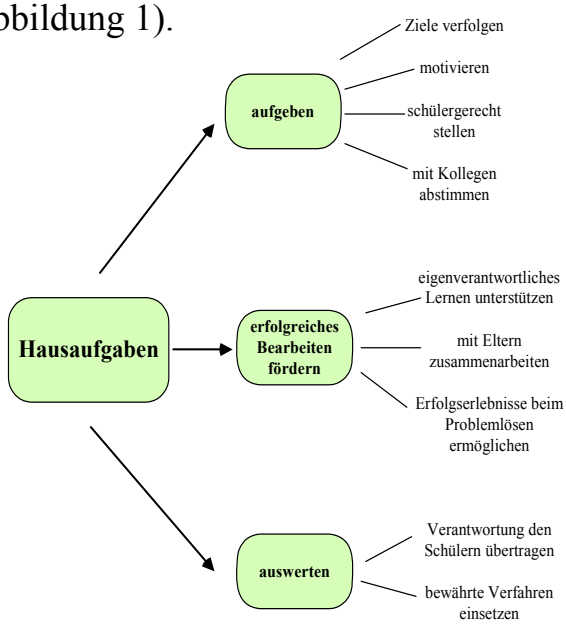


Abbildung 1

Hausaufgaben haben im deutschen Schulalltag eine lange Tradition, schon 1464 wurden sie in der Bayreuther Schulordnung erwähnt. Über die Jahrhunderte hinweg wurden Hausaufgaben (u.a. Inhalte, Funktionen und Bearbeitungszeit) immer wieder kritisch diskutiert (vgl. Schönbrunn, 1989). Ein großer Teil des Lernens der Schülerinnen und Schüler findet auch gegenwärtig außerhalb des Unterrichts in Verbindung mit Hausaufgaben statt. Wenn es gelingt, diese Zeit sinnvoll zu nutzen, dann können Hausaufgaben einen wertvollen Beitrag zum Erwerb mathematischer Bildung leisten.

Hausaufgaben stellen

Hausaufgaben können mit den unterschiedlichsten Zielen gestellt werden, beispielsweise zum Üben, Anwenden, Vertiefen, Sammeln persönlicher Problemlöseerfahrungen, Vorbereiten von Unterricht oder Leistungsbewertungen u.a. mehr. In Abhängigkeit vom gewählten Ziel für eine Hausaufgabe, ergeben sich die Hausaufgabeninhalte und Bearbeitungsformen. Dabei sind genau wie für den Unterricht auch für die Hausaufgaben zeitgemäße Mathematikaufgaben das wichtigste „Werkzeug“, das zur Planung zur Verfügung steht.[2]

[1] Bildungsqualität von Schule

[2] Zum zeitgemäßen Arbeiten mit Aufgaben vgl. Bruder (2003) sowie Büchter und Leuders (2005).

Wenn die Schülerinnen und Schüler erfahren können, dass in Abhängigkeit von den angestrebten Lernzielen unterschiedliche Lernhandlungen und Vorgehensstrategen eingesetzt werden können und wenn es im Unterricht immer wieder Gelegenheit gibt, dieses zielabhängige Vorgehen zu reflektieren, dann können Schlüsselkompetenzen für lebenslanges Lernen entstehen. Voraussetzung ist, dass die Schülerinnen und Schüler die jeweiligen Hausaufgabenziele kennen und auch den vorgesehenen zeitlichen Rahmen. Sonst kann es immer wieder geschehen, dass bei schwierigen Aufgaben zu schnell aufgegeben oder auch unangemessen lange erfolglos probiert wird.

Um ein möglichst kontinuierliches Interesse für Hausaufgaben zu wecken, sollten die Hausaufgaben an die Interessensgebiete der Lernenden anzuknüpfen. Erkundungsaufgaben von der Recherche im Internet über Interviewaufträge bis zum Sammeln mathematikhaltiger Artikel aus Zeitungen und Zeitschriften eignen sich ebenfalls zur Unterstützung der Hausaufgabenmotivation. Auch experimentelle Hausaufgaben können dazu einen Beitrag leisten, z.B. Würfelexperimente in der Stochastik. Wenn es gelingt, Schülerinnen und Schüler durch das Bearbeiten der Hausaufgaben zu Erfolgserlebnissen und Anerkennung zu verhelfen, kann sich Leistungsmotivation entwickeln. Hierzu sind anforderungsdifferenzierende Aufgabenstellungen geeignet. Schließlich kann das Arbeiten mit ideellen Belohnungssystemen wie der Ankündigung einer mündlichen Note Schülerinnen und Schüler zum engagierten Anfertigen der Hausaufgaben anregen.

Eine von Perels (2006) durchgeführte Studie zeigt, dass ohne konkret gestellte Aufgaben zu Hause für Mathematik kaum gelernt wird. Regelmäßige Hausaufgaben, die im Unterricht auch inhaltlich besprochen werden, stehen in einem positiven Verhältnis zur Mathematikleistung (vgl. Lipowsky u.a., 2004). Deshalb kommt dem regelmäßigen Stellen von Hausaufgaben eine große Bedeutung zu.

Erste Voraussetzung für eine erfolgreiche Hausaufgabenbearbeitung ist, dass die Lernenden wissen, was von ihnen erwartet wird und welche Aufgaben zu bearbeiten sind. Eine Möglichkeit zu überprüfen, ob die Hausaufgaben richtig verstanden wurden, besteht z.B. darin, dass eine Schülerin oder ein Schüler die Hausaufgabenstellung für alle wiederholt und dass die gesamte Klasse die Möglichkeit erhält, Fragen zu stellen. Um dem Vergessen vorzubeugen, sollten alle Hausaufgaben notiert werden. Das Führen eines Hausaufgabenhefts für alle Fächer wird empfohlen. Es kann die Schülerinnen und Schüler bei der eigenständigen Lernplanung unterstützen. Zum Fördern vernetzten Denkens bieten sich fächerübergreifende Hausaufgaben an.

Erfolgreiches Bearbeiten der Hausaufgaben fördern

Die Hausaufgaben werden dann eigenständig und erfolgreich bearbeitet werden, wenn die Lernenden durch den Unterricht bereits an ein systematisches und strukturiertes Vorgehen beim Bearbeiten von Aufgaben gewöhnt sind und wenn sie gelernt haben, Lernstrategien einzusetzen. Andererseits bieten die Hausaufgaben die Möglichkeit entsprechend der individuellen Präferenzen eigene Vorgehensweisen zum erfolgreichen Lernen zu trainieren und zu verfestigen. Vor dem Lernen geht es darum Ziele zu setzten, das Lernen zu planen, sich selbst zu motivieren und die Arbeitsmaterialien bereitzulegen. Während des Lernens müssen Lernstrategien angewendet und „Ablenker“ erfolgreich abgewehrt werden. Falls nötig muss Hilfe gesucht und mit Fehlern umgegangen werden. Die Selbstreflexion nach dem Lernen ist eine grundlegende Komponente für den Lernerfolg. Ohne Analyse und Bewertung der erzielten Ergebnisse, des Vorgehens und des eigenen Verhaltens ist keine Veränderung möglich. Um Selbständigkeit und Eigenverantwortlichkeit zu entwickeln und um das Setzen und Verfolgen realistischer Ziele zu trainieren, eignen sich besonders längerfristige Hausaufgaben, mit einem Bearbeitungszeitraum von einer Woche und mehr. Bei dieser Art der Hausaufgaben ist es möglich, den Schülerinnen und Schülern im Unterricht Gelegenheit zu geben, Fragen zu den Hausaufgaben zu stellen.

Viele Eltern möchten ihre Kinder beim häuslichen Lernen unterstützen. Diese Bereitschaft kann genutzt werden, um bei den Eltern für eine pädagogisch sinnvolle Unterstützung zu werben. Es sollte offen über die Art und das Ausmaß der erwarteten elterlicher Mithilfe informiert werden. Weitere nützliche Hilfen für Eltern stellen Informationen über zweckmäßige Arbeitsbedingungen, angemessene Arbeitplätze, günstige Arbeitszeiten im Tagesverlauf, günstige Lern und Arbeitstechniken dar.

Voraussetzung zum erfolgreichen Problemlösen sind neben solidem Basiswissen, heuristischer Bildung und Anstrengungsbereitschaft auch Problemlöseerfahrungen. Diese können Schülerinnen und Schüler nur selbst durch das Bearbeiten individuell schwieriger Aufgaben erwerben. Hausaufgaben, besonders längerfristige, sind dafür geeignet, da hier Binnendifferenzierung bezüglich der Lernleistung gut umgesetzt werden kann.

Hausaufgaben auswerten

Damit Schülerinnen und Schüler wissen, ob ihre Lösungen korrekt sind und damit sie gegebenenfalls erkennen können, wo sie Fehler gemacht haben bzw. wo ihre Schwächen liegen, ist ein inhaltliches Auswerten der Hausaufgaben nötig, eine formale Kontrolle des Anfertigens der Hausaufgaben reicht nicht aus. Zudem können über das Aufgreifen und Würdigen

von Hausaufgaben im Unterricht selbst leistungsschwächere Lernende Anerkennung erfahren.

Kurzfristige, weniger komplexe Hausaufgaben werden oftmals im Lehrer-Schüler-Gespräch verglichen. Die Schülerinnen und Schüler können beim Auswerten der Hausaufgaben Verantwortung für ihr Lernen übernehmen, indem sie mit Hilfe von Musterlösungen ihre Lösungen überprüfen. Beim Zusammenstellen von Lösungsblättern kann auf Schülerlösungen zurückgegriffen werden. Weitere Formen der Hausaufgabenauswertung, die die Lernenden einbinden, sind Partner oder Gruppenkontrolle, gegebenenfalls nach Wahlaufgaben differenziert. Die Gruppenarbeit bietet den Vorteil, dass mehrere Schülerinnen und Schüler Gelegenheit erhalten, über ihre Aufgaben zu kommunizieren. Weiterhin eignen sich Schülervorträge entweder mit einer zu Hause vorbereiteten Lösungsfolie oder an der Tafel.

Probleme, die beim Anfertigen der Aufgaben aufgetreten sind, werden erfragt und besprochen. Eine Möglichkeit, um das Anfertigen der Hausaufgaben zu gewährleisten, besteht darin, diese stichprobenmäßige einzusammeln und zu korrigieren. Dies bietet zudem eine Möglichkeit für individuelle Rückmeldungen. Es wird empfohlen, für das Auswerten kurzfristiger Hausaufgaben etwa fünf Minuten, für umfangreichere längerfristige Hausaufgaben nicht mehr als 15 Minuten zu verwenden. Nicht alle von den Schülerinnen und Schülern angesprochenen Fragen müssen im Unterricht und von der Lehrerin oder dem Lehrer beantwortet werden. Bereitet eine bestimmte Aufgabe mehreren Schülerinnen und Schülern Probleme, kann diese erneut zur Bearbeitung zu Hause gestellt werden, wenn sich nach gemeinsamen Überlegen im Plenum Lösungsansätze abzeichnen.

Literatur

Bruder, R. (2003): Kostruieren auswählen begleiten. Über den Umgang mit Aufgaben. In: Friedrich Jahresheft 2003, S. 12-15. Seelze: Friedrich Verlag.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Klieme, E., Reusser, K. und Pauli, C. (2004): Hausaufgabenpraxis im Mathematikunterricht – eine Thema für die Unterrichtsqualitätsforschung? In: Doll, J. & Prenzel, M. (Hrsg.): Studien zur Verbesserung der Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung, S. 250-266. Münster: Waxmann.

Perels, F., Löb, M., Schmitz, B. und Haberstroh, J. (2005, in Vorbereitung): Hausaufgabenverhalten aus der Perspektive der Selbstregulation. Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie.

Schönbrunn, G. (1989): Hausaufgaben in der pädagogischen Diskussion. In: Der Mathematikunterricht 35, Heft 3, S. 521.

Maria Korcz, Edyta Nowińska, Adam Mickiewicz Universität Poznań

Visualisierung der Rechnungen auf konvexen Mengen

In Poznań findet jedes Jahr ein Festival für Wissenschaft und Kultur statt, das zum Ziel hat, Wissenschaft zu Popularisieren und Forschungen in einer attraktiven und für alle Besucher anziehenden Form darzustellen. Mathematik ist zwar eine formale Wissenschaft, aber auch in ihrem Bereich kann man Probleme finden, die einerseits Gegenstand für aktuelle Forschungen sind, andererseits lassen sich einige von ihren Aspekten in einer für Laien zugänglichen Form darstellen. Zu solchen Forschungsgebieten gehört Arithmetik konvexer Mengen[1]. In diesem Artikel präsentieren wir einen Vorschlag zur Visualisierung interessanter Probleme aus dem Bereich Arithmetik konvexer Mengen.

1.Operationen auf konvexen Mengen

Für kompakte konvexe Mengen $A,B \subset R^n$ und für $\lambda \in R$ definiert man folgende Operationen:

- Minkowski-Summe: $A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$;
- Produkt der Menge A durch den Faktor λ: $\lambda A := \{\lambda a \mid a \in A\}$;
- Minkowski-Differenz: $A-B := A \oplus (-B)$, wobei $-B := \{-b \mid b \in B\}$.

2. Konvexe Hülle

Konvexe Hülle einer Menge $A \subset R^n$ ist die kleinste konvexe Menge in R^n, die die Menge A enthält. Sie wird als conv(A) bezeichnet. Die konvexe Hülle zweier Teilmengen A und B aus R^n bezeichnet man $A \vee B := \text{conv}(A \cup B)$. Die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge heißt (konvexes) Polytop.

Beispiel 1.

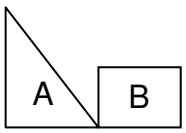


Abb. 1

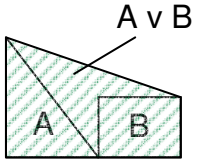


Abb. 2

[1] An der Adam Mickiewicz Universität in Poznań (Fakultät Mathematik und Informatik) beschäftigt sich mit dieser Problematik eine Gruppe von Wissenschaftlern unter der Leitung von Prof. Ryszard Urbański. Forschungen werden in einer Zusammenarbeit mit Prof. Diethard Pallaschke realisiert. In dieser Zusammenarbeit haben sie das Buch "Pairs of Compact Convex Sets, Fractional Arithmetic with Convex Sets", (Serie Mathematics and Its Applications, vol.548, Kluwer Academic Publisher 2002, Dortrecht-Boston-London) herausgegeben.

3. Minkowski-Summe für kompakte konvexe Mengen

Die Minkowski-Summe zweier konvexen Mengen lässt sich algebraisch, durch Umreißen der Mengen und durch Ordnen der Seiten bestimmen. Wir werden zwei dieser Möglichkeiten präsentieren.

3.1 Minkowski-Summe (algebraisch)

Die Minkowski-Summe zweier konvexen Mengen ist wieder eine konvexe Menge. Um diese algebraisch zu bestimmen reicht es nur die Spitzenpunkte der neuen Menge zu berechnen. Diese werden nach der Definition der Minkowski-Summe berechnet.

Beispiel 2

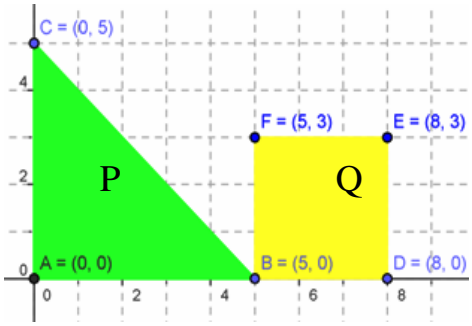


Abb. 3

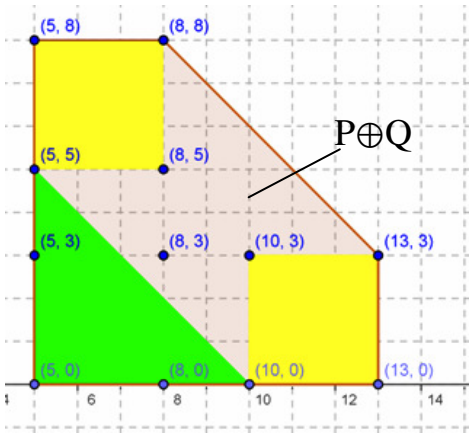


Abb. 4

Für die Spitzenpunkte der Menge P und Q haben wir folgende Ergebnisse:
A+B=(5,0), B+B=(10,0), C+B=(5,5), A+D=(8,0), B+D=(13,0), C+D=(8,5), A+E=(8,3), B+E=(13,3), C+E=(8,8), A+F=(5,3), B+F=(10,3), C+F=(5,8).

3.2 Minkowski-Summe (Umreißen der Menge)

Bei konvexen Mengen kann die Berechnung der Minkowski-Summe sehr leicht graphisch erfolgen: man schiebt ein Polytop auf dem Rand des anderen entlang und der überdeckte Bereich ist die Minkowski-Summe. Diese Methode erfolgt daraus, dass man die Minkowski-Summe als die Vektorsumme auffassen kann. Für Visualisierung dieser Methode ist es möglich, verschiedene mathematische Werkzeuge, sowohl didaktische Spielzeuge als auch Computerprogramme wie z.B. das Programm GeoGebra, anzuwenden. Mit diesem einfachen Programm lassen sich interessante Eigenschaften der Minkowski-Summe darstellen. Beispielweise kann man auf Grund einer Animation zeigen, dass sich die Form der Minkowski-Summe A⊕B nicht ändert, wenn man die Lage von A und B in dem Koordinatensystem ändert. Bei der Verschiebung der gegebenen Mengen ändert sich nur die Lage des Ergebnisses.

Beispiel 3
An diesem Beispiel zeigen wir Schritte, die zur Bestimmung der Minkowski-Summe durch Umreißen der Mengen führen.

Abb. 5

4.Äquivalenzrelation für Paare konvexer Mengen

Sei $K(R^n)$ die Menge aller kompakten konvexen Mengen des Euklidschen Raum R^n. In dem Produkt $K(R^n)\times K(R^n)$ definiert man die Äquivalenzrelation **~ :** $(A,B) \sim (C,D) \Leftrightarrow A\oplus D = B\oplus C$.

Ein Paar (A,B) ist als Minimaldarstellung definiert, bzw. heißt minimal, falls es kein äquivalentes Paar (C,D) gibt, das echt kleiner ist, d.h. $C \subset A$, $C \neq A$ und $D \subset B$, $D \neq B$.

5.Analogie von kompakten konvexen Mengen und natürlichen Zahlen

Fasst man die Minkowski-Summe als Produkt und die konvexe Hülle als Summe zweier kompakten konvexen Mengen auf, dann bilden diese eine kommutative Halbgruppe mit Addition genau so wie die natürlichen Zahlen $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$.

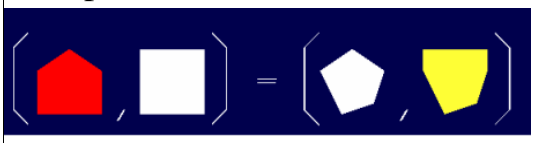
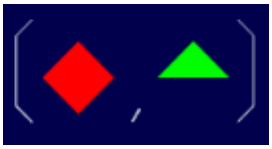
Mit Hilfe von einfachen mathematischen Werkzeugen lassen sich Analogien von kompakten konvexen Mengen und natürlichen Zahlen leicht visualisieren. In der Tabelle A stellen wir die wichtigsten Analogien, die schon für Gymnasialisten verständlich sein können, zusammen.

6. Historische Symbole und Kunst

Unter minimalen Paaren kompakter konvexer Mengen sind viele historische Symbole zu finden, zu denen auch der David Stern gehört. Konvexe Mengen findet man auch in der Kunst. Auf dem Bild Melancholie von Albrecht Dürer befindet sich, unter vielen mathematischen Symbolen, eine konvexe Menge aus dem Raum R^3, die sich als die Minkowski-Summe konvexer Mengen darstellen lässt [2].

[2]Eine Gruppe von Wissenschaftlern aus Poznań, unter der Leitung von Prof. Ryszard Urbański, versucht diese Menge als Minkowski-Summe kompakten Mengen darzustellen. Ergebnisse Ihrer Forschungen werden bald in einem Artikel veröffentlicht.

Tabelle A: Analogien von konvexen kompakten Mengen und natürlichen Zahlen.

Kompakte konvexe Mengen	**Natürliche Zahlen**
Konvexe Hülle (A v B): A v B = B v A; (A v B) v C=A v (B v C).	Addition (a + b): a + b = b + a; (a + b) +c = (a+ b) +c.
Distributivgesetz: A ⊕ (B v C) = (A ⊕ B) v (A ⊕ C).	Distributivgesetz: a * (b + c) = a*b + a*c.
Minkowski-Addition und Minkowski-Subtraktion sind nicht gegenseitig umgekehrte Operationen: A- B = C $\not\Leftrightarrow$ C ⊕ B = A.	Addition und Subtraktion sind gegenseitig umgekehrte Operationen: a – b = c ⇔ c+ b = a.
Äquivalenzrelation: (A,B) ~ (C,D) ⇔ A ⊕ D = B ⊕ C.	Äquivalenzrelation: (a,b) ~ (c,d) ⇔ ad = bc.
Die äquivalenten Paare von kompakten konvexen Mengen fasst man als Brüche auf. Beispiel 	Die Äquivalenzklasse entspricht der Definition eines Bruches: Beispiel (1,2) ~ (2,4)
Minimale Paare kompakter konvexer Mengen werden als teilerfremde Brüche gesehen. Beispiel Teilerfremder Bruch.  Nicht teilerfremder Bruch.	In N sind bezüglich der Ordnung „≤" die minimalen Paare genau die teilerfremden Brüche. Beispiel In der Äquivalenzklasse 1/2= 2/4=3/6=… ist das Paar (1,2) minimal und der Bruch 1/2 ist teilerfremd.
Das minimale Paar ist nicht eindeutig bestimmt[3].	Das minimale Paar ist eindeutig bestimmt (das erfolgt daraus, dass die Primfaktorzerlegung eines Elementes bis auf die Permutation eindeutig ist).

[3] Den Fall für die Ebene konnten Stefan Scholtes, Karlsruhe, und Jerzy Grzybowski, Poznań, in ihren Disertationen klären.

Stefan KRAUSS[1], Jürgen BAUMERT[1], Werner BLUM[2], Michael NEUBRAND[3], Alexander JORDAN[2], Martin BRUNNER[1], Mareike KUNTER[1] und Katrin LÖWEN[1] [1] Berlin, [2] Kassel, [3] Oldenburg

Die Konstruktion eines Tests zum fachlichen und zum fachdidaktischen Wissen von Mathematiklehrkräften

1. Zur Konzeption des Tests

Das Fachwissen und das fachdidaktische Wissen sind aus fachspezifischer Sicht elementare Bausteine des Professionswissens von Lehrkräften (bei Shulman, 1986, als *content knowledge* und als *pedagogical content knowledge* konzeptualisiert). Im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms BIQUA (Bildungsqualität von Schule) wurde im Projekt COACTIV (Berlin/Kassel/Oldenburg) ein Test entwickelt, der das Fachwissen und das fachdidaktische Wissen von Mathematiklehrkräften misst (ausführlichere Informationen zur Gesamtrationale der COACTIV-Studie sowie eine Beschreibung weiterer im Rahmen dieser Studie entwickelten Instrumente finden sich im Beitrag von M. Neubrand in diesem Band).

Eine empirische Untersuchung dieser beiden Wissensbereiche erfordert die Entwicklung von Skalen direkt „aus dem Fach heraus“ (im Gegensatz zu den mittlerweile empirisch bewährten, aber fachunspezifischen Unterrichtsskalen, siehe z.B. Gruehn, 2000). Die in COACTIV erfolgte Konstruktion entsprechender Items für Mathematiklehrkräfte ist wissenschaftliches Neuland und soll in diesem Beitrag ausführlich beschrieben werden. Insbesondere soll dabei auf die Konzeptualisierung des fachdidaktischen Wissens, das maßgeblich zur Gestaltung fachlich gehaltvoller Lernumgebungen beiträgt (Blum, 1999), eingegangen werden.

Unterrichten ist die Verhandlung fachlicher Inhalte mit Schülern. In Anlehnung an diese theoretischen Eckpfeiler von Mathematikunterricht wurden in COACTIV drei Subtests für fachdidaktisches Wissen entwickelt. Dabei steht im Folgenden (1) exemplarisch für das *didaktische Wissen über Inhalte*, (2) exemplarisch für das *didaktische Wissen über Schüler* und (3) exemplarisch für das *didaktische Wissen über Verhandlung*:

Subtest (1): Wissen über multiple Lösbarkeit von Mathematikaufgaben

Aufgaben stellen im Mathematikunterricht eine zentrale Trägerform mathematischer Inhalte dar. Das Potential von Aufgaben für die Unterstützung von Lernprozessen kann u.a. über deren multiple Lösbarkeit erschlossen werden (für eine empirische Bestätigung der lernförderlichen Wirkung multipler Lösungswege siehe z.B. Große, 2005). Zur Operationalisierung des didaktischen Wissens über Inhalte wurden vier (auch für Schüler ge-

eignete) Mathematikaufgaben gewählt, jeweils mit der Instruktion für die Lehrkraft, möglichst viele substantiell verschiedene Lösungswege anzugeben (siehe Beispielitem „Nachbarzahlen“ im Beitrag von Neubrand).

Subtest (2): Didaktisches Wissen über fachliche Schülerkognitionen

Um Unterricht adaptiv gestalten zu können, muss eine Lehrkraft über Kenntnisse zu typischen inhaltlichen Schülerkognitionen verfügen. Nach Matz (1982) offenbaren vor allem Probleme und Fehler das implizite Wissen des Problemlösers und machen kognitive Prozesse so oftmals überhaupt erst erkennbar. Um Schülerfehler und typische Schwierigkeiten als eine didaktische Chance für verständnisvolles Lernen nutzbar zu machen, muss eine Lehrkraft Schülerfehler erkennen, konzeptuell einordnen und analysieren können. Zur Operationalisierung des didaktischen Wissens über Schüler wurden acht Unterrichtssituationen konstruiert, in denen Schülerfehler oder Schwierigkeiten erkannt und/oder analysiert werden mussten (siehe Beispielitem „Hoch Null“ im Beitrag von Neubrand).

Subtest (3): Didaktisches Wissen über lokale Vermittlungsstrategien

Die Wissenskonstruktion des Schülers kann oft nur mit instruktionaler Anleitung gelingen. Zur Operationalisierung des didaktischen Wissens über Verhandlung wurden acht Situationen aus dem Mathematikunterricht konstruiert, in denen die unmittelbare Unterstützung lokaler Verständnisprozesse erforderlich war (siehe Beispielitem „Minus mal minus“ im Beitrag von Neubrand). Da profundes Wissen über mathematische Repräsentationen die Verfügbarkeit eines großen Repertoires zum Erklären mathematischer Sachverhalte bedeutet, wurde dabei ein Schwerpunkt auf solches Wissen gesetzt.

Das fachdidaktische Wissen wurde somit mit insgesamt 24 Items operationalisiert. In Abgrenzung zum fachdidaktischen Wissen wurde auch ein Test zum Fachwissen von Mathematiklehrkräften (4) konstruiert:

(4) Fachwissen

Das Fachwissen wurde in COACTIV als vertieftes Hintergrundwissen über den Schulstoff gefasst (in Anlehnung an Shulman, 1986). In diesem Test wurden den Lehrkräften insgesamt dreizehn Aufgaben (mit vergleichsweise hohem Schwierigkeitsniveau, aber explizit *kein* ausgewiesenes Universitätswissen) vorgelegt. Eine Beispielaufgabe dafür ist:

„Ist $2^{1024} - 1$ eine Primzahl?“[1]

[1] Nein, denn es gilt: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Demnach lässt sich $2^{1024} - 1$ zerlegen in $(2^{512} - 1)(2^{512} + 1)$.
(Dieses Item wurde der Pilotierungsphase entnommen).

Insgesamt wurde das Fachwissen und das fachdidaktische Wissen der Mathematiklehrkräfte also anhand von 37 Items erfasst. Neu (im Vergleich zu den meist fachunspezifischen Unterrichtsskalen) ist dabei nicht nur die dezidiert fachspezifische Ausrichtung, ein entscheidender Schritt ist vor allem auch die *direkte Testung* dieser Konstrukte (falls überhaupt, wird das Fachwissen von Lehrkräften üblicherweise distal, z.B. über Examensnoten, „erhoben"). Da die Erfassung der fachlichen Kompetenzen von Schülern durch direkte Leistungstests selbstverständlich sind, ist es erstaunlich, dass es sich bei der direkten Erfassung des fachbezogenen Professionswissens von Lehrkräften weitestgehend um Forschungsneuland handelt.

2. Zur Testkonstruktion

Im Folgenden soll das Vorgehen bei der Testkonstruktion und der Auswertung geschildert werden: Das erste Problem war, Items mit geeignetem Schwierigkeitsgrad zu finden, da Items, die von fast allen Lehrkräften bzw. von kaum einer Lehrkraft gelöst werden können, vermieden werden mussten. Mithilfe mehrerer Pilotierungsrunden konnten Items gefunden werden, die prinzipiell für Lehrkräfte aller Schulformen lösbar waren (und die auch eine hohe „face-validity" hatten, d.h., auch die Lehrkräfte selbst waren der Meinung, dass durch diese Items relevantes fachliches bzw. fachdidaktisches Wissen getestet wird). Ein weiteres Problem war, dass es für fachdidaktische Items oft keine eindeutig normativ richtigen Antworten gibt: Welche Analyse eines Schülerfehlers z.B. ist „richtig"? Welche Erklärung eines mathematischen Sachverhalts ist „didaktisch geeignet"? Unter Einbeziehung von Fachdidaktikern *und* von Lehrkräften wurde ein Kategorienschema entwickelt, dass es den Testauswertern ermöglichen sollte, ihre Beurteilungen objektiven Kriterien anzupassen (Kriterien für eine „didaktisch geeignete Lehrerantwort" waren beispielsweise eine sehr hohe Übereinstimmung unter den Testkonstrukteuren bzw. eine in der Literatur zu findende empirische Bestätigung einer „didaktisch angemessenen" Vermittlungsstrategie)[2]. Die Durchführung des Tests geschah unter Aufsicht eines Testleiters (in den meisten Fällen am Nachmittag des PISA-Testtages). Bei der Auswertung wurde jede Lehrerantwort von zwei unabhängigen Ratern beurteilt, dabei konnte eine befriedigende Übereinstimmung erreicht werden (die Interraterreliabilität lag in der Regel bei über .80).

[2] Die Schwierigkeit, „didaktisch richtige" Antworten zu identifizieren, ist auch einer der Gründe, warum weitere in COACTIV implementierte Paradigmen, die eindeutig der Fachdidaktik zuzuordnen sind (wie zum Beispiel die Auswahl und die Anordnung von Aufgaben bzw. die Einschätzung von zur Lösung von Mathematikaufgaben benötigten Kompetenzen; siehe Beitrag von Neubrand) nicht in den Fachdidaktik-*Test* integriert wurden (für die in COACTIV implementierten Videosequenzen geben die Lehrerantworten z.B. eher didaktische *Orientierungen* als didaktisches *Wissen* wieder).

Für die einzelnen Skalen ergaben sich folgende Reliabilitäten: Für die Subskala „Aufgaben“ ergab sich ein Cronbach α von .55 (4 Items), für die Subskala „Schülerkognitionen“ ein α von .54 (8 Items), und für die Subskala „Vermittlung“ ein α von .64 (12 Items). Für die aus diesen Items gebildete Gesamtskala „fachdidaktisches Wissen“ ergab sich ein α von .78 (24 Items) und für die Skala „Fachwissen“ ein α von .83 (13 Items).

Unter psychometrischen Gesichtspunkten ist es also gelungen, sowohl eine reliable Testskala für das fachdidaktische Wissen als auch eine für das Fachwissen zu konstruieren. Die Subtests des fachdidaktischen Wissens dagegen müssen mit Vorsicht interpretiert werden.

3. Erste deskriptive Ergebnisse

Abschließend sollen noch einige erste Ergebnisse auf deskriptiver Ebene berichtet werden: Weder für das Fachwissen noch für das fachdidaktische Wissen ergaben sich signifikante Unterschiede bezüglich Alter oder Geschlecht der Lehrkräfte. Im Vergleich zu den anderen Schulformen haben Gymnasiallehrkräfte jedoch einen signifikanten Vorsprung in beiden Wissensbereichen (der beim Fachwissen noch deutlicher ausgeprägt ist). Erste Ergebnisse zur Struktur des Wissens sind: Die fachdidaktischen Subfacetten korrelieren untereinander sehr hoch (eine geeignete Erklärung eines mathematischen Sachverhaltes erfordert z.B. meist auch didaktisches Wissen über Inhalte bzw. Wissen über Schülerkognitionen). Die Korrelation zwischen Fachwissen und fachdidaktischem Wissen (als Gesamtskala) ist ebenfalls hoch, aber differentiell bezüglich der Schulformen: Sie fällt für Gymnasiallehrkräfte noch einmal höher aus als für Lehrkräfte anderer Schulformen.

In zukünftigen Analysen wird es darum gehen, gemeinsame Modelle mit weiteren in COACTIV erhobenen Skalen zu entwickeln und anhand der Daten zu überprüfen. Von besonderem Interesse wird dabei natürlich der Zusammenhang der beiden hier vorgestellten Wissensbereiche mit dem in der PISA Studie 03/04 erhobenen Leistungszuwachs der Schüler sein.

Literatur

Blum, W. (1999). Unterrichtsqualität am Beispiel Mathematik – was kann das bedeuten, wie ist das zu verbessern? In: *SEMINAR - Lehrerbildung und Schule, 4*, S 8-16.

Gruehn, S. (2000). Unterricht und Lernen. Schüler als Quellen der Unterrichtsbeschreibung. Waxmann.

Große, C.S. (2005). Lernen mit multiplen Lösungswegen. Waxmann.

Matz, M. (1982). *Towards a process model for high school algebra errors*. In: Sleeman, D. & Brown, J.S.: Intelligent Tutoring Systems, S. 25-50. Academic Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational researcher, 15 (2)*, S. 3-14.

Günter KRAUTHAUSEN, Hamburg

ZAHLENFORSCHER® – eine innovative Software-Reihe (Kl. 2-6)

1 Zur Entwicklung von HiQ-Software

Die vielfach kritisierte Qualität marktüblicher Lernsoftware ist mit- wenn nicht gar maßgeblich verursacht durch die ungenügende Beachtung tragender Säulen, ohne die eine didaktisch hochwertige Software kaum entwickelt werden kann. Bei der Konzipierung und Entwicklung des ZAHLENFORSCHERS wurden diese Grundsätze konsequent zu realisieren versucht:

- *Konstruktive Entwicklungsforschung:* Software-Entwicklung ist nicht nebenbei oder vom grünen Tisch zu erledigen. Das genannte Forschungs-Paradigma hingegen stellt einen geeigneten Rahmen dar und kann als solches nur unter entsprechenden Bedingungen realisiert werden. Diese sind naturgemäß auch mit entsprechenden Entwickliúngszeiträumen und nicht unerheblichen Investitionen verbunden sind, zu denen sich insbesondere Verlage klar bekennen müssen, wenn sie wirklich an Qualitätsprodukten interessiert sind.
- *Partizipative und zyklische Technikgestaltung:* Im Rahmen des Entwicklungsprozesses tangierte Bereiche, für die es (nicht umsonst) eigenständige Berufsbilder gibt, wurden durch jeweilige Spezialisten vertreten: fachdidaktisches Konzept, Programmierung, Grafik, Screen-Design, Typografie, Ton, Sprecher. Didaktische Entwicklung und programmiertechnische Realisierung verliefen in einem zyklischen Prozess. Dadurch wurde über die gesamte Dauer der Entwicklung eine wechselseitige Abstimmungsmöglichkeit sichergestellt. In monatlichen Entwicklersitzungen konnte dadurch bei Bedarf ad hoc auf aktuelle Phänomene des jeweiligen Entwicklungsstandes reagiert werden. Zudem hat sich – was noch wesentlicher ist – an zahllosen Stellen gezeigt, dass nur bei einem solchen zyklischen Modell auch didaktische Vergewisserungen und vielfältigeres Nachdenken über Fragen initiiert werden konnte, die sich im Nachhinein als fundamental wichtig heraus gestellt haben. Das klassische Entwicklungsmodell kann auf solche Situationen naturgemäß nicht reagieren, da ab einem bestimmten Zeitpunkt (wenn das Pflichtenheft oder Storyboard fixiert ist) das Projekt in die vorrangige Zuständigkeit der technischen Herstellung geht.
- *Primat der Didaktik:*. Die zunehmend übliche Praxis, Pflichtenhefte vorrangig durch Verlagsredaktionen erstellen zu lassen und die ›fachdidaktische Beratung‹ auf eine punktuelle Durchsicht von außen zu begrenzen, reicht nicht aus und trivialisiert die Bedeutung gerade jener Seite, die in erster Linie für die didaktische Qualität verantwortlich wäre. Die Ent-

wicklungsarbeit am ZAHLENFORSCHER hat nachhaltig deutlich werden lassen, auf was anderenfalls – bewusst oder unbewusst – verzichtet wird.

- *Umfangreiche Off-/Online-Erprobungen:* Der ZAHLENFORSCHER wurde nicht nur ausgiebig mit diversen Betaversionen der CD im Feld und mit härtesten technischen Prüfverfahren erprobt, sondern alle enthaltenen Aufgabenstellungen und Forschungsaufträge erfuhren auch eine umfangreiche computerfreie Erprobung im ›normalen‹ Unterricht diverser Jahrgangsstufen (1-6), Schulformen (Grundschule, Sekundarrstufe Förderschule für Lernbehinderte) und Länder (D, CH, USA).
- *Didaktisches Begleitmaterial:* Ein solches Material sollte mehr enthalten als Installationshinweise, Systemvoraussetzungen oder einige Selbstverständlichkeiten bzgl. der Kompatibilität »mit den Lehrplänen aller Bundesländer«. Zum ZAHLENFORSCHER gibt es ein knapp 140-seitiges Handbuch, in dem das fachdidaktische Konzept von Lernen, Üben und Mathematik-Treiben offengelegt und transparent gemacht wird. Vielfältige Hinweise zur unterrichtlichen Umsetzung sind mit zahlreichen Schülerdokumenten konkretisiert und durch eine themenspezifische Sammlung an PDF-Texten aus Fachzeitschriften ergänzt.

2 Die vier Modi des ZAHLENFORSCHERS

Die Makrostruktur des ZAHLENFORSCHERS besteht aus vier Modi, zwischen denen über eine ›Reiterkarten-Leiste‹ jederzeit gewechselt werde kann.

- Modus *Regel*: Der Schwerpunkt hier ist das *Kennenlernen des Aufgabenformats*, wofür ein Regelbeispiel sowie drei weitere Beispielmauern mit den grundsätzlichen Belegungstypen zur Verfügung stehen (Grundreihenaufgaben, 1 Lücke in der Grundreihe, diverse Lücken).
- Modus *Rechnen*: Schwerpunkt ist die vermischte *Übung* der Addition und Subtraktion. Dazu werden aus einem umfangreichen Pool Zahlenmauern in didaktisch begründeten 4er-Sets angeboten, bei denen sich nach Ausrechnen vielfältige, z. B. operative Muster ergeben (in der Grundreihe, im Deckstein; Zahlenfolgen, Zahleigenschaften etc.). Einstellbar sind der Zahlenraum, die Mauerngröße und der Mauerntyp (Grundreihenaufgaben, vermischte Aufgaben).
- Modus *Selbst wählen*: Dieser Modus überlässt den Lernenden wie den Lehrpersonen alle Freiheitsgrade, um eigene Zahlenmauern zu generieren: für das eigene Üben, das Herstellen von Arbeitsblättern zur Bearbeitung am Bildschirm oder zum Ausdrucken, oder zur freien Untersuchung von Mustern.

- Modus *Forschen*: Hier finden sich elf Forschungsaufträge rund um Zahlenmauern.
  Zur Bearbeitung stehen spezifische Werkzeuge zur Verfügung, die v. a. das bewusste Lernen und die Förderung allgemeiner Lernziele wie Darstellen, Argumentieren, Beschreiben, Begründen ausdrücklich in den Blick nehmen helfen. ›Virtuelle Kinder‹ stellen Behauptungen auf, die entweder stimmen, nicht stimmen oder teilweise stimmen können und zu denen sich die Benutzer argumentativ und begründend verhalten sollen.

  Besonderer Wert wird auf das Verschriftlichen von Prozessen und Produkten gelegt. Dazu werden die Lernenden immer wieder ermuntert, das ›Forscherheft‹ (Notizbuch-Charakter) und den Ordner ›Ergebnisse‹ (adressatenbezogene Darstellung) i. S. eines Lerntagebuchs zu nutzen. In beiden lassen sich Texte zu gewissen Leitfragen verfassen und bearbeiten sowie in flexibler Weise mit aussagekräftigen Abbildungen in Form der selbst erzeugten Beispielmauern illustrieren.

  Ein Lernbericht in Form einer Ankreuztabelle plus der Option freier Texteingabe ermöglicht es, die Aufmerksamkeit auf relevante Facetten metakognitiver Bewusstheit bzgl. des eigenen Lernprozesses zu richten.

3 Einige Erfahrungen aus den Schulerprobungen

Die umfangreichen Erprobungen zeigten Prioritäten für den Modus *Forschen*, aber auch für den Modus *Rechnen*. Erwartungsgemäß zeigte sich der Einfluss der jeweils vorherrschenden Unterrichtskultur: Vergleichsweise ›traditionell‹ geführte Lernende fühlten sich im Rahmen der diaktisch vorausgewählten Mauern-Sets wohler, wussten sie doch, was zu tun war und konnten die dargebotenen Aufgaben mehr oder weniger lösen, ohne dass explizit darüber Hinausgehendes von ihnen erwartet wurde. Experimentierfreudigere Kinder mit einem spürbaren Forscher-Habitus beschäftigten sich gerne und ausdauernd mit Forschungsaufträgen und erkundeten sie auf individuellen Niveau. Besonderer Beliebtheit erfreuten sich dabei die Forschungsaufträge 1 (Deckstein treffen) und 11 (Nullmauern).

Die Dokumente in Forscherheften und Ergebnisordnern machten deutlich, wie sinnvoll der Jahrgangsstufen-übergreifende Ansatz im ZAHLENFORSCHER ist: In Unkenntnis ihrer Herkunft lässt sich oft kaum feststellen, aus welchen Jahrgangsstufen die Dokumente stammen. So gab es sehr umfangreiche und substanzielle Dokumente aus 2. Klassen ebenso wie vergleichweise kurze und weniger gehaltvolle aus 4. Klassen. Insgesamt wurde deutlich, wie fundamental wichtig die Integration eines Software-Einsatzes in die generelle Unterrichtskutur einer Lerngruppe ist. Hierzu besteht noch deutlicher Forschungsbedarf, ebenso wie bzgl. der Wirkungsforschung!

ErproberInnen benannten in ihren Rückmeldungsbögen neben überwiegend zustimmenden Bemerkungen u. a. folgende ›Mängel‹: keine automatische Fehlerkorrektur, keine programmseitige Überprüfung des Forscherheftes, keine Protokollfunktion. Diese wurden jedoch allesamt *bewusst* so realisiert und im didaktischen Handbuch auch differenziert begründet, welches allerdings den ErproberInnen seinerzeit noch nicht vorlag. Desweiteren wurde angemerkt, dass die Software »nur Zahlenmauern« enthalte – gewiss eine Unterschätzung der fachlichen wie didaktischen Substanz bzw. des intendierten Einsatzes des Programms (vgl. ebenfalls Handbuch). Die Forschungsaufträge seien »zu anspruchsvoll, zu schwer«, ebenso die Anforderungen, die mit dem Führen eines Forscherhefts verbunden seien.

Auch dies muss sicherlich vor dem Hintergrund einer bestehenden Unterrichtskultur gesehen werden: Forschungsaufträge zu bearbeiten, die wie die angebotenen nachweislich auf verschiedensten Anspruchsniveaus Zugänge ermöglichen, *ist* ›schwer‹, wenn die Lernenden ein selbstständiges und explorierendes Arbeiten noch nicht hinreichend gewohnt sind. Mathematische Texte zu verfassen *ist* anspruchsvoll, wenn Mathematikunterricht vorrangig aus mechanisch zu erfüllenden Rechenanforderungen besteht. »Zu« anspruchsvoll und schwer sind sie aber schon deshalb nicht, weil diese Anforderungen des ZAHLENFORSCHERS sich konsequent an der Philosophie geltender Bildungspläne und fachdidaktischer Eerkenntnisse orientieren. Und was wäre denn die Konsequenz aus der Einschätzung, es sei für (m)eine Klasse (noch) zu schwer? Abwarten, bis sich die benötigten Kompetenzen (von alleine) einstellen? Der ZAHLENFORSCHER plädiert für ein anderes Vorgehen: Gerade *weil* es noch schwer fällt, möchte er hier fördernd und anregend unterstützen und zu bewussten Herausforderung anregen – von Anfang an, d. h. ab (spätestens) Kl. 2. Insofern gilt auch hier:

»Nicht weil es schwer ist, fangen wir es nicht an, sondern weil wir es nicht anfangen, ist es schwer.« (Seneca)

ZAHLENFORSCHER, Auer Verlag, ISBN 3-403-05982-0. Für Windows: 98, 2000, XP; Mac: Classic und OS X ab G3

Sebastian KUNTZE, München

Implementation von Themenstudienarbeit - Wie gehen Mathematiklehrerinnen und -lehrer mit Anregungen aus Fortbildungsmaßnahmen um?[1]

Die Verzahnung von Inhalten der Lehrerinnen- und Lehrerfortbildung (LFB) mit der Unterrichtspraxis der teilnehmenden Mathematiklehrkräfte gilt als ein Merkmal von LFB-Projekten, das deren Wirksamkeit steigern kann (Lipowsky, 2004). Die Wirksamkeit von LFB-Projekten kann dabei daran festgemacht werden, in welchem Maße die Teilnehmenden Fortbildungsinhalte in ihren Unterricht einbringen und so Anregungen der LFB implementieren. Implementation wird hier ganz allgemein als Umsetzung bzw. Verbreitung erziehungswissenschaftlicher Erkenntnisse in die Praxis verstanden (Euler & Sloane, 1998). Grundsätzlich kann bei LFB-Maßnahmen zwischen den beiden Implementationsstrategien der Top-Down- vs. der Bottom-Up-Implementation unterschieden werden (Gräsel & Parchmann, 2004). Während für Top-Down-Implementationsstrategien vorwiegend interessiert, inwiefern ein gegebenes Konzept von beteiligten Lehrpersonen umgesetzt wird, zielen Bottom-Up-Implementationsstrategien darauf ab, die beteiligten Lehrerinnen und Lehrer entsprechend der Ziele der LFB zum Weiterentwickeln ihrer Unterrichtspraxis anzuregen (z.B. Unterrichtselemente im Sinne der Ziele der Fortbildung zu entwickeln) und die Lehrkräfte so in die Ausarbeitung von Konzepten für den eigenen Unterricht einzubeziehen.

Insbesondere wenn Lehrpersonen aktiv an der Planung von Unterrichtselementen beteiligt werden sollen, dürfte es eine Rolle spielen, wie Lernangebote der LFB-Maßnahme von den Lehrkräften wahrgenommen werden. Sofern beispielsweise eine Lehrperson einen Widerspruch zwischen Fortbildungsinhalten und eigenen unterrichtsbezogenen Überzeugungen wahrnimmt, dürfte sich dies hinderlich auf die Implementation dieser Fortbildungsinhalte auswirken können. Die auf die Lernumgebung bezogenen Erwartungen sind als subjektive Überzeugungen dem Bereich des professionellen Wissens, insbesondere des pedagigical content knowledge (Shulman, 1986) zuzuordnen. Im konkreten Falle sollten Mathematiklehrkräfte dazu angeregt werden, die Rahmenkonzeption der Lernumgebung „Themenstudienarbeit“ (Kuntze, 2003, 2005; Kuntze & Ramm, 2005) in ihrem Unterricht zu implementieren. Hier war also zu vermuten, dass Erwartungen an diese Lernumgebung die Entwicklung und den späteren Einsatz der Lernumgebung durch die Teilnehmenden mit beeinflussen könnten.

[1] Dieses Forschungsvorhaben wurde von der Robert Bosch Stiftung gefördert.

Themenstudienarbeit ist eine schülerzentrierte Lernumgebung, in der die Lernenden mit heterogenen Rohmaterialien eine Darstellung von Lernergebnissen erarbeiten. Dabei ist wesentlich, dass die Auseinandersetzung mit den Materialien instruktional wenig kleinschrittig vorstrukturiert ist und Rohmaterialien als Lerngelegenheiten genutzt werden. Zur Einschätzung der Implementation der Themenstudienarbeit interessiert es daher, wie die Lehrkräfte mit diesen beiden charakteristischen Implementationsmerkmalen umgehen. Die Untersuchung fand im Rahmen der Evaluation des LFB-Projekts „MuBiL“ statt (vgl. Kuntze, 2004). Zu Beginn dieses LFB-Projekts wurde den Teilnehmenden die Rahmenkonzeption der Lernumgebung vorgestellt. In einer ersten Implementationsphase sollten sie dadurch angeregt eine eigene Lernumgebung gestalten und passende Materialien für eine selbst gewählte Jahrgangsstufe entwickeln. Diese Lernumgebung erprobten die Lehrkräfte in einer zweiten Implementationsphase.
Im Mittelpunkt der Untersuchung stehen also folgende Forschungsfragen:
Wie entwickeln sich Erwartungen an die Lernumgebung über das LFB-Projekt hinweg und auf welche Weise implementieren die beteiligten Lehrpersonen Anregungen der LFB? Gibt es Zusammenhänge zwischen anfänglichen Erwartungen und Implementationsmerkmalen?

Untersuchungsmethoden

Erwartungen der Lehrkräfte zur Lernumgebung wurden in zwei Fragebögen zu Beginn und am Ende des mehrmonatigen LFB-Projekts erfragt. Um ein breites Spektrum von Erwartungen zur Lernumgebung zu erheben, wurden die entsprechenden Items in ihrem Sinngehalt recht breit gestreut: Indikatorenartig wurden Erwartungen an die Themenstudienarbeit hinsichtlich der Förderung tragfähiger mathematikbezogener Vorstellungen, eines inhaltsbezogenen Kompetenzgefühls, mathematikbezogener Ausdrucksfähigkeit, des Verknüpfens mathematikbezogenen Wissens mit individuellem Vor- und Alltagswissen, sowie von Methodenkompetenz der Lernenden erhoben (vgl. Abb. 1). Außerdem wurden die Lehrpersonen in Feedbackfragebögen nach der wahrgenommenen Nutzbarkeit der LFB-Inhalte in der Unterrichtspraxis befragt. Rückmeldungen zur Art und Weise der Implementation von Themenstudienarbeit wurden ebenfalls mit Fragebögen eingeholt. Die Skalen „Anleitende Elemente und kleinschrittige Aufgabenstellungen in den Materialien“ sowie „Einsatz heterogener Rohmaterialien mit Diskussionsanreiz“ (vgl. Abb. 2) konnten faktorenanalytisch bestätigt werden und erwiesen sich als ausreichend reliabel.

Ergebnisse

Entsprechend der gewählten Bottom-Up-Implementationsstrategie wurden

von den beteiligten Lehrpersonen Lernumgebungen zu folgenden unterschiedlichen Themen und Jahrgangsstufen konzipiert und erprobt:

- Messen (5.-7. Jahrgangsstufe)
- Diagramme (5.-7. bzw. 8.-9. Jgst.)
- Prozentrechnung (6. Jahrgangsstufe)
- Abhängigkeit (6.-8. Jahrgangsstufe)
- Symmetrie (7. Jahrgangsstufe)
- Fehler (8.-10., bzw. ab 7. Jgst.)
- Funktionen (9. Jahrgangsstufe)
- Wachstumsprozesse (ab 10. Jgst.)
- Logarithmus (10. Jahrgangsstufe)
- Grenzwert (ab 11. Jahrgangsstufe)

Zur Untersuchung der Forschungsfragen dienten die Erwartungen an die Lernumgebung als Grundlage für eine hierarchische Clusteranalyse (Ward Method). Ergebnisse zu Erwartungen an die Lernumgebung in Vor- und Nachtest sind für die beiden resultierenden Cluster in Abb. 1 dargestellt.

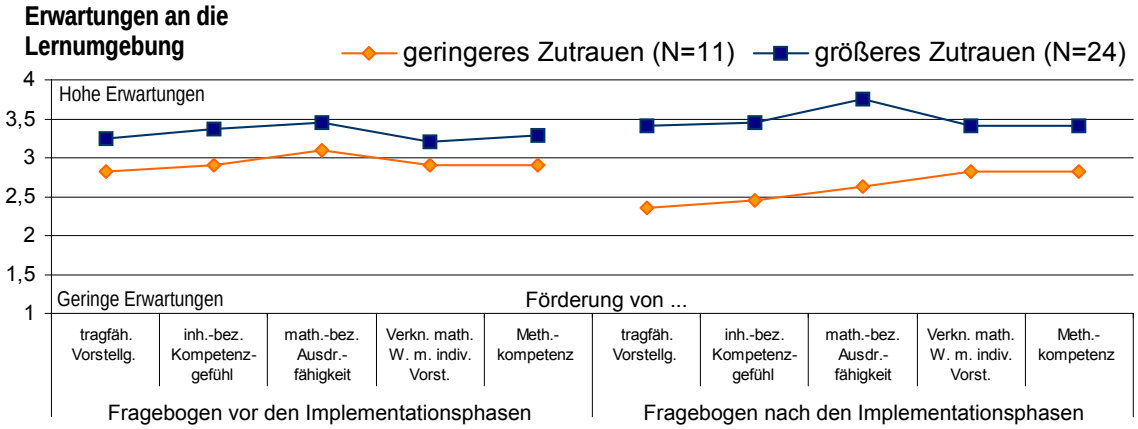


Abb. 1: Erwartungen zur Lernumgebung für beide Cluster

In Abb. 1 ist zu beobachten, dass die anfangs positiven Erwartungen zur Lernumgebung für eine kleinere Gruppe von Lehrkräften mit anfänglich vergleichsweise geringeren Erwartungen im Mittel zurückgingen, während eine größere Gruppe von Teilnehmenden ihre Erwartungen an die Lernumgebung nach deren Erprobung noch geringfügig steigerte. Im Nachtest ergaben sich zwischen den Gruppen teils hoch signifikante Unterschiede.

Eine mögliche Erklärung für dieses Auseinanderdriften der Erwartungen der beiden Gruppen könnte aus den in Abb. 2 dargestellten Befunden gewonnen werden.

Aus Abb. 2 ergibt sich, dass Lehrkräfte mit unterschiedlich hohen Erwartungen an die Themenstudienarbeit diese möglicherweise unterschiedlich implementiert haben:

Offenbar geben Lehrpersonen mit höheren Erwartungen verstärkt an,

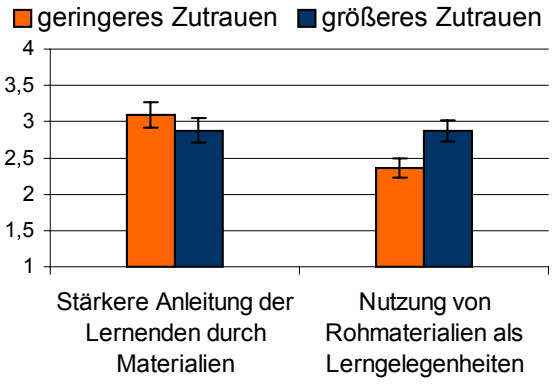


Abb. 2: Von Lehrpersonen berichtete Implementationsmerkmale

Rohmaterialien als Lerngelegenheiten in die Lernumgebung eingebracht zu haben, während dies die Lehrkräfte mit geringerem Zutrauen signifikant weniger tun. Beim Stellenwert für Elemente der kleinschrittigeren Anleitung in den Materialien zeigen sich in geringerem Maße Anzeichen für mögliche Implementationsunterschiede.

Diskussion

Hinsichtlich der Erwartungen an die Lernumgebung Themenstudienarbeit konnten zwei Cluster von Lehrkräften unterschieden werden: Einerseits scheinen Lehrkräfte, die vor der Implementation leicht optimistischere Einschätzungen zur Lernumgebung hatten, die Lernumgebung konsequenter umgesetzt zu haben und nach der Erprobung noch etwas positivere Einschätzungen zur Lernumgebung zu zeigen, andererseits wiesen Lehrkräfte mit geringerem Zutrauen Anzeichen für eine weniger konsequente Implementation der Themenstudienarbeit und auch geringere Nachtest-Zutrauenswerte der Lernumgebung gegenüber auf.

Im Großen und Ganzen deuten diese Befunde auf einen „Matthäus-Effekt“ hin. Insbesondere zeigen die Ergebnisse, dass Erwartungen den Fortbildungsinhalten gegenüber eine wesentliche Rolle für die Bottom-Up-Implementation gespielt haben könnten. Anschlussfragen zur Entstehung solcher Erwartungen im Zusammenhang mit anderen Komponenten professionellen Wissens und zu Möglichkeiten, positive Erwartungen ggf. im Verbund mit anderen unterrichtsbezogenen Überzeugungen zu fördern, eröffnen Raum für weiterführende Untersuchungen.

Literatur

Euler, D. & Sloane, P. (1998). Implementation als Problem der Modellversuchsforschung. *Unterrichtswissenschaft*, 26, 312-326.

Gräsel, C. & *Parchmann*, I. (2004). Implementationsforschung – oder: der steinige Weg, Unterricht zu verändern. *Unterrichtswissenschaft*, 32, 196-213.

Kuntze, S. (2003). Themenstudienarbeit im Mathematikunterricht als Vorbereitung auf die Facharbeit. *MNU*, 56(8), 490-495.

Kuntze, S. (2004). Das binationale und videobasierte Lehrerinnen- und Lehrerfortbildungsprojekt „MuBiL“. GDM-Mitteilungen, 79, 112-118.

Kuntze, S. (2005). Lernumgebungen und Materialien zum Nachdenken über Mathematik. *mathematik lehren*, 132, 4-10.

Kuntze, S. & Ramm, K. (2005). Schülerinnen und Schüler schreiben über Unendlichkeit - Interdisziplinäre und mathematikbezogene Gedanken in Themenstudien. *Praxis der Mathematik in der Schule (PM)*, 47(5), 18-24.

Lipowsky, F. (2004). Was macht Fortbildungen für Lehrkräfte erfolgreich? Befunde der Forschung und mögliche Konsequenzen für die Praxis. *Die Dt. Schule*, 96(4), 1-20.

Shulman, L. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In M. Wittrock (Hrsg.), *Handbook of research on teaching* (S. 3-36). New York: Macmillan.

Silke LADEL, Schwäbisch Gmünd

Eine unterrichtliche Erprobung zum Computereinsatz im Mathematikunterricht der ersten Grundschulklasse

1. Motivation und zentrale Forschungsfragen

Die Rolle des Computers im Mathematikunterricht der Grundschule ist keineswegs geklärt. In vielen Klassen wird der Computer nie genutzt, obwohl er besondere Formen des Lernens wie entdeckendes Lernen und selbstständiges Arbeiten verspricht und besondere Möglichkeiten der Visualisierung, Veranschaulichung und differenzierenden Förderung bietet. Die Meinungen der Pädagogikwissenschaftler gehen beim Thema „Einsatz von Computern an Grundschulen“ weit auseinander und je nach Einstellung der Lehrenden zum Thema kommt der Computer zum pädagogischen Einsatz oder ist in den Klassenzimmern erst gar nicht vorhanden. Im Folgenden wird der sinnvolle Einsatz des Computers und der Software in einer ersten Grundschulklasse an einem konkreten Beispiel aufgezeigt und bewertet. Dafür wurde u.a. die Methode der Schülerbeobachtung im Unterricht eingesetzt.

Zusammenfassend wurden folgende Forschungsfragen gestellt:

Findet eine *Kooperation* der Schülerinnen und Schüler statt?
Wie gestaltet sich die *Kommunikation* der Schülerinnen und Schüler miteinander?
Arbeiten die Schülerinnen und Schüler weitgehend *selbstständig*?
Hat die Arbeit mit Computern einen Einfluss auf die *Leistungsbereitschaft* der Schülerinnen und Schüler?
Wie erfolgreich werden die einzelnen *mathematischen Themenbereiche* bearbeitet?
Ist bezüglich der Übung und Wiederholung des Lernstoffes am PC eine Verbesserung oder Festigung *mathematischer Fähigkeiten* zu beobachten?
Welche positiven und negativen Erfahrungen werden mit dem *Programm „Mathematikus 1“* als Übungsmaterial gemacht?

2. Die Software „Mathematikus 1“ (Lorenz, 2000)

Meldet man sich zum ersten Mal an und beginnt somit ein neues Spiel, so wird eine Vorgeschichte von einem Kobold erzählt, der eine Maschine verstellt hat. Aus diesem Grund sind die Lichter der gesamten Stadt „Zahlenhausen“ erloschen. Ziel des Spiels ist es, alle Lichter der gesamten Stadt wieder zum Leuchten zu bringen.

Zu jedem der insgesamt 14 Gebäude befindet sich auf der Maschine eine Taste, die durch ein Kabel mit dem Gebäude verbunden ist. Klickt man auf eine dieser Tasten, gelangt man zu den folgenden Aufgabentypen:

- Zahlenstahl
- Rechen mit Geld
- größer/kleiner/gleich
- Zahlenpyramiden
- Textaufgaben
- Mini Einmaleins
- schnelles Kopfrechnen
- Rechenscheiben
- die Uhrzeit
- verliebte Herzen
- Zwanzigerfeld
- Zahlen- und Musterfolgen
- Zahlenhäuser
- Spiegelungen

Bei Unklarheiten hilft ein Kobold mit einer 3-gestuften Hilfe weiter. Bei einigen Aufgaben stehen außerdem Rechenplättchen als Hilfe zur Verfügung.

Im rechten Teil der Maschine hängt ein Blatt Papier heraus. Klickt man hierauf, so kann Lehrer sowie Schüler sich einen Überblick darüber verschaffen, wie viele Aufgaben in welchem Bereich bereits gelöst wurden. Zusätzlich hierzu können die Schülerinnen und Schüler den Stand ihrer Arbeit auch an den blinkenden Lichtern der Häuser ablesen.

3. Durchführung der unterrichtlichen Erprobung

Die unterrichtliche Erprobung des Computereinsatzes im Mathematikunterricht einer ersten Grundschulklasse fand im Zeitraum vom 15.02.2005 bis zum 03.05.2005 statt und umfasste elf Unterrichtsstunden, eine pro Woche. Von den insgesamt 16 Kindern arbeiteten immer zwei Kinder zusammen an einem Tablet-PC. Zur Dokumentation der Aktivitäten wurden je 4 Teams von der Lehrkraft bzw. einer studentischen Hilfskraft beobachtet.

Den Forschungsschwerpunkten entsprechend wurden drei Beobachtungsbögen konzipiert: Der erste Beobachtungsbogen zum Schülerverhalten im Umgang mit dem Computer ist in vier Kategorien gegliedert (in Anlehnung an Bartnitzky, Christaini 1994, S. 54 f.): Kooperationsfähigkeit, Selbstständigkeit, Leistungsbereitschaft und Kommunikation. Auf einer vierstufigen Skala ist bei diesem Beobachtungsbogen jeweils anzukreuzen: trifft nicht zu – trifft eher nicht zu – trifft eher zu – trifft zu. Die insgesamt 14 Häuser der Lern-Software sind im zweiten Beobachtungsbogen den fünf Kategorien Zahlbegriff, Addition/Subtraktion, Regeln und Gesetzmäßigkeiten bei Folgen, Mini Einmaleins und Sachrechnen zugeordnet (in Anlehnung an „Handreichungen zur Beobachtung des Lösungsweges beim Rechnen in der Grundschule“ der Behörde für Bildung und Sport der Freien und Hansestadt Hamburg). Die Qualität des Lösungswegs ist jeweils in drei Stufen eingeteilt. Der dritte Beobachtungsbogen zur Software beinhaltet die Bear-

beitung der Häuser, die aus der Statistik des Programms abzulesen ist, und die Angabe, ob bei bestimmten Häusern gehäuft Fragen oder Probleme auftreten.

Des Weiteren wurden Videoaufnahmen gemacht, die transkribiert und ausgewertet wurden.

4. Ergebnisse aus der Erprobung

Die Tablet-PCs erwiesen sich aufgrund ihrer kleiner gehaltenen Tastatur und auch der kleineren Maus als sehr kinderfreundlich. Die verschiedenen Bedienoptionen über Maus, Tastatur, Touchpad oder Stift wurden von den Kindern gern in Anspruch genommen. Sie gingen ungehemmt an das „neue“ Arbeitsmittel heran und erforschten und entdeckten vieles im Alleingang.

Die Kooperation der Schülerinnen und Schüler gestaltete sich unterschiedlich. Auch wenn es hin und wieder kleine Differenzen gab, so überwogen die gemeinsame Arbeit und das gegenseitige Helfen doch deutlich. Insbesondere bei gemischten Teams (m/w) war eine Entwicklung im Sinne eines Aufeinanderzugehens zu beobachten.

Die Kommunikation unter den Schülerinnen und Schülern war höher als im herkömmlichen Unterricht. Es wurde viel über den PC und das Programm selbst diskutiert. Vor allem aber das Argumentieren über mathematische Inhalte, insbesondere bei schwierigen Aufgaben, nahm deutlich zu. Insgesamt konnte ein reger Austausch in der Klasse beobachten werden.

Aufgrund der guten Kooperation und Kommunikation der Teams konnten die Kinder selbstständig an den PCs arbeiten. Das Programm „Mathematikus 1“ ist gut für Erstklässler geeignet. Es erklärt sich von allein und ist einfach zu handhaben. Bei Schwierigkeiten wurde zuerst die Hilfe des Programms in Anspruch genommen oder es wurden Mitschüler befragt, nur selten wurde die Lehrerin um Rat gebeten. Die Frage, ob die methodischen Besonderheiten des Computers im Hinblick auf Interaktion und Hilfe genutzt und angeboten werden, wäre in einer weiteren Forschungsarbeit zu untersuchen.

Je nach Leistungsvermögen setzten die Teams ihre Ziele unterschiedlich und bearbeiteten die Aufgaben verschieden zielgerichtet. Bei den leistungsstärkeren Teams war ein sehr zielorientiertes Arbeiten, mit Überprüfung anhand der Statistik oder der Lichter an den zu bearbeitenden Häusern, zu beobachten. Die nicht so leistungsstarken Teams gingen auch in die Statistik des Programms, konnten die daraus folgernden Ziele jedoch nicht konsequent verfolgen. Dadurch, dass sie bei verschiedenen Aufgaben Schwierigkeiten hatten, sprangen sie häufig ziellos zwischen den Häusern

hin und her. Einfachere Aufgaben wurden von den nicht so leistungsstarken Schülerinnen und Schülern doppelt bearbeitet und schwerere Aufgaben dafür eher ausgelassen. Sie trauten sich jedoch öfter als im herkömmlichen Unterricht auch an die schweren Aufgabentypen heran.

Eine systematische Untersuchung im Hinblick auf den Lernzuwachs in Bezug auf mathematische Kompetenzen erfolgte im Rahmen dieser Arbeit nicht. Dazu sind weitere Forschungen mit empirischer Grundlage nötig. Zu den einzelnen mathematischen Themenbereichen ließen sich jedoch einige Beobachtungen anstellen, die gerade auch für die Entwicklung von Lernsoftware von Nutzen sind. So wurden z.B. bei den Rechenscheiben (Zusammenhänge zwischen den Zahlen erkennen) sowie den Textaufgaben Defizite in der Hilfe festgestellt. Das Rechnen mit der Uhr, sowie „Verliebte Herzen“ waren z.B. sehr beliebte Aufgabentypen.

Die Computereffekte sind im Programm „Mathematikus 1“ in einem angemessenen Rahmen berücksichtigt, so dass sie zu keiner nennenswerten Ablenkung führen. Sie sind sogar so gestaltet, dass sie die Kinder motivieren und die Arbeit am PC auflockern.

Die Motivation und Leistungsbereitschaft der leistungsstarken sowie der nicht so leistungsstarken Schülerinnen und Schüler war hoch. Kinder mit Lernproblemen arbeiteten insgesamt konzentrierter als im herkömmlichen Unterricht und mit mehr Ausdauer an den verschiedenen Aufgabenstellungen. Gerade die schwierigeren Aufgaben gaben Anlass zu erhöhter Kommunikation und forderten das mathematische Argumentieren. Dies war bei der Arbeit am Computer höher als bei der selbstständigen Arbeit im herkömmlichen Unterricht. Ein breiter angelegter Vergleich des Computereinsatzes mit herkömmlichem Unterricht und Methoden des Mathematikunterrichts mit theoretischer Analyse und empirischem Vergleich von Inhalten und Methoden des Mathematikunterrichts sollte hierbei angestrebt werden.

Literatur:

Bartnitzky, H., Christiani, R. (1994): Zeugnisschreiben in der Grundschule. Heinsberg
Ladel, S. (2005): „Eine unterrichtliche Erprobung zum Computereinsatz im Mathematikunterricht der ersten Grundschulklasse“. Diplomarbeit zum Aufbaustudium Schulpädagogik, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd
Lorenz, J. (2000): Mathematikus 1. Braunschweig: Westermann-Verlag
http://www.mint-hamburg.de/Handreichungen/beob.pdf, v. 05.02.2005

Anselm LAMBERT, Frankfurt

Aktuelle Schlagworte – im Spiegel der Mathematikdidaktik Walt(h)er Lietzmanns

> Leider haben wir in Deutschland eine Verteufelung des Fehlers. Dabei ist er der beste Indikator dafür, was man noch nicht kann. Lehrer, die Fehler ihrer Schüler „lesen", wissen, wo der Lernprozess des Kindes hängt, und können gezielt helfen. Fehler sind ein wichtiger Bestandteil des Lernens. (Prenzel 2004, 148)
>
> Auch eine falsch gerechnete Aufgabe hat [...] für den Schüler Wert, wenn er findet, wo der Fehler steckt. (Lietzmann, 19??)

Methodologische Vorbemerkung

Jean-François Lyotard hat in seinem Bericht „Das postmoderne Wissen" Wissenschaft als etwas bestimmt, das *Erinnerung und Entwurf* hat:

> Das Spiel der Wissenschaft impliziert [...] eine diachronische Temporalität – eine Erinnerung und einen Entwurf. Dem aktuellen Sender einer wissenschaftlichen Aussage wird unterstellt, daß er von früheren [...] Aussagen Kenntnis hat [...] und daß er eine Aussage [...] nur hervorbringt, insofern sie sich von den früheren Aussagen unterscheidet. (Lyotard 1999, 82 f.)

Neben der Zusammenarbeit mit den Bezugswissenschaften (*Inter- und Transdisziplinäre Vernetzung*) und den interessierten Blicken über den nationalen Tellerrand hinaus (*Globale Vernetzung*) ist damit auch eine *Historische Vernetzung* in der eigenen Tradition notwendige Voraussetzung für Wissenschaftlichkeit (vgl. Lambert 2005). Allerdings muss auch die hehre unbedingte Universität – als „Ort, an dem nichts außer Frage steht" (Derrida 2001, 14) – immer einer schlichten Randbedingung genügen: Sie muss die in ihr Arbeitenden ernähren. Der Mainstream der aktuellen Drittmittelpolitik fließt nun leider an der historischen Vernetzung vorbei, oder (ver)-ku(e)rz(t): *Fürs Lesen gibt's keine Drittmittel*. Obwohl Lesen lohnen kann.

Etwa bei Walt(h)er Lietzmann (1880-1959), der wissenschaftlicher Mathematikdidaktiker im gerade beschriebenen Sinn ist.

> [Die] allgemeine Pädagogik [...] sollte sich bei [...] geschichtlichen Dingen nicht aufhalten, ihr Gegenwartswert ist ausschlaggebend. [...] die für die Gegenwart fruchttragende Pädagogik beginnt [...] bei Pestalozzi und Herbart; [...] diese Männer sollte man nur verhältnismäßig kurz als Väter unserer modernen Pädagogik, nicht als Beherrscher würdigen. Viel wichtiger erscheint eine Hervorkehrung des psychologischen Einschlages der neueren Pädagogik, wobei man den Stürmern gegenüber recht kritisch sein wird, aber keineswegs die Ergebnisse einer wissen-

> schaftlichen Experimental-Psychologie beiseite schieben darf. (Lietzmann 1926, 111)

Sein Hauptwerk, die von 1923-1926 in 2. überarbeiteter Auflage erschienene dreibändige **„Methodik des mathematischen Unterichts“** (Organisation, Allgemeine Methode und Technik des Unterrichts (1926), Didaktik der einzelnen Gebiete des mathematischen Unterrichts (1923), Didaktik der angewandten Mathematik (1924)) ist auch heute noch von beeindruckender Breite und Tiefe. Man beachte etwa nur: Bereits er hat die psychologischen Grundlagen vor die Stoffdidaktik gestellt. Einiges – wenn auch überraschend wenig – von dem, was wir dort finden, ist selbstverständlich Schnee von gestern, z. B. das biogenetische Grundgesetz (dem Lietzmann aber kritisch gegenüber stand, vgl. Lietzmann 1924, 209 f.). Eine Mathematikdidaktik, die sich an der Erziehungswissenschaft orientierend deren Paradigmenwechsel mitmacht, veraltet (je nach Standpunkt: erneuert sich) ca. alle 20 Jahre. Im 20. Jahrhundert wurden so die folgenden Paradigmen durchlebt: hermeneutische Pädagogik, Behaviourismus (Lernende als Black-Box), Kognitivismus (Lernende als Informationsverarbeitende), Konstruktivismus (Lernende als Konstrukteure ihres eigenen Wissens) – und möglicherweise erleben wir gerade den Wechsel zum Neuropsychologismus?

Schlagworte gestern und heute

Lietzmann ist heute (wieder) überraschend aktuell, sein Gegenwartswert soll im Folgenden in Ausschnitten skizziert werden (mehr: Lambert 2005).

Leitideen Mathematikunterricht nicht von der Fachsystematik her zu denken, sondern von übergeordneten Leitideen aus, findet sich bereits in den in der Tradition der Meraner Reformen stehenden Preußischen Lehrplänen von 1925 realisiert, für die Lietzmann ein Vorreiter war. Diese Lehrpläne beginnen mit ihrem „Allgemeinen Lehrziel“ in dem wir u. a. finden:

> Erzielung der Fähigkeit, das Mathematische in Form, Maß, Zahl und Gesetzmäßigkeit an den Gegenständen und Erscheinungen der Umwelt zu erkennen und die gewonnene Erkenntnis selbständig anzuwenden; insbesondere Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens und der Fertigkeit im mathematischen Auffassen der gegenseitigen Abhängigkeit veränderlicher Größenwerte. (nach Lietzmann 1926, 261 f.)

„Daten und Zufall“ finden wir hier nicht explizit. Lietzmann weist jedoch an verschiedenen Stellen auf deren Wichtigkeit hin (u. a. unter dem Stichwort „empirische Funktionen“). Etwas in Vergessenheit zu geraten, droht heute unter forcierter Anwendungsorientierung leider

> [...] die geistesgeschichtliche Bedeutung der Mathematik. (a. a. O.)

Auf die „Allgemeinen Lehrziele“ folgen dann (immer noch vor dem Stoffplan, den Lietzmann in einer Tabelle von weniger als einer Seite zusammenfasst) „Allgemeine Grundsätze“, in denen wir u. a. die **Kompetenzen** der Bildungsstandards wiederentdecken können.

Instruktion vs. Konstruktion Heute gilt die Diskussion um Instruktion und Konstruktion (theoretisch) als abgeschlossen.

> Im Hinblick auf die Praxis sind beide Perspektiven gleichermaßen wichtig und die Pädagogische Psychologie sollte sich künftig verstärkt mit integrativen Modellen der Unterrichtgestaltung befassen [...]. (Reinmann-Rothmeier & Mandl 2001, 625)
>
> Die nächstliegende Methode, die auch lange Zeit in unseren höheren Schulen geherrscht hat und heute in manchen Fächern noch überwiegt, ist die [...] des Vortrags [...]. Im Leben der höheren Schule durchaus nicht selbstverständliche Dinge wie Aufmerksamkeit, Interesse, [...] besondere Veranlagung für den Gegenstand der Darbietung werden als vorhanden vorausgesetzt [...]. Andererseits ist es eine Forderung, die man nicht einfach ablehnen darf, unsere Schüler darin zu üben, einen längeren Vortrag mit Gewinn aufzufassen. Die übliche Fortbildung des Erwachsenen ist nun einmal der Vortrag [...]. (Lietzmann 1926, 145)
>
> Man kann aber auch, statt in einer Front vorzugehen, den Einzelunterricht in der Klasse aufrecht erhalten. Jeder Schüler hat seine einzelne Aufgabe, der Lehrer geht von einem Schüler zum anderen, hilft hier und dort ein, kontrolliert hier und dort, kurz, es ist nicht ein Gegenüber von Klasse und Lehrer, sondern ein vielfältiges Gegenüber von Einzelschüler und Lehrer. (Lietzmann 1926, 146)
>
> [...] die mathematischen Köpfe [...] sollen sich nicht damit begnügen, die Aufgaben zu lösen; sie sollen verschiedene Lösungswege aufsuchen und beurteilen, welcher der zweckmäßigste ist. (Lietzmann 1926, 175)
>
> Um seine Unterrichtsmethode besonders deutlich zu machen, ließ Pestalozzi einige Knaben zu Bell aufs Zimmer rufen und dieser sollte nun selbst die Knaben prüfen. Er fragte nach dem Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes. Einer der Knaben gab einen Beweis. Das sei nicht der richtige, sagte Bell. Der Knabe: Er könne es auch anders beweisen. Und die übrigen Knaben: Sie hätten auch Beweise gefunden. Es wurden noch ein paar Beweise gemacht, um zu sehen, ob der englische nicht darunter wäre. Indes er fand sich nicht darunter, und Bell blieb dabei, das sei der beste, den sie in englischen Schulen hätten. Ackermann bemerkt dazu ganz richtig: Der Engländer konnte eben nicht begreifen, daß es nicht darauf ankommt, dem Schüler einige Rezepte zu geben, daß es „unendlich besser sei, ihr Denken und Können so zu entwickeln, daß sie sich bei den verschiedenen Vorfällen des Lebens selbst zu helfen, selbst Rezepte zu schreiben wüssten. Wir nennen unsere Methode die heuristische, der Franzose hat den Ausdruck méthode de redécouverte geprägt. (Lietzmann 1926, 147)
>
> [...] die Lernumgebung [muss] den Lernenden Situationen anbieten, in denen eigene Konstruktionsleistungen möglich sind und kontextgebunden gelernt werden kann. [...] Es ist vor allem der *Situated Cognition*-Bewegung zu verdanken, dass die Ideen des Kontextbezuges und der sozialen Partizipation in realen Situationen beim Lernen inzwischen weite Verbreitung gefunden haben. (Reinmann-Rothmeier & Mandl 2001, 615)

> Es war in einem Landerziehungsheim, in einer Quinta, in der ersten Rechenstunde nach den großen Ferien. Einer der Schüler war aus seinem Elternhaus in Berlin ins Heim zurückgekehrt. Der Lehrer hatte ihm aufgetragen, sich nach allen die Kosten seiner Autofahrt angehenden Dingen genau zu erkundigen. Er berichtete also: An Benzin verbraucht man für 230 km 65 l, an Öl verbraucht man in 3 Stunden 25 l, vom Benzin kostet das Liter 14.– M, vom Öl 12.– M (es war im Jahre 1919, als ich die Unterrichtsstunde hörte). Karbid kostete das kg 10.– M. Man rechnet auf die Lebensdauer eines Reifens 7000 km, ein Reifen kostet 6000.– M, ein Auto mit Reifen 70 000.– M. Das etwa waren die Angaben des Jungen; sie kamen nicht auf einmal heraus, manches wurde von den Kameraden erfragt. Jedenfalls hatte man nun ein gewisses Sachmaterial beieinander. „Ich gebe euch eine Minute Zeit; überlegt was ihr rechnen wollt!“ sagte der Lehrer. [...] – übrigens war der Unterricht bei dem Lehrer nicht Nachahmung literarischer Anreger, sondern aus eigener Unterrichtserfahrung geboren. (Lietzmann 1926, 162)

Bei Lietzmann steht **Selbsttätigkeit der Lernenden** im Vordergrund und es ist klar, dass diese einer Reflexion durch die Lernenden selbst bedarf.

> Wir wollen unsere Schüler zur Selbständigkeit im geistigen Arbeiten erziehen, wollen sie bewußt methodisch arbeiten lehren. (Lietzmann 1926, VII)
>
> Will man im Arbeitsunterricht wirklich vorwärtskommen, dann muß man den Schülern eine gewisse Untersuchungstechnik beibringen oder besser gesagt, sie von ihnen erarbeiten lassen. (Lietzmann 1926, 163)
>
> Ziel [...] ist [...] nicht bloß das Erarbeitete selbst. Neben dieses materiale Ziel tritt das formale, die Einsicht in den Vorgang des Erarbeitens. (a. a. O.)

Bewusste Methode d. h. selbst gesammelte Regeln und reflektierte Einsicht in den Prozess des Erarbeitens von Wissen subsummiert man heute unter **Metakognition** (vgl. Hasselhorn 2001)**.** Aber wie viel mehr wissen wir?

> Viele Modelle des selbstgesteuerten Lernens beruhen eher auf einer Systematisierung der vielfältigen Einzelfaktoren [...], als auf einer klaren Spezifikation des Zusammenspiels psychologischer Prozesse [...]. [Es] fehlen derzeit präzise Erkenntnisse über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für erfolgreiches selbstgesteuertes Lernen. (Brunstein & Spörer 2001, 625)

Literatur BRUNSSTEIN & SPÖRER (2001): Selbstgesteuertes Lernen. In: ROST (2001). DERRIDA (2001): Die unbedingte Universität. Frankfurt: Suhrkamp. HASSELHORN (2001): Metakognition. In: ROST (2001). LAMBERT (2005): Bildung und Standards im Mathematikunterricht – oder: Was schon beim alten Lietzmann steht. In: Bender et al. (Hrsg): Neue Medien und Bildungsstandards. Hildesheim: Franzbecker. LIETZMANN (1924): Methodik des mathematischen Unterrichts. 3. Teil: Didaktik der angewandten Mathematik. Leipzig: Quelle & Meyer. LIETZMANN (1926): Methodik des mathematischen Unterrichts. 1. Teil: Organisation, Allgemeine Methode und Technik des Unterrichts. Leipzig: Quelle & Meyer. LYOTARD (1999): Das postmoderne Wissen. Wien: Passagen. PRENZEL (2004): Fehler sind fürs Lernen wichtig. Interview in: Stern 38/2004. REINMANN-ROTHMEIER & MANDL (2001): Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In: KRAPP & WEIDEMANN (Hrsg.): Pädagogische Psychologie. 4. Auflage. Weinheim: BeltzPVU. ROST (2001, Hrsg.) Handwörterbuch Pädagogische Psychologie. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. Weinheim: BeltzPVU.

Ingmar LEHMANN, Berlin

Die Fibonacci-Zahlen in der Kunst

Die *Fibonacci-Zahlen* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... werden durch die beiden Anfangswerte $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$ sowie die Bedingung $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}$ mit $n \geq 1$) rekursiv definiert. Die Quotienten $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen nähern sich mit wachsendem n dem *goldenen Schnitt* $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803...$ Die *Binet-Formel* $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$ liefert die n-te Zahl direkt. Man kann dieses Ergebnis gar nicht genug feiern: Für jede natürliche Zahl n heben sich die irrationalen Wurzelterme gegenseitig so auf, dass letztlich stets ganze Zahlen, eben die Fibonacci-Zahlen, herauskommen!

Und diesen Zahlen, die über die „Kaninchen-Aufgabe“ aus dem berühmten Buch *Liber abaci* des Leonardo von Pisa (ca. 1175-nach 1240), genannt *Fibonacci*, zunächst nur der mathematischen Kurzweil dienten, begegnen wir heute in der Geometrie, Algebra, Zahlentheorie, aber eben auch in vielen Bereichen außerhalb der Mathematik – etwa in der Natur, Architektur und Kunst. Das betrifft die Teilbereiche Musik und Literatur ebenso wie die darstellende Kunst (Graphik, Malerei und Bildhauerei). Zu Letzterem werden alte und neue Beispiele vorgestellt.

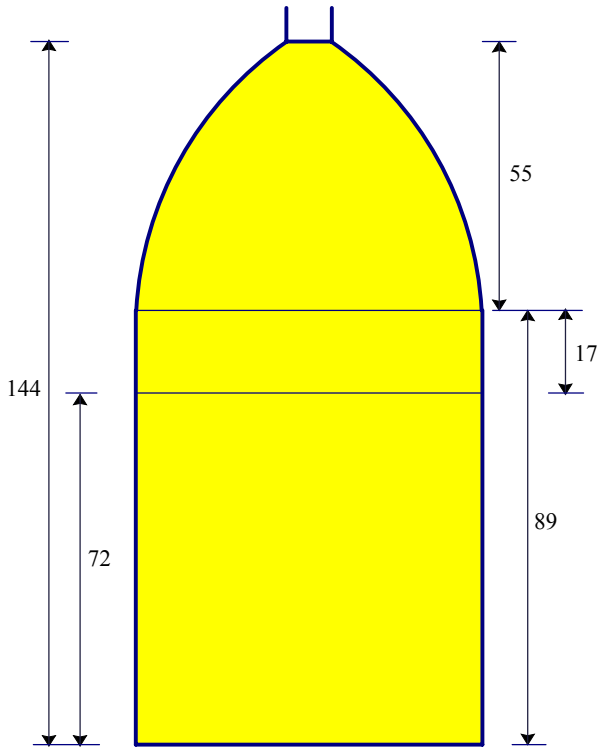
1. Architektur

In der Zeit der Renaissance entstand eine Lehre von den Proportionen in Architektur, Bildhauerei und Malerei, deren ästhetisches Credo in mathematischen Termini etwa so formuliert werden kann: Harmonie und Schönheit in der Kunst werden bestimmt durch gewisse ausgezeichnete Zahlen, wobei diese oft als Verhältnisse natürlichen Zahlen gut approximiert werden können. Es ist der goldene Schnitt, der hier im Mittelpunkt des Interesses steht. Und über den goldenen Schnitt gibt es fast unzählige Arbeiten, die nachzuweisen versucht haben, dass dieser oder jener Künstler gerade nach diesem Prinzip gearbeitet habe. Viele Architekten haben in ihren Entwürfen intuitiv den goldenen Schnitt verwendet; speziell das goldene Rechteck[1] spielt deshalb eine herausragende Rolle.

[1] Die längere Seite des Rechtecks verhält sich zur kürzeren Seite wie die Summe aus beiden Seiten zur längeren Seite.

Das berühmteste Gebäude, in dem der goldene Schnitt (angeblich) zu finden ist, ist der Parthenon-Tempel auf der Akropolis. Phidias hatte die Leitung beim Bau dieses Tempels – und der Anfangsbuchstabe Φ seines Namens ΦΙΔΙΑΣ liefert auch die Bezeichnung für den goldenen Schnitt.

Nach Angaben Herodots wurde die Cheops-Pyramide so konstruiert, dass „das Quadrat über ihrer Höhe die gleiche Fläche habe wie ein Seitendreieck“. Auf diese Weise „versteckt“ sich der goldene Schnitt als Quotient aus der Höhe einer Seitenfläche und der halben Seitenlänge!



Für die Planung wichtiger Proportionen der Kuppel des Domes von Florenz sind die Fibonacci-Zahlen 55, 89 und 144 sowie die 17 bzw. 72 als halbierte Fibonacci-Zahlen 34 bzw. 144 im Aufrissplan von Giovanni di Gherardo da Prato von 1426 überliefert.

Welch große Bedeutung man diesen Maßzahlen beigemessen hat, zeigt die 1436 für die Weihe des Domes von Guillaume Dufay (1400-1474) komponierte Festmotette „Nuper rosarum flores“.

Le Corbusier (1887-1965) entwickelte mit dem *Modulor* ein Schema auf der Grundlage des goldenen Schnitts. Dieser *Modulor* besteht aus zwei Skalen, die unmittelbar auf die Fibonacci-Zahlen verweisen. In Marseille errichtete er die *Unités d'habitation*; die Abmessungen des Gebäudes und der Wohnungen folgen dieser Proportionenlehre.

2. Bildhauerei

Pacioli hob 1509 den goldenen Schnitt unter dem Namen *De Divina Proportio* voller Begeisterung hervor. 1914 erschien von Cook das Buch *The Curves of Life*, 1926 erschien Hambidges *The Elements of Dynamic Symmetry*. Gerade das letztere Werk hat bei Künstlern einen nachhaltigen Eindruck hinterlassen – wie auch die Schriften von Ghyka (1927, 1931).

Der *Apoll von Belvedere* und die *Venus von Milo* werden als Beispiele zum goldenen Schnitt aufgeführt. Béothy (1897-1961) hat nachweisbar für seine Skulpturen die Fibonacci-Folge zugrunde gelegt (*Goldene Reihe*).

Zu einer wahren Fibonacci-Mode kam es in den 1960er Jahren. Hier ist neben Ulrichs und Niemeyer vor allem Mario Merz (1925-2003) zu nennen. Niemeyer hat 1997 mit *20 steps around the globe ...* ein atemberaubendes *Land-Art-Projekt* realisiert. Merz hat den Fibonacci-Zahlen gleich durch mehrere seiner Kunstwerke ein Denkmal gesetzt (*Igloo Fibonacci*).

Auch die Künstler Bruch (*Hommage à Fibonacci*), Birkhofer (*Gottenheimer Wasserskulptur*), Knoop (*Mikado*), Ullman (*Echo*) und Bury (*Fibonaccis Tempel*) orientierten sich an der Fibonacci-Folge. Burys Zeichnungen machen deutlich, dass die mathematischen Gesetzmäßigkeiten nicht nur intuitiv, sondern ganz bewusst eingesetzt worden sind.

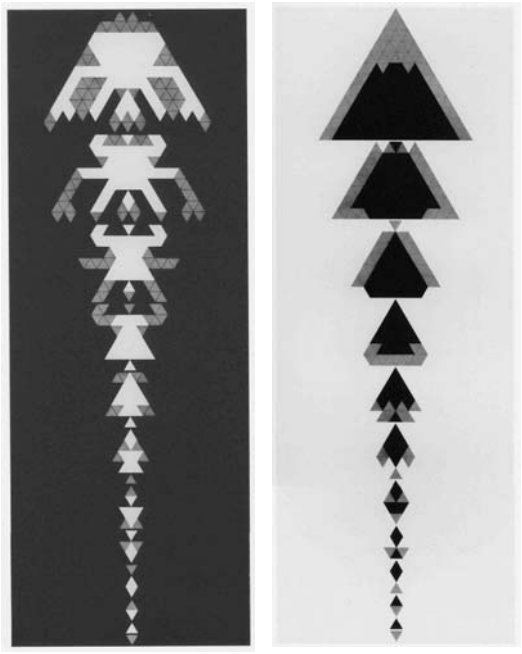
3. Malerei und Graphik

Leonardo da Vinci illustrierte das Buch *De divina proportione* von Pacioli mit einer Studie über den vitruvischen Menschen. Auch Dürer stützt sich auf Vitruv, dessen Schema er weitgehend übernimmt und verfeinert. Das von Dürers Hand gezeichnete Formengerüst in seinem *Selbstbildnis* (München) führt u.a. auf den goldenen Schnitt. Viele Autoren haben eine erstaunlich große Anzahl von Belegen dafür gesammelt, dass im 19. und 20. Jahrhundert tatsächliche oder vermeintliche Anwendungen des goldenen Schnitts entdeckt wurden. Aber wie auch im Falle der Architektur und der Skulpturen bleibt es oft dem Betrachter überlassen, ob der goldene Schnitt bewusst oder nur zufällig ein Kunstwerk adelt.

Das wohl berühmteste Porträt der Kunstgeschichte ist Leonardos *Mona Lisa*. Einerseits lässt sich das Gesicht mit dem berühmten Lächeln genau in ein goldenes Rechteck einpassen, andererseits finden wir neben ähnlichen Rechtecken auch ein goldenes Dreieck. Hier wären dann auch die *Sixtinische Madonna* von Raffael, das Bild *Badeplatz in Asnières* von Seurat und Dalis Gemälde *Riesige Mokkatasse, fliegend, mit unerklärlicher Fortsetzung von 5 Metern Länge* zu nennen.

Rune Mields (geb. 1935) hat in ihren Bildern bewusst die Fibonacci-Zahlen herangezogen. Ihre Gemälde, die immer in Serien entstehen, bewegen sich farblich zwischen Schwarz, Grau und Weiß und wirken deshalb äußerst schlicht und geradezu herb.

Viele Φ- und Fibonacci-Verehrer werden es nicht wahr haben wollen, aber Untersuchungen der Kunsthistorikerin Neveux verbannten Ende des 20. Jahrhunderts viele Gemälde wieder von der Goldenen-Schnitt-Liste.



Rune Mields:
Evolution: *Progression und Symmetrie* III, VI

4. Literatur

Selbst Goethe, der der Mathematik eher distanziert gegenüberstand, muss in seinen *Maximen und Reflexionen* der „Proportion“ seine Reverenz erweisen: „Vollkommenheit kann mit Disproportion bestehen, Schönheit allein mit Proportion.“

Inger Christensen hat mit dem Gedichtzyklus *alfabet* die Idee verwirklicht, die Fibonacci-Zahlen als Strukturelemente der Lyrik zu verwenden.

Im Gedicht *Fibonacci-Kopfkurve* von Ulrike Draesner bestimmen die Zahlen in Form der Silbenanzahl die jeweilige Verslänge. In Oskar Pastiors Gedicht *zwischenjahr des fibonacci* folgt die Anordnung der Wörter in den ersten fünf Zeilen dieses vierstrophigen Gedichts streng der Fibonacci-Reihe.

In dem Thriller „Sakrileg“ lässt Dan Brown in den kryptischen Hinweisen des ermordeten Chefkurators des Louvre, dessen mit Blut gezeichneter Kreis an da Vincis Proportionsstudie des vitruvischen Menschen erinnert, die Polizistin Sophie Neveu die Zahlenfolge 13 – 3 – 2 – 21 – 1 – 1 – 8 – 5 als Verdrehung der Fibonacci-Folge erkennen.

Hans Magnus Enzensbergers vergnügliche Reise in die Welt der Zahlen lässt uns schließlich teilhaben an den Abenteuern, die dem mathehassenden Schuljungen Robert widerfahren, wenn er nachts vom „Zahlenteufel“ heimgesucht wird. Dieser Teufel jongliert unterhaltsam und atemberaubend mit den Zahlen, dass Robert schließlich süchtig nach Zahlen wird. So lernt Robert auch, dass sich sogar Hasen oder Bäume an die Gesetzmäßigkeit der *Bonatschi*-Zahlenfolge halten – so heißen die Fibonacci-Zahlen bei ihm.

Literatur

Alfred S. Posamentier, Ingmar Lehmann: The Fabulous Fibonacci Numbers. Foreword by Dr. Herbert Hauptman, Nobel Laureate. Prometheus Books Publishers, Amherst, New York (erscheint 2006/2007)

Katja LENGNINK, Darmstadt

Das Stellenwertsystem als Prinzip vom Rechnen mit wenigen Steinen: Reflektierend mathematisch handeln

Zum Einstieg in das Thema Zahldarstellungen und Zahlbereichserweiterungen wurde im Schuljahr 04/05 eine Gruppe von 30 Schülerinnen und Schülern des 7. – 9. Jahrganges mit unterschiedlichen Materialien zum Visualisieren von Rechnungen ausgestattet. Die Materialien wurden soweit nötig durch Begleitbögen erläutert und die Lernenden wurden gebeten, in Partnerarbeit mit ihrem Material die folgenden Aufgaben zu rechnen und dabei über ihr Material und ihr Vorgehen nachzudenken:

Arbeitsauftrag:
Führe die folgenden Rechnungen mit Hilfe deines Materials aus. Was klappt gut mit diesem Rechenmittel und was klappt weniger gut bzw. gar nicht?
573 + 56 =
327 – 48 =
18 : 5 =
Beschreibe bei jeder Aufgabe dein Vorgehen.

Material:
Erbsen
Steine (versch. Größen)
Tontäfelchen
Schnüre der Inka
Fingerfeilschen
Römische Ziffern
Abakus

Das Ziel dieses Einstiegs war es einerseits, über die Materialien, ihre Stärken, Schwächen und Grenzen im Rahmen der Darstellung von Zahlen nachzudenken. Darüber hinaus bot sich in der Lernumgebung Gelegenheit, das eigene mathematische Handeln zu reflektieren.

Eine Episode zum Rechnen mit Steinen

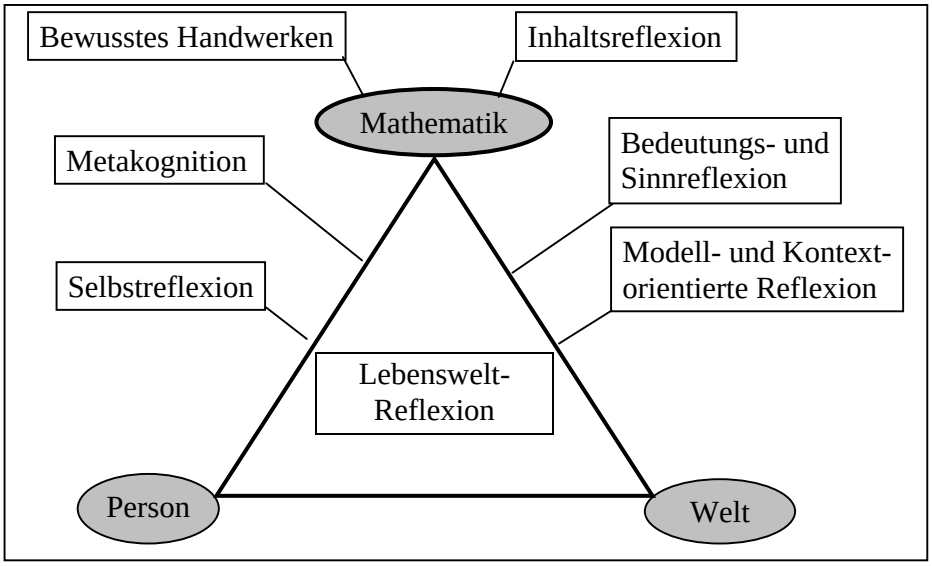
Antonia und Valentin, Förderschüler aus dem 8. Jahrgang, bekamen 35 Kieselsteine in verschiedenen Größen. Nach einigen Minuten sprechen sie mich an: „Wir haben nicht genug Steine.“ Antonia erzählt, dass sie die Steine gezählt habe. Sie reichten nur für die Division, die hätten sie bereits gelöst. Sie deutet einen Verteilungsprozess von 18 abgezählten Steinen auf 5 Haufen an. (18 : 5 = 3 Rest 3.) „Es sind aber nicht genug Steine für die anderen Aufgaben“, sagt sie erneut. „Die mit den Erbsen haben eine ganze Schüssel voll, die reicht bestimmt.“ Ich schlage vor, zu überlegen, worin sich die Kieselsteine von den Erbsen unterscheiden. Die beiden betrachten ihr Material erneut. Sie stellen fest, dass die Kieselsteine unterschiedlich aussehen und auch verschiedene Größen haben. Valentin beginnt zu sortieren.

Für den mathematischen Durchbruch muss der Blick durch Vergleiche mit den anderen Gruppen geweitet werden: „Was stellt eine Erbse in der Rechnung der anderen Gruppe dar? Warum geht das hier bei den Steinen nicht? Wie könnt ihr eure Sortierung nutzen und euch behelfen?“ Nach diesem mühsamen Prozess des Nachdenkens über eigene Handlungen und Hand-

lungsmöglichkeiten nimmt einer der beiden einen Stift und beschriftet die kleinen Steine mit 1, die mittleren mit 10 und die großen mit 100. Im Verhältnis zu diesem Abstraktionsschritt ist es nun unproblematisch, die beiden noch verbliebenen Aufgaben zu rechnen. Antonia hat sogar eine Idee, wie sie mit dem unbefriedigenden Ergebnis aus der Divisionsaufgabe umgehen könnten (Rest 3). Sie holt sich bei der Erbsengruppe dreißig Erbsen und verteilt erneut, um auch die Zehntel darzustellen.

Reflektieren von Mathematik

Reflexionen sind im Lernprozess bedeutend, um einen angemessenen Umgang mit dem jeweiligen Gegenstand zu erreichen, wie Jablonka (2003) in der Diskussion um mathematical literacy herausgestellt hat. Sie beziehen sich immer auf die Beziehungen zwischen Fach, Person und Welt. In der mathematikdidaktischen Literatur werden unterschiedliche Reflexionsebenen in den Blick genommen (vgl. etwa Neubrand 1990, Bauer 1990, Kaune 2001, Skovsmose 1998, Fischer o.J., Lengnink 2005). Im Schaubild werden diese Ebenen idealtypisch in das obige Beziehungsgeflecht eingeordnet.



Mit den einzelnen Ebenen werden unterschiedliche Bedeutungen von Reflexion im Lernprozess hervorgehoben. So geht es bei der Inhaltsreflexion, dem Bewussten Handwerken und der Metakognition vor allem um effektives Lernen von Mathematik, die Bedeutungs- und Sinnreflexion sowie die Modell- und Kontextorientierte Reflexion heben vor allem einen verständigen Umgang mit Mathematik und eine kritische Beurteilung von Mathematik und ihren Anwendungen hervor, die Selbstreflexion und die Lebensweltreflexion betonen die persönliche Positionierung im Umfeld der Mathematik. (Wie stehe ich zur Sache? Was ist mir an einer Situation wichtig: Wo hilft mir Mathematik zum Beschreiben? Wo hat sie ihre Grenzen?). Sie tragen so zum mathematischen Mündigwerden bei.

Reflektieren beim Rechnen mit Steinen

Im obigen Beispiel wurden auf unterschiedlichen Ebenen Reflexionsprozesse angeregt, die zum verständigen Umgang mit Mathematik und zu einer Handlungskompetenz beitragen können. So wird etwa eine *Inhaltsreflexion* durch die Beschränkung auf wenige Steine angestoßen: „Mit wenigen Steinen muss es auch gehen." Es werden *metakognitive Prozesse* ausgelöst: „Wir brauchen eine andere Idee als die mit den Erbsen." „Wir wollen immer nur einen Stein für eine eins nehmen, so geht es aber nicht." Rückschauend: „Wo waren unsere Denkbarrieren, was hat uns beim Überwinden geholfen?" *Bewusstes Handwerken* kann durch folgende Fragen angeregt werden: „Wie sind wir vorgegangen? Welche Handlungen waren mathematisch tragfähig und warum? Welche nicht?" Auch die *Selbstreflexion* kommt vor: „Es ärgert uns, dass du uns so wenig Steine gegeben hast." Das Beispiel birgt durch den Trick des Beschriftens ein Potenzial für *Bedeutungsreflexionen*: „Wenige Steine sind besser als viele Erbsen." Hier kann die Ökonomie des Stellenwertsystems handelnd erfahren werden.

(Mathematisch) Handeln beim Rechnen mit Steinen

Handeln und Denken sind eng verbunden. Denken wird etwa von Piaget (1971) als verinnerlichtes Handeln angesehen und bewusstes Handeln setzt Denken voraus. Da die Bedeutung des Handelns beim Lernen unbestreitbar ist, lohnt es sich, Handlungen auch beim Mathematiklernen zu reflektieren, um den Lernenden Handlungsspielräume innerhalb der Mathematik zu eröffnen, um ihnen aber auch die Handlungsspielräume der Mathematik bewusst zu machen. In diesem Beitrag wird ein weiter Handlungsbegriff zugrunde gelegt: Eine Handlung ist ein Prozess, der einem *Handlungsziel* dient, dessen Verwirklichung im *Handlungsergebnis* von dem *Handelnden* gewollt ist. Dazu können Objekte der Handlung (*Handlungsmittel*) herangezogen werden (vgl. Mittelstraß 2004). Handeln umfasst somit nicht nur materiell gestützte Tätigkeiten, sondern auch geistige Prozesse.

In der Lernumgebung „Zahldarstellungen und Zahlbereichserweiterungen" wurden die Handlungsmittel der Kleingruppen bewusst eingeschränkt. Damit wurde bei äußerlich gleichem Handlungsziel (der Darstellung der Rechnung mit Hilfe des Materials) ein Verlaufsspektrum und Ergebnisprofil vorgegeben. Das Variieren der Handlungsmittel in der Lernumgebung ermöglicht, über die Grenzen und Möglichkeiten der einzelnen Handlungsmittel zu reflektieren und sie in Bezug auf die Güte der Repräsentation zu vergleichen. Erbsen erweisen sich dabei als zu umständlich, Steine und die Stellenwertidee dahinter als ökonomisch, symbolisch umsetzbar und formalisierbar, Römische Ziffern als schlecht zu addieren, der Abakus als große Hilfe beim Materialisieren und Algorithmieren von Rechnungen. In diesem Feld werden Zahldarstellungen und Zahlbereichserweiterungen

als Antworten auf Handlungsengpässe verstehbar, in denen jeweils die Handlungsmittel verändert wurden, um den neuen Rahmenbedingungen zu genügen.

Die Handlungsmittel schränken die Handlungsmöglichkeiten der Lernenden ein. Damit war in der Lernumgebung angelegt, auch den Handlungsverlauf zu reflektieren. Durch Verändern der Handlungsmittel im Handlungsprozess (etwa beim Beschriften der Steine) werden auch die Handlungsspielräume neu festgelegt, was andere Handlungsebenen erschließt.

Fazit und Ausblick: Lernumgebungen zum reflektierenden Handeln

Lernumgebungen zum reflektierenden Handeln zeichnen sich aus durch

- Handlungssituationen, die unterschiedliche Handlungsspielräume eröffnen und damit einen Vergleich anregen;
- Das Vereinbaren von Handlungszielen;
- Muße zum eigenen Handeln;
- Unterrichtsgespräche über das eigene Handeln und das Handeln anderer auf der Basis eigener Erfahrungen;
- Reflexionen über Zwecke, Ziele und Erfolg der Handlungen aus mathematischer Sicht, um spezifisch mathematische Vorgehensweisen und Ansprüche zu verdeutlichen.

Weitere Entwicklungsarbeit besteht darin, geeignete Lernumgebungen zu schaffen, die verschiedene Reflexionsebenen beim Handeln aktivieren. In ihnen können Zwecke mathematischer Beschreibungsansätze und Darstellungsmittel deklariert und Perspektiven bewusst gemacht werden. So kann langfristig ein Begriffslernen mit einer Handlungskompetenz verbunden werden, die Lernende zum mündigen Umgang mit Mathematik befähigt.

Literatur

Bauer, L. (1990): Mathematikunterricht und Reflexion, in: ML, Heft 38, S. 6 – 9.

Fischer, R. (o. J.): Höhere Allgemeinbildung I und II. Unveröffentlichtes Manuskript, Klagenfurt/Wien.

Jablonka; Eva (2003): Mathematical Literacy, in: Bishop et al. (Hrsg.): Second International Handbook of Mathematics Education, Kluwer, Dordrecht, S. 75 – 102.

Kaune, Ch. (2001): Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als „die etwas andere Aufgabe“, in: MU 35, S. 35 – 46.

Lengnink, K. (2005): Mathematik reflektieren und beurteilen: ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit, in: Lengnink & Siebel (Hrsg.): Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen, Verlag Allg. Wissenschaft, Mühltal, S. 21 - 36.

Lengnink, K. (in Vorb.): Action and Reflexion in Mathematical Learning, ZDM, 2006.

Mittelstraß, J. (2004): Enz. Philosophie und Wissenschaftstheorie II, Metzler, Stuttgart.

Neubrand, M. (1990): Stoffvermittlung und Reflexion: mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht, in: Math. Did. (13), S. 21 – 48.

Piaget, Jean (1971): Psychologie der Intelligenz, Walter Verlag, Olten.

Skovsmose, O. (1998): Linking Mathematics Education and Democracy, in: ZDM 30(6), S. 195-203.

Tiit LEPMANN, Tartu

TIMSS 2003 - Leistungen und die Einstellung zur Mathematik

Vorbemerkungen

Die internationale TIMSS - Studie 2003 hat für Estland bemerkenswert gute Resultate mitgebracht. In der Reihenfolge der Resultate haben wir unter 46 Staaten den 8ten Platz belegt. Wenn man nur statistisch signifikant sich voneinander unterscheidende Resultate berücksichtigt, kann man feststellen, dass Estland gar die vierte Position hat.

Nach dem Vergehen der Euphorie der Freude sind auch so manche Tatsachen, die uns in der Schulmathematik Sorgen machen, zum Vorschein gekommen. Es lässt vermuten, dass diese Tatsachen nicht nur auf dem Niveau Estlands, sondern auch im internationalen Maßstab von Bedeutung sind. So möchten wir im Folgenden an die Betrachtung dieser Resultate der Forschung genauer herangehen[1].

Das Leistungsniveau des Staates und die Freude an Mathematik

Es ist eine allgemeinbekannte Tatsache, dass die Leistungen der Schüler in einem Fach positiv mit der Einstellung des Schülers zu diesem Fach korrelieren. Die besseren Leistungen im Fach werden gewöhnlich von der Freude der Schüler am Fach begleitet. Die TIMSS - Studie 2003 bestätigt am Beispiel Estlands auch diesen Zusammenhang (Abb.1). Wenn man denselben Zusammenhang im Vergleich zu den Mittelwerten unterschiedlicher Staaten erforscht, so offenbart sich ein absolut verkehrter Zusammenhang.

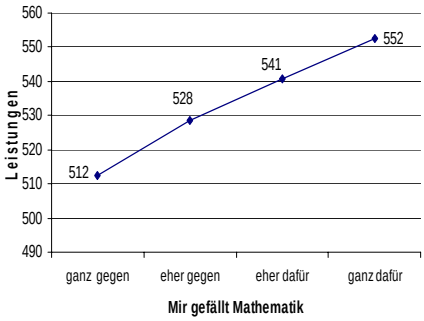


Abb. 1: Leistungen und Freude am Fach (Estland)

Je besser die Leistungen eines Staates in der Mathematik sind, desto wahrscheinlicher ist es, dass das Fach Mathematik für die Schüler dieses Staates weniger Freude bereitet (Abb. 2, Leistungen und Freude am Fach sind auf der vergleichbaren Skala, deren Mittelwert 100 ist, dargestellt).

Welche Hypothesen könnte man vom erzielten Resultat der Forschung ausgehend aufstellen?

[1] Diese Forschung ist durch Grant 6453 der Stiftung für Wissenschaft Estlands (ETF) unterstützt.

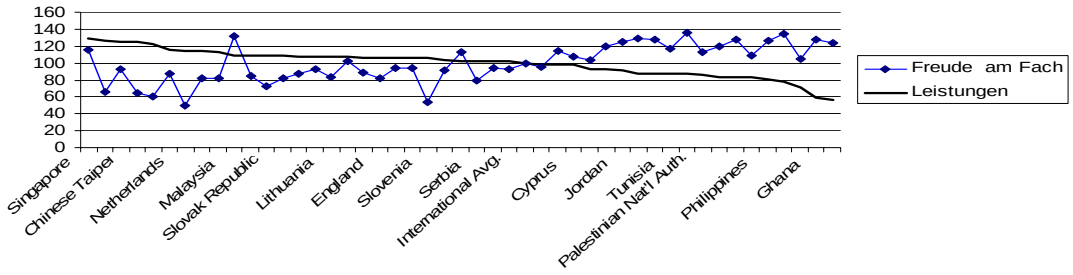


Abb. 2: Leistungen und Freude am Fach

- Hohes Leistungsniveau in der Reihenfolge der Staaten wird auf Kosten der Freude der Schüler am Fach erzielt.
- Wenn auf dem Niveau eines einzelnen Schülers gute Leistung gewöhnlich dank seiner Begabung erreicht wird und aus diesem Grunde das Fach für den Schüler nicht widerlich wird, so werden auf dem Niveau der Staaten gute Leistungen anders gewährleistet. Man kann annehmen, dass hinter den guten Leistungen der Staaten nämlich harte Arbeit steckt, die im entsprechenden Staat im Namen des Mathematikunterrichts gemacht wird.
- Die schwere zwar anstrengende Arbeit wegen des großen Umfangs des Lehrstoffes und der geringen Stundenzahl im Lehrplan ist sicher ein Grund dafür, was ein Lehrfach für die Schüler unangenehm machen kann.

Wenn man den Anteil der Mathematik im Lehrplan der Spitzenstaaten betrachtet, stellt es sich heraus, dass beinahe alle Spitzenstaaten ihre guten Leistungen unter den Bedingungen, wo Anteil der Mathematik im Lehrplan kleiner als der internationale Mittelwert ist, erzielt haben. Nur in Singapur und Belgien ist dieser Anteil größer als entsprechender Mittelwert der Staaten. In Singapur um 19% und in Belgien um 22% vom Gesamtumfang des Lehrplans. So sind Belgien und Singapur die einzigen Spitzenstaaten, in denen es sich noch über die positive Einstellung zur Mathematik reden lässt.

Das Leistungsniveau des Staates und die innere Motivation am Lernen der Mathematik

Die Schülerabschätzung der Mathematik vom Standpunkt der Bedeutsamkeit eines Lehrfaches wurde anhand der Abschätzungen von 5 Behauptungen im Fragebogen des Schülers berechnet.

- Bin der Meinung, dass das Lernen der Mathematik mir im Alltag hilft.
- Brauche Mathematik, um andere Fächer in der Schule zu lernen.
- Muss Mathematik gut lernen, dann kann ich an der Universität diese Fachrichtung studieren, die ich mir wünsche.

- Ich wünsche mir die Arbeit, wo die Kenntnisse in der Mathematik notwendig sind.
- Muss gut Mathematik lernen dann bekomme ich die Arbeit, die mir gefällt.

Es ist erwartungsgemäß, dass der Schüler, der die Mathematik hoch Abschätzt in diesem Fach auch bessere Leistung hat. Die TIMSS Resultate Estlands haben es auch bestätigt. Leider hat der Vergleich der Resultate unterschiedlicher Staaten aber völlig verkehrte Ergebnisse gegeben.

Je besser die Leistungen eines Staates in der Mathematik sind, desto niedriger wird die innere Motivation der Schüler dieses Staates am Lernen dieses Faches (Abb.3).

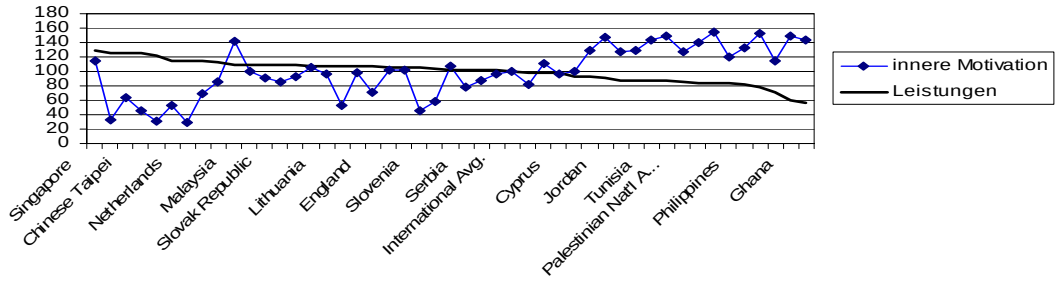


Abb. 3: Leistungen und innere Motivation

Von diesen Resultaten des Vergleichs ausgehend könnte man wieder Hypothesen aufstellen:

- Die Gründe der hohen Leistungen in der Reihenfolge der Staaten sind vielleicht nicht in der inneren Einstellung des Schülers sondern in äußeren mitwirkenden Umständen zu suchen, wie z.B. das hohe Niveau des Unterrichts, strenge Anforderungen, Unterstützung zu Hause usw.
- Vielleicht sind die Schüler dieser Altersgruppe selbst noch nicht fähig, adäquat die Bedeutsamkeit der Mathematik in ihrem Leben abzuschätzen. Man kann vermuten, dass bei der Abschätzung der Bedeutsamkeit unter anderen Faktoren eine wichtige Rolle Freude am Fach spielt. Das Gesagte wird durch den engen Zusammenhang zwischen der Freude an der Mathematik und der Bedeutsamkeit des Faches durch Abb. 4 bestätigt.

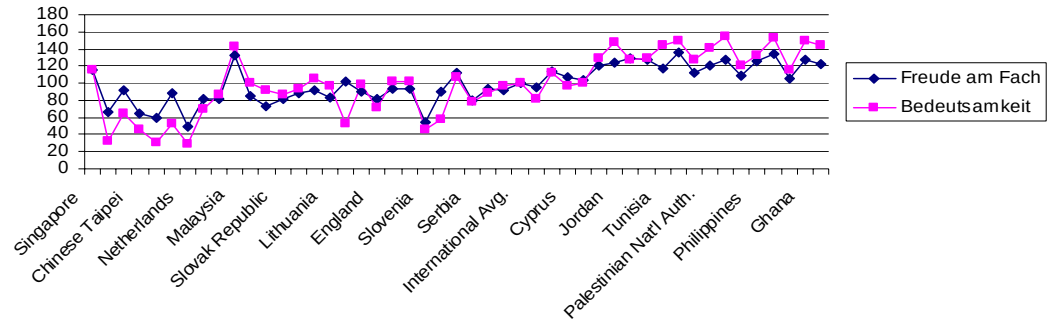


Abb. 4: Freude am Fach und Bedeutsamkeit

Das Leistungsniveau des Staates und die Selbstbewertung der Schüler

Die Selbstbewertung des Könnens des Schülers in der Mathematik wurde anhand der Abschätzungen von 7 Behauptungen im Fragebogen des Schülers berechnet. Es stellt sich wieder heraus, dass auf dem Niveau der Schüler die Leistung und Selbstbewertung der Schüler positiv korrelieren und auf dem Niveau der Staaten es nicht mehr der Fall ist (Abb. 5).

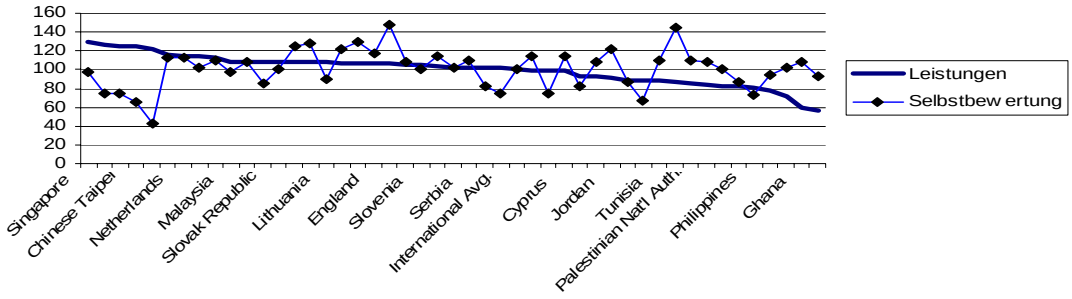


Abb. 5: Leistungen und Selbstbewertung

Zusammenfassung

Das Vorangegangene weist stark darauf hin, dass eine hohe Stelle in der Staatenreihenfolge, die anhand der TIMSS - Studie 2003 zusammengestellt ist, oft nicht auf Grund der inneren Faktoren der Motivation der Schüler sonder auf Grund der äußeren Faktoren der Motivation wie Schule, zu Hause, der Lehrer erreicht ist. Leider scheint es, dass diese äußeren Faktoren auf die Schüler folgenden Einfluss gehabt haben.

- Niedrige Selbstbewertung ihres Könnens in der Mathematik den Schülern suggeriert haben,
- Die Mathematik in ein unangenehmes Fach und für die Zukunftspläne unwichtiges Fach verwandelt haben.

Die gleiche ist die Lage auch in Estland. Bei uns kommen noch einige Probleme hinzu wie das Altern der Mathematiklehrer und die allgemein niedrige Abschätzung der Mathematik in Augen der Öffentlichkeit.

Das Alles stellt an uns folgende Fragen:

- Muss die Mathematik in der Schule tatsächlich ein schweres in den Augen der Schüler unwichtiges und unangenehmes Lehrfach sein?
- Wenn ja, dann wie können wir in diesem Fall die Anforderung des von den Regierungschefs der EU zusammengestellten Programms „Bildung und Schulung 2010“ die Zahl der Absolventen der Fachrichtung Mathematik, Naturwissenschaften und Technologie um 15% zu erhöhen gewährleisten?

Helmut Linneweber-Lammerskitten (Aarau)

Bildungsstandards in Mathematik: allgemein, abstrakt, exemplarisch oder vage?

Im Konsortium Mathematik des Schweizer Projekts zur Harmonisierung der obligatorischen Schule ("HarmoS") sind von den FachdidaktikerInnen der drei Sprach- und Kulturregionen trotz der gemeinsamen Grundlage (Klieme-Expertise) unterschiedliche Aspekte des Kompetenzbegriffs als besonders wichtig betont bzw. als eher unwichtig oder unbrauchbar zurückgewiesen worden. Verglichen mit Lernzielen wurden Kompetenzen als "komplexer", "eher übergeordnet", "allgemeiner", "abstrakter", "eher situationsbezogen-exemplarisch" und (im schlimmsten Fall) als "eher vage" charakterisiert. Allen diesen Begriffen ist gemeinsam, dass sie das Konstrukt "Kompetenz" und in der Folge das der Kompetenzmodelle und das der Bildungsstandards als "irgendwie abgehoben" charakterisieren. In meinem Vortrag möchte ich eine "Auslegeordnung" der genannten Begriffe versuchen, sie auf Lernziele, Kompetenzen, Kompetenzmodelle und Bildungsstandards beziehen und einige Fragen formulieren, deren Beantwortung zu einer Klärung beitragen könnte.

Abstrakt. Bei "abstrakt" und "konkret" handelt es sich um eine semantische Kategorie: abstrakt (oder konkret) ist demnach nicht eigentlich die Sache selbst, sondern die Beschreibung der Sache. Geläufig ist die Unterscheidung von verschiedenen Abstraktionsniveaus bei der Formulierung von *Lernzielen* nach Ch. Möller (Richtziele, Grobziele und Feinziele). Nach H. Meyer ist eine Lernzielformulierung " dann abstrakt, wenn durch sie viele alternative Konkretisierungen zugelassen werden.“ (Meyer, 39). Auch *Bildungsstandards* lassen sich auf verschiedenen Abstraktionsebenen formulieren: „Auf welcher Abstraktionsebene werden Standards formuliert: Auf der Ebene allgemeiner Bildungsziele und Wertvorstellungen? Auf der Ebene mehr oder weniger bereichsspezifischer Kompetenzen? Auf der Ebene von Lernzielen und -inhalten (content standards)? Oder auf der Ebene von Testwerten, wo der Standard durch einen Grenzpunkt (cut-off point) auf der Testwerteskala markiert werden kann (performance standards)?“ (Klieme, 32). Zwei Fragen werden hier miteinander vertwistet: die Frage nach dem Abstraktionsniveau der Bildungsstandards und die Frage, ob man content oder performance standards wählen sollte. Insofern lässt die etwas später gegebene Antwort zugunsten der content standards die Frage nach dem Abstraktionsniveau offen. Zu den *Kompetenzen* heisst es: „Kompetenzen sind abstrakte Konzepte einer wünschenswerten Bildung und nicht durch unmittelbar beobachtbares Verhalten definiert. Kompetenz*stufen* werden dann in Form von unterschiedlich anspruchsvollen kognitiven Pro-

zessen und Wissensanforderungen definiert, deren Beherrschung mit bestimmten Niveaus einer Kompetenzdimension korrespondiert.“ (Klieme, 85) Auch wenn in diesem Sinn Kompetenzen (bzw. Kompetenzbeschreibungen) immer schon etwas Abstraktes sind, erscheint es doch sinnvoll, ähnlich wie bei den Lernzielen zwischen eher abstrakten und eher konkreten Kompetenzbeschreibungen zu unterscheiden. Inwieweit kann man aber von *abstrakten* Kompetenzstufen sagen, sie seien „der Schlüssel zur Konstruktion und Auswertung kriteriumsorientierter Tests, indem sie eine Alternative zur willkürlichen Setzung von Leistungsmarken auf einem Kontinuum bieten“ (Klieme, 85) und mit Bezug auf Kompetenzen, sie seien „so konkret beschrieben, dass sie in Aufgabenstellungen umgesetzt und prinzipiell mit Hilfe von *Testverfahren* erfasst werden können.“ (Klieme, 19)?

Allgemein. Hier handelt es sich um eine quantitative Kategorie - Bezug genommen wird auf einen ganzen (und nicht nur auf einen partikulären, besonderen oder speziellen) Gegenstands- oder Geltungsbereich: von *allen* (nicht nur von einigen) Elementen ist die Rede, eine Behauptung soll nicht nur in einem speziellen (besonderen) Fall, sondern allgemein, d.h. in *allen* Fällen gelten („Allgemeingültigkeit“). *Lernziele* können in verschiedenen Hinsichten allgemein oder weniger allgemein gemeint sein, aber nicht immer geht dies aus der Formulierung klar hervor: „Die SchülerInnen sollen lineare Gleichungssysteme lösen können“ – sind damit *alle* SchülerInnen gemeint? Heisst das, dass sie *jedes* lineare Gleichungssystem lösen können sollen? In jeder Situation? Die "Allgemeinheit" allgemeiner Bildungsziele kann man darin sehen, dass sie von allen Mitgliedern einer Gesellschaft erreicht werden sollen: „Zu allgemeinen Bildungszielen werden diese Prämissen, weil erst im Prozess des Aufwachsens zu sichern ist, dass alle Heranwachsenden einer Generation, und zwar unabhängig von Herkunft und Geschlecht, dazu befähigt werden, in der selbständigen Teilhabe an Politik, Gesellschaft und Kultur und in der Gestaltung der eigenen Lebenswelt diesem Anspruch gemäss zu leben und als mündige Bürger selbstbestimmt zu handeln.“ (Klieme, 63) Von daher ist auch das Votum der Expertise zugunsten von Mindeststandards (Basisstandards), gegenüber Regelstandards und Idealstandards zu verstehen. In dieser Hinsicht ("alle SchülerInnen ...") setzten Mindeststandards ein sehr anspruchsvolles Ziel, wobei die Frage offen bleibt, ob wirklich "alle" gemeint sind, oder doch nur 80% bzw. ob die "Grundmenge" nicht von vornherein enger gefasst (z.B. auf alle "normal beschulbaren" (?) SchülerInnen beschränkt) wird. Mit Bezug auf die Inhalte sollen *Bildungsstandards* jedoch gerade keine quantitative Allgemeinheit anstreben, vielmehr soll eine Fokussierung stattfinden: "Die Standards decken nicht die gesamte Breite des Lernbereiches bzw. Faches in allen Verästelungen ab, sondern konzentrieren sich auf einen Kernbereich.“ (Klieme,

25). Offen bleibt das Verhältnis von Allgemeinheitsanspruch ("alle SchülerInnen") und Beschränkung auf Einzelnes ("Kernbereiche"): wie stark sollte die Leistungsfähigkeit der schwachen Schüler bereits bei der Festlegung des Kernbereichs berücksichtigt werden. Auf eine zweite Frage, inwieweit sich die Schule im Kern darauf beschränken sollte, die SchülerInnen auf alle wichtigen Lebenssituationen durch Bildungsstandards vorzubereiten, gibt ein Zitat von Winter eine bedenkenswerte Antwort: „Zweitens ist nicht einzusehen, inwiefern ausschliesslich auf die Meisterung von Situationen im späteren Leben hin erzogen werden soll. Das spätere Leben bietet doch wahrscheinlich nicht nur eine ununterbrochene Kette von Problemen, die eine beständige und auf Erfolg ausgerichtete angespannte Aktivität erfordern. Müssen wir nicht auch in die Fähigkeit zum gelassenen Betrachten, zur Kontemplation, ja zum Träumen zu erziehen versuchen? Das Getriebensein zum rastlosem Handeln und die Gier, auftauchende Probleme möglichst sofort zu erledigen (zu erschlagen!) können das Zusammenleben zu einer Qual werden lassen und zur Blindheit gegenüber Daseinsbestimmungen, die sich nicht als Probleme formulieren lassen, führen.“ (Winter, 26).

Komplex. Weil das Komplexe häufig auch kompliziert ist, wird "komplex" häufig mit "schwierig" verwechselt. Zunächst einmal handelt es sich aber nur um die Kategorie der Zusammensetzung: etwas ist komplex wenn und insofern als es aus Einfacherem zusammengesetzt ist bzw. Einfacheres übergreift. Kompetenzen, Kompetenzmodelle, Bildungsstandards, Lernziele können in verschiedener Hinsicht komplex sein. Kompetenzen und Lernziele können mehrere Fächer oder Fachbereiche übergreifen, verschiedene (kognitive) Fähigkeiten und Fertigkeiten umfassen, aus kognitiven, affektiven, volitionalen und sozialen Momenten zusammengesetzt sein; Kompetenzmodelle und Bildungsstandards können Jahrgangsstufen zusammenfassen, eine Zusammenschau verschiedener Schwierigkeitsstufen oder -niveaus erlauben, Abfolgen verschiedener Stadien individueller Entwicklung veranschaulichen u.a.m. Im Sinne der Klieme-Expertise sind Kompetenzen expressis verbis nicht als fachübergreifende Schlüsselqualifikationen zu verstehen, vielmehr geht die Expertengruppe davon aus, dass "Kompetenzen – verstanden als erlernte, anforderungsspezifische, Leistungs-Dispositionen – nur durch kontinuierlichen Aufbau von Wissen und Können in einem Inhalts- und Erfahrungsbereich entwickelt werden.“ (Klieme, 134) Andererseits umgreifen Kompetenzen im Sinne der Definition von Weinert (Klieme, 21) neben kognitiven auch motivationale, volitionale und soziale Momente. Inwieweit kann und soll dieser letztgenannte Komplexitätsaspekt bei der Festlegung von Bildungsstandards berücksichtigt werden, und wie ist er mit der Forderung nach Überprüfbarkeit in Einklang zu bringen?

Übergeordnet - Meta ... Ähnlich, wie man mit Bezug auf Sprache und Wissenschaft eine "Objekt-" und eine "Metaebene" unterscheiden kann, könnte man Kompetenzen als Metafähigkeiten auffassen, die es einem kompetenten Akteur gestatten, aus einem Repertoire verschiedener Fähigkeiten auf der Objektebene diejenigen auszuwählen und miteinander zu verbinden, die zum Meistern einer Situation am besten geeignet sind. Gemäss der Auffassung, dass das Ganze mehr als die Summe der Teile ist, sind die in diesem Sinn verstandenen Kompetenzen nicht einfach nur komplexe Bündel von Fähigkeiten und Fertigkeiten, sondern Fähigkeiten auf einer höheren Ebene. Lässt sich ein solcher Kompetenzbegriff mit der Vorstellung überprüfbarer Mindeststandards zum Zweck der Harmonisierung vereinbaren?

Exemplarisch. „Exemplarisch“ bedeutet nicht dasselbe wie „willkürlich“, sondern die Auswahl eines Beispiels, welches „paradigmatisch“ für einen ganzen Bereich ist. Hier stellt sich vor allem die Frage nach dem Verhältnis von Kompetenzbeschreibungen und Beispielaufgaben - genauer: inwieweit können und sollen Kompetenzen durch Beispielaufgaben illustriert bzw. durch Testitems definiert werden?

Vage. Leider wird nicht immer klar genug zwischen den oben genannten Eigenschaften und der Vagheit unterschieden - so formuliert etwa Meyer: „Richtziele können gerade deshalb bestimmte Leistungen erbringen, weil sie vieldeutig sind. Pointiert formuliert: Die Stärke der Richtziele liegt in ihrer Vagheit!“ (Meyer, 50). Die Vermeidung von Vagheit ist ein Gütekriterium für Theorien: soweit möglich sind Begriffe mit unscharfen Rändern, Behauptungen mit mehrdeutigem Inhalt und Regeln, bei denen man nicht weiss, was man tun oder lassen soll, zu vermeiden. Bei der Entwicklung nationaler Bildungsstandards sollten soweit möglich weder die theoretischen Begriffe (der Kompetenz, des Kompetenzmodells, der Standards) vage bleiben, noch die konkreten oder abstrakten Kompetenzbeschreibungen im Fach, das dazu entwickelte Kompetenzmodell oder die festgelegten Bildungsstandards. Wie kann man der Vagheit entgehen?

Schweizerischen Konferenz der Erziehungsdirektoren (EDK) [2004b]: Projekt HARMOS, Offertenausschreibung für die Entwicklung von Kompetenzmodellen [2004b], http:// edkwww.unibe.ch/PDF_Downloads/Harmos/Harmos_OA_d.pdf (24.02.2004)
Klieme, Eckhard, u.a. [2003]: Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise
Meyer, Hilbert [^{7}1978]:Trainingsprogramm zur Lernzielanalyse, Frankfurt a.M. (Fischer) ISBN 3-7610-3101-7
Winter, Heinrich [1989]: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht, Braunschweig/Wiesbaden (Vieweg)

Matthias Ludwig , PH Weingarten

Die Fußball WM 2006 im mathematischen Blick

Bei Mathematik und Fußball denkt man meist nur an den Ball der aus fünfeckigen und sechseckigen Lederstückchen besteht. Natürlich da steckt viel Mathematik drin, vor allem wenn man noch die anderen Möglichkeiten auslotet die es gibt einen Ball schön symmetrisch und rund herzustellen. Es soll aber versucht werden, die Mathematik die im Fußballspiel und drum herum existiert hervorzuheben. Warum? Nun eines ist doch klar: der Mathematik und auch dem Mathematikunterricht wird zuweilen Weltfremdheit, Starrheit und Trockenheit vorgeworfen. Vermeintlich ist es in den naturwissenschaftlichen Unterricht einfacher Umweltbezüge und Aktualitätsbezüge herzustellen. Hier wird z.B. öfters die Gentechnik (Gewinnung der eigenen DNS) im Biologieunterricht oder Umwelttechnik (Solarenergie) im Physikunterricht angeführt. Dabei vergisst man aber, dass dies nur sehr spezielle Gebiete sind und die meist nur in den wenigen oberen Klassenstufen behandelt werden kann. Genau betrachtet ist es mit den Aktualitätsbezügen im naturwissenschaftlichen Unterricht nicht weit her, im Gegenteil sie sind bezogen auf ein ganzen Schülerleben sehr dünn gesät. Im Mathematikunterricht gelingt ein Aktualitätsbezug eigentlich viel einfacher: Wilfried Herget z.B. macht das regelmäßig in seiner Rubrik „Mathematik aus der Zeitung“ in der Zeitschrift Mathematik lehren vor. Man ist hier zwar auf die Fauxpas´ der Zeitungsredakteure angewiesen, aber die lassen einen miot schöner Regelmäßigkeit nicht im Stich.

Die Mathematik großer Ereignisse.

Es gibt auch noch eine andere Möglichkeiten Aktualitätsbezug in den Mathematikunterricht zu bekommen: Es besteht nämlich die Möglichkeit Teile der verwendeten, aber versteckten Mathematik bei Großereignissen wie Fußballweltmeisterschaften, großen Radrennen oder olympischen Spielen zu studieren. Oftmals ist es die Mathematik der unteren Sekundarstufe I die man dort wieder findet und welche zu erstaunlichen Kenntnissen und Ergebnissen führen kann. Es müssen nicht gleich lineare Optimierung, Extremwertberechungen oder neue diskrete Verfahren behandelt bzw. benutzt werden. Oftmals reicht das Rechnen mit Größen, Abschätzungen, die Ausnutzung von Proportionalität, Prozentrechnen, die geschickte Anwendung des Dreisatzes oder einfache Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie Elementargeometrie.

Mathematik im Fußballspiel

Kommen wir nun zur Mathematik der Fußball-WM 2006. Wegen der Kürze und der für den Mathematikunterricht gebotenen Nachhaltigkeit will ich mich hier auf mathematische Fragen konzentrieren die mit Fußball zu tun haben und natürlich auch, aber nur mittelbar etwas mit der WM 2006.

Denkt man mathematisch oder das Fußballspiel nach so ergeben z.B. solche möglichen Fragestellungen zum Thema (siehe auch Ludwig 2006, Wesson 2005):

Warum sind die Spielfeldmaße so wie sie sind? Nun das liegt daran, dass Fußball aus England kommt und dort noch die Maßeinheiten Inch, Fuß und Yard existieren. 1Yard sind 3 Fuß und 1Fuß sind 12 Inch, ein Inch entspricht 2,54cm. Und so erklärt sich die Torbreite von 7,32m und Torhöhe von 2,44m ganz einfach in 8 Yard und 8 Fuß. Und der Fünfmeterraum ist eben 6 Yard, der Elfmeterpunkt 12 Yard vom Tor entfernt und der 16-Meterraum 18Yard groß. Passend zu den Spielfeldmaßen: Wie lange sind die Rohre der Rasenheizung in einem Fußballstadion und wie viele Badewannen Frostschutzmittel werden zum Füllen der Rohre benötigt? Wo ist der beste Platz im Stadion? Gibt es ein mathematisches Modell für die Trefferquote beim Elfmeter? Warum fliegt der Ball, wenn er von der Hand abgeschlagen wird weiter, als wenn er vom Boden abgeschossen wird? Warum spielen 10 Mann beim Fußball? Warum machen wenig Tore die Bundesliga interessanter? Warum fallen bei einem Spiel, beim dem der Außenseiter gewinnt meist eine ungerade Anzahl von Toren? Wie wird der Spielplan der Bundesliga gemacht? Wie lange ist die Schnur mit der ein Fußball zusammengenäht ist? Welche Ballformen gibt es eigentlich? Wie viele Möglichkeiten gibt es eigentlich einen Ball zusammenzunähen? Warum gewinnt Deutschland 2006 die Weltmeisterschaft im eigenen Land? Auch Fermifragen bieten sich an: Wie hoch würde das Bier, welches während allen WM- Spielen in den Stadien getrunken wird auf einem Spielfeld stehen? Wie viele Fußbälle gibt es überhaupt in Deutschland, in Europa oder auf der Welt?

Warum gibt es zehn Feldspieler?

Okay, gehen wir der Sache mit den 10 Feldspielern auf den Grund. Warum sind es zehn und nicht 15 oder 20 Spieler. Die Sache ist sicherlich historisch durch Regeln bedingt und hat sich so ergeben, aber warum hat sie sich so ergeben? Wir versuchen eine mögliche Antwort. Nun es liegt auf der Hand, dass die Spielfeldgröße durchaus einen Einfluss auf die Spieleranzahl hat. Je kleiner das Spielfeld, desto weniger Spieler. Sonst würde das Spiel zu hektisch werden. Wie bei einem Flipperspiel würde der

Ball hin- und herfliegen und es könnten sich keine Spielzüge entwickeln weil der Gegner viel zu schnell stören könnte. Die Grundlage für einen guten Spielzug ist, dass man den Ball unter Kontrolle bringt, dann die Übersicht gewinnt und schließlich den Ball kontrolliert weiterspielt. Für so eine Aktion kann man ungefähr 3 Sekunden rechnen. Das würde bedeuten, dass man 20 solche Aktionen pro Spielminute hat. Das stimmt ziemlich gut mit der Realität überein. In diesen drei Sekunden muss also der Gegner eine reelle Chance haben den Ball zu erreichen. Wir betrachten nun die Fläche die ein Spieler in diesen drei Sekunden abdecken kann. Die „Höchstgeschwindigkeit“ liegt bei 10m/s. Wir können also in unserem einfachen Modell mit 5m/s als mittlere Geschwindigkeit rechnen. Der Gegner kann also in den drei Sekunden einen Kreis mit Radius 15m abdecken das. Dem entspricht einer Fläche von gut 706 m^2. Ein mittleres Fußballfeld hat die Maße 68m x 105m, dies ergibt eine Fläche von 7140m^2. Das bedeutet, dass man mit 10 Feldspielern das Spielfeld ideal abgedeckt hätte. Dieses Modell passt auch auf die Spieleranzahl beim Eishockey.

Wo ist der beste Platz im Stadion?

In modernen Fußballstadien ist zwischen den Zuschauerrängen und dem Spielfeld keine großen Zwischenraum mehr. Gibt es im Stadion einen besten Platz, unter dem man das Spiel besonders gut beobachten kann? Um das mathematisch an zugehen, müssen wir „bester Platz“ definieren. Es ist sicherlich eine vernünftige Definition anzunehmen, dass man mit „bester Platz“ einen Sitzplatz meint, von dem aus man die beiden Tore unter einem möglichst großen Winkel sehen kann. Wir könnten die Definition abschwächen und sagen es reicht aus, ein Tor unter einem möglichst großen Winkel zu sehen. Dieses Problem hat nämlich auch ein potentieller Torschütze, der, wenn er z.B. auf Linksaußen auf die Torauslinie zu rennt, im besten Moment schießen muss. Wie man sich denken kann, ist das ein geometrisches Problem.

Dass es eine optimale Schussposition, bzw. einen optimalen Sitzplatz geben muss liegt auf der Hand. Befindet man sich schon auf der Torauslinie ist ist der Sichtwinkel gleich null und wenn man sehr weit weg ist, ist der Winkel auch fast Null. Also muss es dazwischen ein Maximum geben. Die Lösung des Problems liegt nun darin den optimalen Punkt zu finden.

Angenommen der Spieler läuft auf der gelben Geraden in Richtung des linken Tores, so ist seine beste Schussposition dort, wo der Kreis durch die beiden Torpfosten die Laufgerade berührt. Die Abbildung 1 zeigt die durch die Ortslinienkonstruktion entstandenen Hyperbeläste. Die

Hyperbeln mit der Gleichung $y^2-x^2=c^2$ laufen asymptotisch gegen die Winkelhalbierenden der einzelnen Spielfeldviertel.

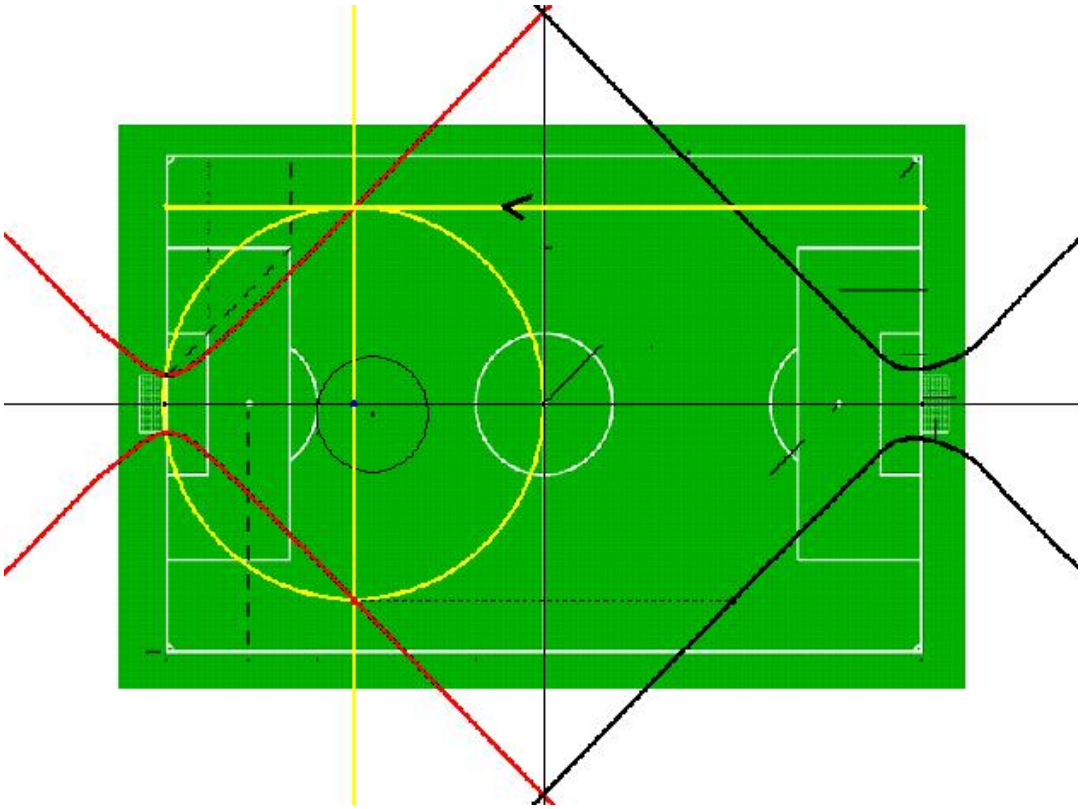


Abbildung 1: Die Hyperbeläste als geometrischer Ort der besten Schuss- und Sitzposition. Der Berührpunkt des Kreises durch die beiden Torpfosten mit gelben Laufgeraden“ ist optimale Schusspunkt, oder der optimale Sitzplatz.

Fußballmathematik und die Einbettung in den Unterricht.

Die eben angesprochenen Fragen lassen sich gut im Unterricht oder für besondere Fußball-Kinder-Unis bzw. aktuelle Lehrerfortbildungen umsetzen. Denn jeder kennt die Fußballbasics (11 Leute sind in einem Team, das Spiel dauert 90 Minuten) und wenn nicht hat man sie schnell erklärt. Es ist faszinierend zu beobachten, wie die Schüler und auch die Lehrerinnen und Lehrer die Macht der Mathematik neu oder zum ersten Mal bewusst erleben, dass es mit einfachen Rechnungen und Größenabschätzungen möglich ist, alltägliche und angeblich völlig mathematikfreie Dingen zu erklären und zu deuten.

Literatur:

Herget, W. Scholz, D. (2006): Die etwas andere Aufgabe, aus der Zeitung Kallmeyer´sche Verlagsbuchhandlung.
Ludwig, M. (2006): Fußballmathematik, Mathewelt in: mathematik lehren 135,
Wesson, J. (2006). Fußball- Wissenschaft mit Kick, Heidelberg, Elsevier Verlag
Augustin, E., et al. (2005), Fußball unser, Süddeutsche Zeitung

Jürgen Maaß, Linz

"Power Girls" lernen gerne Mathematik

Als eine von vielen Maßnahmen im Rahmen des von der EU geförderten strategischen Programms „Innovatives Oberösterreich 2010“ wird das Projekt „Power Girls“ gefördert. Auf der Projekthomepage http://powergirls.eduhi.at/ finden sich die Informationen zum Projekt, die ich im Folgenden zur Erläuterung des Hintergrunds kurz zusammenfasse.

Das Ziel ist es, unabhängig von Schul- bzw. Berufswahlentscheidungen technisch interessierten Mädchen mehrerer Schulen die Möglichkeit zu geben, Gleichgesinnte kennen zu lernen, in dieser Gruppe Interessen auszutauschen und in speziellen Schwerpunktseminaren und Veranstaltungen wie Firmenbesuchen ihr Wissen über, aber auch ihre Freude an Technik zu vertiefen. "Power Girls" zielt auf Peer-group-education ab. Mädchen der 2. Klasse (jeweils fünf Mädchen aus 25 Schulen) in der Sekundarstufe I nehmen teil. Sie erhalten Einblick in Technikphänomene und wirken als Multiplikatorinnen für Kolleginnen und Eltern. Diese Altergruppe wurde gewählt, weil die Mädchen in diesem Alter, wenn sie sich für Naturwissenschaft und Technik interessieren, noch mehr Möglichkeiten als etwa Maturantinnen haben, durch die Wahl eines Schultyps bzw. einen Zweiges in einer Schule dem Interesse zu folgen. Zudem ist in diesem Alter der Zugang zu Technik und Naturwissenschaft noch recht ungezwungen bzw. weniger als später vom anerzogenen oder übernommenen Rollenverständnis erschwert oder gar blockiert. Üblicherweise setzen Förderaktionen für Mädchen meist knapp vor einer Berufsentscheidung bzw. der Wahl einer weiterführenden Schule bzw. eines dementsprechenden Studiums ein. Die Berufswahl wird aber nicht nur vom Wissen über Ausbildung und Beruf, sondern sehr wesentlich von der Einstellung zu Technik und Naturwissenschaften geprägt. Zielsetzung dieses Projektes ist, die emotionale Komponente der Entscheidung für einen technischen Beruf bei Mädchen zu verstärken.

Das Projekt hat im Herbst 2005 begonnen. Im Schuljahr 2005/06 finden für die Mädchen drei 2-tägige Workshops und für die LehrerInnen 2 LehrerInnenfortbildungstage statt. Im Zuge der Workshops werden die Mädchen mit technischen Phänomenen bekannt gemacht, natürlich in einer altersadäquaten Form, die besonders auf die Mädchen eingeht und vor allem auch Spaß macht. Technik soll in diesen Veranstaltungen spannend präsentiert werden. Die Mädchen werden über die E-Community zwischen den Veranstaltungen betreut und begleitet.

Im Februar 2006, während ich diesen Text schreibe, liegen selbstverständlich noch **keine Ergebnisse der Abschlussevaluation** vor. Die Projektleiterin, Frau Dipl. Päd. R. Fechter, berichtete mir jedoch, dass bisher etwa die Hälfte der geplanten Aktivitäten stattgefunden haben und von Seiten der Mädchen und der LehrerInnen sehr positiv beurteilt werden. Einige Dokumente, insbesondere Erlebnisberichte der Mädchen dazu, finden sich im Internet auf http://powergirls.eduhi.at/index.php?PHPSESSIONID= &design = powergirls&url=community&cid=5689&modul=1&folder= 47399&

Bezug zur Mathematikdidaktik

Mein Beitrag zu diesem Projekt sind besondere Mathematikunterrichtseinheiten für Zusatzunterricht, die diese Zielgruppe für Mathematik motivieren sollen. Diese Einheiten, an deren Erstellung auch einige LehrerInnen mitgewirkt haben, stehen im Mittelpunkt dieses Textes.

Die Aufgabenstellung für die Didaktik klingt nur auf den ersten Blick einfach. Welche Art von Mathematikunterricht könnte die Power Girls motivieren? Schon in der Frage stecken einige implizite Aussagen oder Thesen über den üblichen Mathematikunterricht, insbesondere die, dass dieser Unterricht normalerweise offenbar nicht sehr gut dazu geeignet ist, Mädchen für Mathematik, Technik und Naturwissenschaften zu interessieren und zu motivieren. Ohne diese These der Projektleitung „Educational Highway“ (die mir sehr plausibel vorkommt) hier näher hinterfragen oder erläutern zu wollen, verweise ich auf die geringe Wertschätzung des Mathematikunterrichts, die u.a. im Zuge von PISA deutlich wurde. Österreichische Mädchen rangieren da auf den hintersten Plätzen. Dass die offenbar nicht optimale Beziehung der Mädchen zur Mathematik aus Sicht der Projektleitung nicht leicht zu ändern ist, mag auch daraus hervorgehen, dass der „Educational Highway“ sich nach einer eher exotischen Hilfe umgesehen hat, nämlich der universitären Mathematikdidaktik (und nicht einfach den beteiligten LehrerInnen gesagt hat „Hier dürft ihr endlich einmal frei vom Stoffdruck in der Schule so Mathematik unterrichten, dass es den Mädchen richtig Spaß macht!“).

Ebenfalls nur andeuten kann ich hier meine Überlegungen zur Frage, welche Art von Unterricht angemessen sein könnte, indem ich auf meinen Hintergrund als Mitgründer der MUED (www.mued.ev) verweise. In den mittlerweile fast 30 Jahren, in denen LehrerInnen MUEDe Unterrichtseinheiten erproben, hat sich in ihrem Mathematikunterricht viel Positives und Motivierendes im ereignet.

Unter Beteiligung von Dr. Vlasta Kokol-Voljc, Maribor (Gleichungen), Frau Mag. A. Müller, St. Valentin (Strategiespiele Bridge it und Hex, sowie Karthesische Jagd und Sprouts), Ines Petzschler, Werner Heisenberg Gymnasium, Leipzig (Primzahlen und Zuordnungen) und Mag. Paul Schranz, Europagymnasium vom Guten Hirten, Baumgartenberg (So lügt man mit Statistik I bis III) entstanden insgesamt 25 Unterrichtsvorschläge, die ebenfalls im Internet zu finden sind: http://powergirls.eduhi.at/.

Eine zentrale Idee hinter der Auswahl der Themen war und ist, dass sich nicht einfach festlegen lässt, was für die einzelnen Mädchengruppen und LehrerInnen optimal passt. Mit einem Spektrum von möglichen und passenden Unterrichtseinheiten erhöht sich die Chance, für den jeweiligen Zusatzunterricht „das Richtige" zu finden. Alle Ausarbeitungen enthalten Anregungen zu Eigenaktivitäten, Gruppenarbeiten und über den Tag hinausgehenden Aktivitäten. Die meisten Beispiele sind realitätsbezogener Unterricht zu Fragen, die aus Sicht der Power Girls interessant sind (bzw. mit etwas einführender Erläuterung der LehrerInnen als interessant und motivierend erkannt werden).

Im Unterschied zu den sonst üblichen MUED – Materialien oder Aufsätzen in den ISTRON Bänden enthalten die Vorschläge explizite methodische Vorgaben. Das soll kein Zeichen der Bevormundung setzen, sondern nur exemplarisch verdeutlichen, wie sich ein Vorschlag in den gegebenen 100 Minuten Unterrichtszeit für den Zusatzunterricht umsetzen lässt.

Ein Beispiel, dass ich ausgearbeitet und mit den LehrerInnen erprobt habe, ist die „**Robotersteuerung**". Worum geht es? Ein Roboter, gespielt von einem der Mädchen, soll mithilfe eines vorher überlegten Programms möglichst genau zu einem Ziel gesteuert werden. Der Kern des Problems ist die Genauigkeit: Wie lassen sich die Befehle für die Bewegungen so messen und normieren, das der Roboter tatsächlich genau am Ziel ankommt? Die exakte Robotersteuerung ist ein Problem, dass bei jedem Industrieroboter auftritt und gelöst werden muss (auch Linzer IndutriemathematikerInnen haben erfolgreich solche Problem bearbeitet). Wer dazu Bilder und Informationen aus der industriellen Praxis sehen möchte, schaut im Internet unter http://www. linearroboter-knickarmroboter.de/ oder http://www.abb.de/automotive nach. Wer einmal selbst einen Roboterarm steuern möchte, klickt auf http://phprobot.gotdns.com/.

Aus mathematischer Sicht geht es um die Wiederholung und Übung von Aufgaben zur Geometrie, das Messen von Entfernungen, das Umrechnen von Einheiten und insbesondere um Messgenauigkeit und einheitliche Maßeinheiten.

Als spielerischer Einstieg in die Problematik kann eine Gruppenarbeit der Schülerinnen gewählt werden. Eine von ihnen soll Roboter spielen und eine zunächst ganz einfache Bewegung ausführen, etwa: „Gehe bis zur gegenüberliegenden Wand des Klassenzimmers!“ Zur Vorbereitung werden „Spielregeln“ vereinbart, etwa: Das Mädchen als Roboter muss sich strikt an vorgegebene Befehle halten. Der Roboter kann sich im Klassenraum nur in zwei Richtungen bewegen, vorwärts und rückwärts oder rechts und links. Die Roboterin (also das Mädchen) kann keine Entfernungen messen, sondern nur zählen, z.B. Schritte.

Die Schülerinnen jeder Gruppe erstellen zur Lösung der Aufgaben Bewegungsanweisungen für ihren Roboter. Der Reihe nach bewegen sich die Roboter (=Mädchen) strikt nach Anweisung. In der Nähe der gegenüberliegenden Wand und am Fenster wird markiert, wie genau die Roboter der einzelnen Gruppen ihr Ziel erreicht haben. Die Abstände werden gemessen. In der nächsten Phase wird gemeinsam nachgedacht und diskutiert: Wie groß sind die Fehler? Weshalb sind überhaupt Fehler entstanden? Hat die als Roboter ausgewählte Schülerin die Anweisungen schlecht befolgt? Macht es eine andere besser? Gibt es ein Problem, wenn eine andere Schülerin den Roboter spielt und dieselben Anweisungen erhält? Die aufgestellten Thesen dazu werden besprochen und in einem anschließenden Wettbewerb überprüft: Die Gruppen sollen für dieselbe (diesmal kompliziertere) Strecke Anweisungen ausarbeiten. Wie beim Probelauf werden die Roboter auf die Reise geschickt und die Abweichung vom Ziel wird gemessen und verglichen. Die Gruppe, die gewonnen hat, erläutert den anderen Gruppen ihre Strategie. Wie haben sie die Fehler minimiert? In die Diskussion über erfolgreiche Strategien kann auch ein wenig Wissenschaftsgeschichte eingebracht werden, etwa der Pariser Urmeter als realer Problemlöseversuch (weg von Elle und Fuß hin zu Normmeter). Übrigens haben weder die LehrerInnen im Vorbereitungsseminar noch die Studierenden, mit denen ich die Einheit durchgespielt habe, von sich aus den Sprung von ihren Schritten oder Schuhlängen zum Maßband gemacht.

Die Wegbeschreibungen der Schülerinnen können auch als Ausgangspunkt für die Frage nach besonders guten Methoden solcher Beschreibungen dienen und letztlich zu Koordinaten führen. Ausgangspunk sind persönliche Ansprachen: „Gehe jetzt bitte drei Schritt vorwärts!“, die von Kommandos abgelöst werden „Drei Schritte vorwärts!“ und dann Kurzformen weichen, etwa: „3 S geradeaus“ bzw. „links, 3 S“ oder „3 S, 90 Grad links, 12 S“. Dann ist eine Folge von Koordinaten, etwa (0,0), (3,0), (3,12) für sich schon überzeugend, einfach und exakt.

Andreas MARX, Paderborn

Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen und die „Basic Metaphor of Infinity“

Im Rahmen einer qualitativen Untersuchung wurde mit jeweils zwei Schülern offene, problemzentrierte Interviews geführt, wobei das behandelte Problem stets einen unendlichen Prozess zur Grundlage hatte. Dabei zeigen die Schüler verschiedene Ansätze, wie sie mit der Frage nach dem „Ergebnis“ eines unendlichen Prozesses umgehen. Diesem deskriptiven Teil möchte ich die „Basic Metaphor of Infinity“ (kurz: BMI) nach Lakoff und Núñez zur Seite stellen. Abschließend werde ich den Grenzwertbegriff für Folgen in der Analysis in den Fokus rücken, um einige Konsequenzen im Hinblick auf Lernprozesse von Schülern und die Akzentuierung von Unterricht zu ziehen.

BMI

Lakoff und Núñez nähern sich unendlichen Prozessen von Seiten der Linguistik, wo unter dem „aspect“-Konzept eine Struktur verstanden wird, mit der Handlungen und Ereignisse durch Sprache beschrieben werden: „Readiness, Starting up, The main prozess, Possible interruption and resumption, Iteration or continuing, Purpose, Completion, Final state“ (vgl. Lakoff und Núñez 2000)

Lakoff und Núñez führen weiter aus, dass nicht nur die Sprache, sondern auch unser „Konzeptsystem“ nach dieser Struktur organisiert ist.

Lakoff und Núñez unterscheiden zwischen dem „perfective aspect“ und dem „imperfective aspect“. Im Rahmen des „perfective aspects“ wird eine Handlung als Ganzes wahrgenommen, wobei der Blick auf dem Abschluss liegt. Der „imperfective aspect“ fokussiert eher auf die interne Prozessstruktur. Ein Beispiele für den „perfective aspect“ ist die Tätigkeit „Springen“. Der Blick liegt auf der Handlung als Ganzes wobei die Landung als Teil des Sprungs angesehen wird. Demgegenüber steht die Tätigkeit „Atmen“. Der Blick liegt auf den einzelnen Atemzügen, wobei der Abschluss des Atmens – das Einstellen des Atmens – in der Regel nicht der Tätigkeit „Atmen“ zugeordnet wird.

An diese Differenzierung anknüpfend beschreiben Lakoff und Núñez zwei Wege, wie Prozesse mit einem Abschluss konzeptualisiert werden können.

1. Der Abschluss liegt innerhalb des Prozesses.
2. Der Abschluss liegt außerhalb des Prozesses.

Mit diesem Konzept nähern sich Lakoff und Núñez nun endlichen und unendlichen Prozessen in der Mathematik. Bei endlichen Prozessen ist der Abschluss Teil des jeweiligen Prozesses. So endet z.B. die schriftliche Division von zehn durch vier mit Zwei Komma Fünf, wobei dieses Ergebnis Bestandteil des Prozesses ist.

Bei unendlichen Prozessen liegt der Abschluss außerhalb des Prozesses. Ein Beispiel hierfür könnte die schriftliche Division von eins durch drei sein. Null Komma Periode Drei wird nicht durch dem Prozess erreicht.

In Abbildung 1 stellen Lakoff und Núñez die Struktur eines endlichen Prozesses der Struktur eines unendlichen Prozesses in der Mathematik gegenüber.

Source Domain COMPLETED ITERATIVE PROCESSES		*Target Domain* ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON
The beginning state	→	The beginning state
State resulting from the initial stage of the process	→	State resulting from the initial stage of the process
The process: From given intermediate state, produce the next state.	→	The process: From given intermediate state, produce the next state.
The intermediate result after that iteration of the process	→	The intermediate result after that iteration of the process
The final resultant state	→	**"The final resultant state" (actual infinity)**
Entailment *E*: The final Resultant state ist unique and follows every nonfinal state.	→	**Entailment *E*: The final Resultant state ist unique and follows every nonfinal state.**

Abb. 1: "Basic Metaphor of Infinity" (vgl. Lakoff und Núñez 2000)

Dabei soll das Schema das Bestreben ausdrücken, auch im Falle von unendlichen Prozessen, wie bei endlichen Prozessen auch, den „Abschluss" als wesentliches Element eines unendlichen Prozesses hervorzuheben. Der hervorgehobene Bereich zeigt diese Abweichung von der ursprünglichen Konzeptualisierung eines unendlichen Prozesses mit Fokus auf der Prozessstruktur.

Im Rahmen der BMI lassen sich zunächst Beschreibungs- und Argumentationsweisen direkt aus dem Ausgangsbereich in den Zielbereich übertragen – in beiden Fällen gibt es einen Startpunkt, eine Iteration und mögliche Unterbrechungen. Interessant und schwierig wird es aber erst in dem gekennzeichneten Bereich. Was soll unter dem Ergebnis eines unendlichen Prozesses verstanden werden? Und wenn darauf eine erste Antwort gefunden ist, wie kann dieses präzise gefasst werden? Eine Antwort liefert die Analysis.

Die Schlussweise mit Hilfe einer Metapher beinhaltet zwei charakteristische Elemente: Analoge Elemente, wo die Erkenntnisse aus dem Ausgangsbereich direkt auf den Zielbereich übertragen werden und verschiedene Elemente, die neue Erklärungen fordern.

Blick auf Schülerüberlegungen

Die Schüler zeigen vielfältige Strategien mit unendlichen Prozessen umzugehen. Ich werde hier einige Beobachtungen zusammenfassen. Für detaillierte Beschreibungen anhand von Interviewauszügen sei hier auf Marx 2006 verwiesen.

Die Schüler weisen den von ihnen beschriebenen unendlichen Prozessen keine Ergebnisse zu. Stattdessen versuchen sie diese als Ganzes möglichst genau zu beschreiben. Bemerkenswert ist dabei, dass sie auf periodische Dezimalzahlen zurückgreifen, um die Dynamik der von ihnen beschriebe-

nen Prozesses zum Ausdruck zu bringen. Sie behandeln periodischen Dezimalzahlen wie eine Art „veränderliche Größen[1]“ und keineswegs wie „feste“ Zahlen. Periodische Dezimalbrüche haben in den Augen der Schüler auch keinen Punkt auf der Zahlengeraden, sondern mehrere, oder sie „wandern“ oder ähnliches (vgl. auch Marx 2005). Schüler können sich durchaus Zahlen vorstellen, mit denen sie unendliche Prozesse beschreiben können.
Andere Schüler arbeiten mit einer Art Permanenzprinzip im eigentlichen Sinne des Wortes. Erkenntnisse, die während der Iteration gewonnen wurden, werden auf das „Ergebnis“ des unendlichen Prozesses übertragen.
Diese Denkweise, bei der Eigenschaften aus dem Endlichen ins Unendliche weitergeführt werden, hat eine lange Tradition. Einer der berühmtesten Vertreter dieser Argumentationsweise ist Leibniz mit seinem Kontinuitätsprinzip, bei dem er z.B. die Ruhe als unendlich kleine Bewegung ansieht (vgl. Guicciardini 1999). Der neu zu klärende Aspekt innerhalb der BMI wird durch eine Fortführung von aus dem Endlichen bekannten Beobachtungen beschrieben.
Eine entscheidender Aspekt im Hinblick auf die BMI ist die Beobachtung, dass es Schülern gelingt einen Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Prozessen herauszuarbeiten. Die Schüler dringen an die zentrale Stelle der BMI - die Frage nach dem „Ergebnis“ unendlicher Prozesse - vor. Sie haben jedoch sehr vielfältige Ideen, wie man mit diesem Problem umgehen könnte.

Einige Konsequenzen

Der Grenzwertbegriff für Folgen in der Analysis gibt eine Antwort auf die Frage, was unter dem „Ergebnis“ eines unendlichen Prozesses verstanden werden kann und in welchem Verhältnis ein unendlicher Prozess zu seinem „Ergebnis“ steht.
Das einsichtige Arbeiten mit Folgen setzt aber voraus, dass es einen „echten“ Bedarf nach solchen Objekten gibt. Es bedarf der Erkenntnis, dass man mit ihnen etwas beschreiben kann, was ohne nicht gelang. Dieses ist nicht unbedingt der Fall, wenn Schüler in periodischen Dezimalzahlen Partner finden, mit denen sie unendliche Prozesse beschreiben können.
Es wird deutlich, wie wichtig die Vorstellungen von Zahlen als Basis zur Beschreibung unendlicher Prozesse sind. Umgekehrt trifft man auch im Rahmen von Zahluntersuchungen immer wieder auf unendliche Prozesse. Der Zahlentwicklung innerhalb der Unter- und Mittelstufe kommt eine große Bedeutung zu.
Die zweite Konsequenz nimmt Bezug auf den Lehrplan der gymnasialen Oberstufe im Land NRW. Die Behandlung von Folgen und Reihen ist für den Einstieg in die Oberstufe nicht mehr vorgesehen.

[1] In Anlehnung an die unendlich kleinen Größen bei Weierstraß. (vgl. Weierstraß 1881)

Ich halte die Behandlung dieses Themas aber aus mindestens zweierlei wesentlichen Gründen für notwendig. Zum einen bieten Folgen eine Möglichkeit „offene“ Fragen aus der Mittelstufe, etwa die Division eins durch drei, die Kreisexhaustion, das Heron-Verfahren oder allgemein Intervallschachtelungen erneut zu thematisieren und mit Hilfe des Grenzwertbegriffs auf einer neuen Stufe zu betrachten. Dabei bietet sich auch die Gelegenheit Vorstellungen zum Zahlbegriff zu hinterfragen und auszuschärfen. Es ist insbesondere zu klären, inwiefern Zahlen eine gewisse Dynamik beinhalten oder eben nicht.
Der Grenzwertbegriff bildet im Hinblick auf die BMI gewissermaßen einen Höhepunkt. Es wird zum einen ein unendlicher Prozess möglichst präzise mit einer Folge und daran anschließend das „Ergebnis“ des unendlichen Prozesses als Grenzwert der Folge beschrieben.
Gleichzeitig kann der Grenzwertbegriff bei Folgen aber auch einen Ausgangspunkt für den Analysisunterricht der Oberstufe bilden. Welch ungleich höhere Bedeutung kann den Begriffen Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit beigemessen werden, wenn in ihnen nicht bloße Werkzeuge zur Untersuchung von Funktionen gesehen werden, sondern in ihnen die Beherrschung der Unendlichkeit zum Ausdruck kommt?!
Ein Unterricht sollte daher zumindest gelegentlich die Muße bieten, über Grundfragen der Mathematik - wie hier am Beispiel des Unendlichen - nachzudenken, um so ein Bild von Mathematik als Teil der menschlichen Kultur zu entfalten. Schüler sind in der Lage und daran interessiert sich mit solchen Aufgaben sinnvoll auseinander zu setzen. Es gelingt ihnen den Kern des Problems herauszuarbeiten. Dieses ist meines Erachtens der Anfang eines verständigen Umgangs mit mathematischer Begriffsbildung.

Literatur

[Guicciardini 1999]: Guicciardini, N.: “Newtons Methode und Leibniz’ Kalkül”, in: Jahnke, H.N.(Hrsg.): Geschichte der Analysis; Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg/Berlin 1999, S.191-244

[Lakoff/Núñez 2000]: Lakoff, G.; Núñez, G.: Where Mathematics Comes From, How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being, Basic Books New York, 2000

[Marx 2005]: Marx, A.: „Ein Drittel gleich Null Komma Periode Drei ist ungenau.“, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, Franzbecker Hildesheim/Berlin, 2005

[Marx 2006]: Marx, A.: „Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen“, im Druck.

[Weierstraß 1881]: Weierstraß, K.: Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre, Teubner-Archiv zur Mathematik - Band 9, Siegmund-Schultze, R. (Hrsg.), BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leibniz 1988

Stefanie MEIER & Jan Hendrik MÜLLER, Universität Dortmund

Anwendungsbeispiele gemeinsam entwickelt – Ergebnisse eines COMENIUS 2.1-Kooperationsprojektes

1. Zum Hintergrund des Projektes

Zur Förderung der transnationalen Zusammenarbeit im Bereich des Bildungswesens wird von der Europäischen Union das Aktionsprogramm SOKRATES angeboten. Hierunter fallen verschiedene Aktivitäten, wie z.B. ERASMUS (Verbesserung der Hochschulbildung), LINGUA (Verbesserung des Sprachunterrichts), MINERVA (Förderung von offenem Unterricht, Fernlehre und ICT) oder auch COMENIUS (Verbesserung der Schulbildung), für deren Durchführung man Drittmittel in Brüssel beantragen kann[1]. COMENIUS-Projekte können auf drei Ebenen durchgeführt werden: COMENIUS 1 – Förderung transnationaler Partnerschaften zwischen Schulen, COMENIUS 3 – Ausbildung von Netzwerken bestehend aus mindestens 6 Staaten (die nicht notwendigerweise alle der EU zugehören müssen) und COMENIUS 2 – Aus- und Fortbildung des Schulpersonals in Form von Einzelstipendien (2.2) oder europäischen Kooperationsprojekten (2.1). Ein solches europäisches Kooperationsprojekt ist das zurzeit an der Universität Dortmund durchgeführte und von ihr koordinierte Projekt mit dem Titel „Developing Quality in Mathematics Education“. Im Rahmen des Projektes werden Unterrichtsmaterialien für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht entwickelt. Hierzu arbeiten seit Oktober 2004 für insgesamt drei Jahre Partner aus Lehrerausbildungsinstitutionen und Schulen in Polen, Ungarn, Großbritannien und Deutschland zusammen.

2. Zur ersten Projektphase

In der (bereits abgeschlossenen) ersten Projektphase wurden auf der Basis curricularer Gemeinsamkeiten und gemeinsam vereinbarter Qualitätskriterien Arbeitsblätter, Projekte, eine Methodensammlung und Selbstevaluationsmaterial für den Mathematikunterricht erstellt und anschließend in die Sprachen der beteiligten Partner übersetzt. Eine Zielsetzung in Verbindung mit den Schülerarbeitsmaterialien ist die Anregung selbstregulierten Lernens. Die Materialien wurden daher insofern selbstdifferenzierend konzipiert, dass Lernende eigene „mathematische Wege“ ihrem eigenen Leistungsvermögen entsprechend beschreiten können. D.h. das sowohl anspruchsvolle Lösungen, wie auch

[1] Für weitere Informationen s.a.: http://www.sokrates-leonardo.de/ [letzter Zugriff: 14.02.2006]

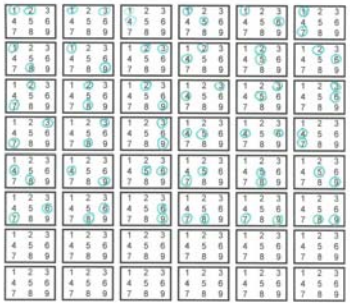
einfache sinnvolle Ansätze der Lernenden als Lösungsansätze zugelassen werden können, da a priori kein „Formelwissen“ erwartet wird. Durch die vereinbarten Qualitätskriterien der Problem-, Alltags- und Anwendungsorientierung wird zudem sichergestellt, dass sich die Lerngegenstände am Erfahrungshorizont und Interesse der Lernenden orientieren. Exemplarisch kann und sollte darüber hinaus etwas Nützliches für sich selbst (z.B. Rauchen), über die Umwelt (z.B. Wasserverbrauch) und auch über andere beteiligte Länder gelernt werden. Die authentische Ausrichtung der Materialien ermöglicht zudem auch nationale Besonderheiten oder Kuriositäten des eigenen und „fremden“ Landes kennen und schätzen zu lernen („europäische Dimension“).

3. Ausgewählte Unterrichtsmaterialien

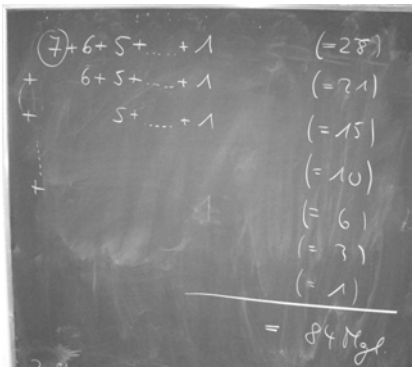
Das Worksheet “Tickets in Budapest” (Ungarn)

Die abgebildeten Budapester Bahnkarten wurden zu einem Worksheet aufgearbeitet, das beispielsweise im Vorfeld einer Unterrichtseinheit zum Thema „Lotto“ oder als „Aufgabe der Woche“ eingesetzt wurde. Die abgebildete linke Bahnkarte wurde nach dem alten Verfahren entwertet, bei dem zwei, drei oder vier Löcher in die Karte gestanzt werden. Das Stanzmuster eines Automaten ändert sich erst am nächsten Tag. Auf der rechten Karte befindet sich gemäß der neuen Entwertungsmethode ein Stempel, der eine 11stellige Nummer und die Uhrzeit enthält. Dazu wurden die Lernenden u.a. mit der Frage konfrontiert, ob es praktikabel wäre Tickets zu kaufen und sie so zu präparieren, dass man alle möglichen Stanzlochmuster zur Verfügung hat.

Wie die beiden folgenden Schülerlösungen zeigen, bietet das Worksheet unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten auf unterschiedlichem Niveau:



Diese Schülerin einer 6. Klasse eines Gymnasiums in Deutschland ging systematisch alle Möglichkeiten durch 2 Löcher in die Fahrkarte zu stanzen. Dies geht für 2 Löcher noch ganz gut, wird aber spätestens bei 4 Löchern ziemlich aufwändig.



Die zweite Lösung stammt von einer Schülerin einer 9. Klasse eines anderen Gymnasiums in Deutschland. Sie konnte zunächst die Anzahl der Lösungen systematisch überblicken, ohne diese explizit

aufschreiben zu müssen. Diese Vorgehensweise war bei 3 Stanzlöchern auch noch annähernd tragfähig, bei 4 Stanzlöchern wurde dieser Ansatz jedoch unübersichtlich. Auf natürliche Weise stellte sich somit die Frage nach einer übersichtlicheren Lösungsmethode.

Das Projekt „City Maps“ (Deutschland)

Das Projekt „City Maps“ ist aus naheliegenden Gründen in Mannheim entstanden. Anhand von Stadtplänen, insbesondere des Innenstadtplans von Mannheim, wird den Schülern und Schülerinnen der 5. Klasse dort die Idee des Koordinatensystems nahe gebracht. In der Praxis sah dies beispielsweise so aus, dass die Schüler und Schülerinnen die abgebildete Karte der Mannheimer Innenstadt[2] sowie den Arbeitsauftrag bekamen, die Beschilderung der Straßen/ Häuser neu zu organisieren (zur Erinnerung: In der Mannheimer Innenstadt sind die Häuserblocks mit Buchstaben und Zahlen benannt.)

In der abgebildeten Schülerlösung sind schon grundlegende Ideen des Koordinatensystems zu finden. Zum Beispiel ist die Form eines Koordinatensystems mit vier Feldern zu erkennen. Die Hochachse hat jedoch zwei verschiedene alphabetische Bezeichnungen (für die rechte und die linke Seite der Achse). Die x-Achse ist numerisch vom Nullpunkt ausgehend in beide Richtungen gleich bezeichnet. Die Grundidee, dass in einem Koordinatensystem „Punkten“ eineindeutig Koordinaten zugeordnet werden, ist wiederzufinden. Hierauf basierend kann nun abgewogen werden, welche Art und Weise der Zuordnung z.B. umständlich oder einfach ist, welche verwirrend oder welche aufschlussreich ist.

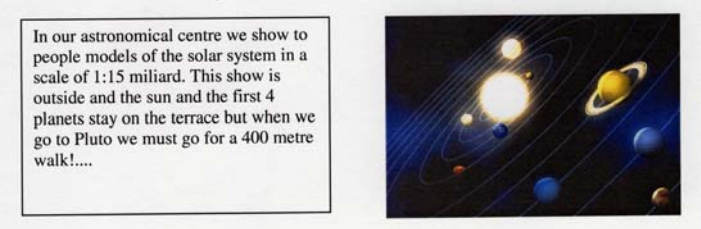
Das Projekt Road Safety (England)

Das Projekt „Road Safety“ wurde in England entwickelt. Der mathematische Schwerpunkt dieser Unterrichtsreihe liegt fachbezogen im Bereich Statistik und fachübergreifend im Bereich Verkehrssicherheit (insbesondere bezogen auf den eigenen Stadtbezirk). Dazu wurden Daten vom Straßenverkehrsamt schülergerecht aufgearbeitet, die anschließend rückblickend analysiert werden sollen. Darüber hinaus hatten die Schüler selber eine Statistik über das Verkehrsaufkommen an einer schulnahen

[2] s.a. http://web.mannheim.de/hrclient/stadtplan_mn.html [letzter Zugriff: 20.02.2006]

Straße zu erstellen oder Daten über Unfälle in der gesamten Stadt herauszufinden und diese mit Daten aus anderen Ländern zu vergleichen.

Die Unterrichtsreihe „Astronomer Jan“ (Polen)



Diese in Polen entwickelte personalisierte Unterrichtsreihe zeichnet sich dadurch aus, dass es einen Erzähler, in diesem Falle den „Astronomer Jan“ gibt, der den Lernenden etwas über seinen Beruf „erzählt“. In dieser Unterrichtsreihe geht es fachbezogen um das Thema „Große Zahlen“, Zehnerpotenzen und wissenschaftliche Zahlschreibweisen. Inhaltlich werden diese anhand astronomischer Entfernungen in bezug auf Asteroiden, Galaxien und Planeten eingeführt.

4. Zur zweiten Projektphase

Eine Zielsetzung der (zurzeit laufenden) zweiten Projektphase ist die Modifikation, Erprobung und Weiterentwicklung der bereits entwickelten und übersetzten Materialien. In dieser Phase werden die übersetzten Materialien an länderspezifische Besonderheiten adaptiert und anschließend dort eingesetzt. Ein Ziel des Projektes ist Lernende der beteiligten Länder über die entwickelten Materialien in Kontakt zu bringen. Im (internetbasierten) Austausch von Ideen und Eigenproduktionen erhalten sie die Möglichkeit sich über das Medium des mathematischen Problems auszutauschen und etwas über den sozio-kulturellen und schulischen Hintergrund des anderen zu lernen. Es ist zu erwarten, dass sich dies positiv auf den transnationalen sozialen Zusammenhalt auswirkt. Ebenfalls ist hierdurch die Basis für zukünftige gegenseitige Besuche im Rahmen von Schüleraustausch geschaffen. Es ist zu erwarten, dass Transparenz bzgl. kultureller Diskrepanzen und insbesondere der Respekt vor länderspezifischen Nachteilen anderer zur Vermeidung von Vorurteilen und Rassismus beiträgt. Am Ende des Projektes steht als ein Ergebnis eine Homepage[3], auf der die im Projekt entwickelten Materialien, angereichert mit Schülerlösungen, Lehrerdokumentationen, Videos und Fotos, in den vier Projektsprachen zu finden sind. So können interessierte Lehrer und Lehrerinnen auf eine Sammlung von Unterrichtsmaterialien, geordnet nach Altersstufen zugreifen und neue Inhalte, Aufgabenstrukturen und Unterrichtsmethoden, basierend auf den Erfahrungen anderer Lehrpersonen, in ihrem Unterricht ausprobieren.

[3] http://www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/dqime/index.html

Carla MERSCHMEYER-BRÜWER, Bielefeld

„Ich habe erst diese Würfel gezählt und dann immer zwei dazu getan." – Zum Zusammenhang von räumlichem Vorstellungsvermögen und Rechenfertigkeiten bei der Strukturierung von Würfelbauwerken

Kinder mit Rechenstörungen haben besondere Schwierigkeiten, wenn räumliche Vorstellungen mit Anzahlbestimmungen verknüpft werden müssen, wie es z. B. bei der Bestimmung der Anzahl an Würfeln in bildlich präsentierten Würfelbauwerken der Fall ist. So registriert und zählt Timon, ein Junge von 9;5 Jahren, bei Aufgaben dieser Art fast alle Würfel einzeln, aber stangenweise. Er bevorzugt dabei senkrechte Stangen. Um sich die in der Tiefe eines Bauwerks verdeckten Würfel vorstellen zu können (Tiefendecodierung), zählt Timon diese an strukturell analog angeordneten, jedoch im Bild sichtbaren Würfeln ab. Die Koordination seiner Strukturierungsschritte gelingt ihm noch bei dem Aufgabenformat Würfelbauwerke, jedoch nicht mehr bei Aufgaben, die das mentale Ergänzen von Bauwerken zu Quadern erfordern (Aufgabenformat Schachteln). Timon zeigt wenig bis keine Ansätze zu simultaner oder quasi-simultaner Erfassung der Anzahl an Würfeln. Er zählt in Einerschritten in Kombination mit schrittweisem Zählen in kleinen Schritten bis vier. Schrittweises Addieren fällt Timon zudem noch schwer. Ein Verständnis für die Multiplikation fehlt ihm. In Konsequenz müssen Timons räumliche Strukturierungskompetenzen gefördert werden mit den Zielen, komplexe Subeinheiten aus Würfeln zu bilden, sowie Timons Tiefendecodierung, seine Simultan- und Quasi-Simultanerfassung und seine Sicherheit im Ausführen begleitender grundlegender Rechenoperationen, insbesondere der Multiplikation, zu verbessern.

Zur Förderung räumlicher Strukturierungskompetenzen (Merschmeyer-Brüwer 2003), wie sie für solche Aufgaben benötigt werden, wurde deshalb das Lernangebot „Räumliche Strukturen sehen, vorstellen und begreifen" entwickelt (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2005), das sich nicht nur an Kinder mit Rechenstörungen sondern auch an mathematisch leistungsfähige Kinder wendet. Im Rahmen einer Studie, die als entwicklungsorientierte Evaluation (vgl. Übersicht zur Konzeption, s. u.) angelegt ist, wurde dieses Lernangebot realisiert. An der Studie haben 8 Schülerinnen und Schüler (7 der Klasse 4, einer der Klasse 3) teilgenommen, davon 6 mit guten Leistungen sowie 2 mit nur geringen Leistungen in Mathematik, darunter auch Timon. Die Förderung wurde in Interviews mit je zwei Kindern wöchentlich einmal über einen Zeitraum von 8 bis 9 Wochen durchgeführt. Die Kinder erarbeiteten dabei die Aufgaben des Lernangebots in Partnerarbeit.

Die Evaluation erfolgte individuell für jedes Kind in einem Vor- und Nachtest mit jeweils 15 Aufgaben des Formats Würfelbauwerke und 10 Aufgaben des Formats Schachteln (zu den Aufgaben vgl. Merschmeyer-Brüwer 2005).

Konzeption der Studie als entwicklungsorientierte Evaluation:

Grundlagenforschung

Modell räumlicher Strukturierungsfähigkeiten und -strategien

Herleitung von Konzepten — *Herleitung von Kriterien*

Interventionsforschung

- Entwicklung eines Förderkonzeptes zur Schulung räumlicher Strukturierungskompetenzen
- Realisierung als Lernangebot „Räumliche Strukturen sehen, vorstellen und begreifen“ für 8 Kinder

Evaluationsforschung

- Erhebung der Strategien räumlicher Strukturierungen und Kompetenzen zu einem bestimmten Zeitpunkt auf der Basis rekonstruktiver Forschungsmethodologie mit Hilfe von Augenbewegungsmessungen und retrospektiven Interviews

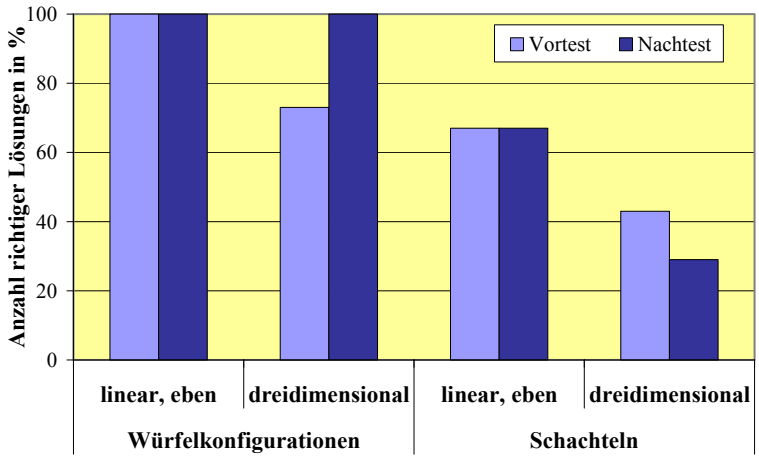
Zusammenführung

Entwicklungsorientierte Evaluationsforschung

- Empirische Überprüfung des Förderkonzeptes durch Hypothesenprüfung
- Prüfung der Effizienz in einem Vor- und Nachtestdesign jeweils bestehend aus Augenbewegungsmessungen und retrospektiven Interviews
- Aufzeigen individueller Einflüsse des Lernangebots „Räumliche Strukturen sehen, vorstellen und begreifen“

Nach der Förderung hat sich Timons Lösungserfolg bezogen auf das Aufgabenformat Würfelbauwerke (von 80 auf 100%) verbessert, während sein Lösungserfolg beim Aufgabenformat Schachteln (von 50 auf 40%) zurückgeht.

Timons Lösungserfolge für die beiden Aufgabenformate, jeweils differenziert nach der Komplexität der Bauwerke:



Auffällig ist, dass Timon nach der Förderung Aufgaben zu Würfelkonfigurationen, die eine dreidimensionale Anordnung aus Würfeln darstellen, erfolgreicher löst, während er die entsprechenden Aufgaben zu Schachteln deutlich schlechter löst.

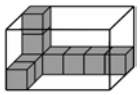
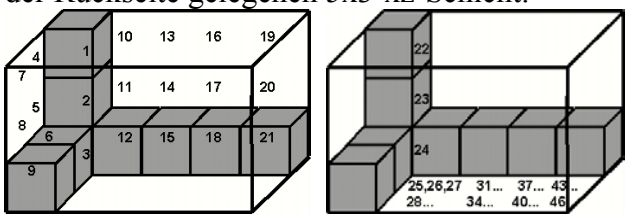
Auch wenn Timon nach der Förderung eine quantitative Verschlechterung seines Lösungserfolgs (beim Aufgabenformat Schachteln) zeigt, so ist dennoch eine qualitative Verbesserung seiner Strategien bei beiden Aufgabenformaten festzustellen. Bei der Bearbeitung des Aufgabenformats Würfelbauwerke bezieht sich Timon vor der Förderung ausschließlich auf basale rekonstruktionswirksame räumliche Strukturierungsstrategien, die wesentlich auf Erfassen und Zählen von Einzelwürfeln basieren. Nach der Förderung wendet Timon dagegen sehr erfolgreich evolvierte Strategien an, die gekennzeichnet sind von Ansätzen zur simultanen Erfassung komplexer Subeinheiten und Anwendung höherwertigen Rechenoperationen. Einen solchen signifikanten Strategiewechsel von einer Strukturierung in Einzelelemente zur Bildung komplexer Einheiten vollzieht Timon für 7 von 15 Aufgaben zu Würfelkonfigurationen. In weiteren 5 dieser 15 Aufgaben entwickelt er zumindest seine Strukturierung in Einzelwürfel qualitativ fort. Nur bei zwei Aufgaben behält Timon unverändert seine ursprüngliche Strategie bei, während er bei einer Aufgabe auf eine weniger evolvierte Strategie des Zählens von Einzelelementen zurückfällt.

Bei dem Aufgabenformat Schachteln wählt Timon nach der Förderung – zwar mit noch geringem Erfolg – Strategien einer Strukturierung in Einzelwürfel. Er wendet sich damit jedoch (für 6 von 10 Aufgaben) ab von nicht rekonstruktionswirksamen Strategien, die sich ausschließlich an sichtbaren dreidimensionalen Elementen ohne mentale Rekonstruktion in der Tiefe liegender Elemente orientieren. Insgesamt fällt Timon dieses Aufgabenformat nach wie vor besonders schwer, insbesondere weil die Anforderungen an die mentale Rekonstruktion besonders hoch sind.

Zum Bild einer 4x3x3-Schachtel, zu der Timon im Vortest nur bemerkt „Ich habe erst diese Würfel gezählt und dann immer zwei dazu getan“ und dann abbricht, artikuliert Timon im Interview des Nachtests dann eine Strategie, die einem Strukturieren in Einzelwürfel bei einer Stange und Identifikation dazu strukturgleicher Stangen in Kombination mit Weiterzählen durch wiederholtes Zählen in derselben Stange besteht. Dieses Verfahren wiederholt er so oft, wie strukturidentische Stangen in der Würfelkonfiguration vorhanden sind.

Diese qualitativen Modifikationen seiner Strukturierungsstrategien weisen hin auf verbesserte Kompetenzen einer räumlichen Strukturierung. So benötigt Timon nach der Förderung für die mentale Rekonstruktion nicht mehr so deutlich den Rückbezug auf sichtbare strukturgleiche Elemente. Timon nutzt in Ansätzen Simultanauffassung, seine Kompetenz ist aber für die gewählten Aufgabenformate auf drei Einzelelemente begrenzt. Er ist aber nun in der Lage, auch mehrere Würfel als Stange zu erfassen, diese

schrittweise in Schichten als übergeordnete Struktur anzuordnen und die Würfelanzahl durch schrittweises Addieren zu bestimmen. Timon zeigt zwar Ansätze, räumliche Anordnungen im Sinne einer multiplikativen Struktur zu erfassen. Er hat aber die Multiplikation als Rechenoperation im Sinne einer Verkürzung der wiederholten Addition auch nach der Förderung noch nicht verstanden.

Zeit **0:07:55** **0:09:11**	**Protokoll des Re-Interviews im Nachtest**	**Beschreibung des Lösungsverhaltens von Timon zu dem Bild** 
0:07:55	*Und wie viele Würfel passen in diese Schachtel, Timon?*	Timon strukturiert das Bauwerk in z-Dreierstangen und zählt diese schrittweise ab. Dabei tippt er mit dem Zeigefinger der rechten Hand jeweils auf entsprechende Stellen im Bild. Er orientiert sich dabei zunächst an den sichtbaren Würfeln der linken 3x3-yz-Schicht und der an der Rückseite gelegenen 5x3-xz-Schicht.
0:07:58	**Mm … hab auch gezählt.** *Kannst du das erklären? Wie zählst du denn, mach mal!* **Eins, zwei, drei; vier, fünf, sechs; sieben, acht, neun.** *Hmm.* **Zehn, elf, zwölf; 13, 14, 15; 16, 17, 18; 19, 20, 21.**	
0:08:27	**… 22, 23, 24; … 25, 26, 27; 28, 29, 30. …**	Bei „22, 23, 24“ zählt er 3 Würfel doppelt, die er mit „10, 11, 12“ bereits erfasst hatte. Ab „25, 26, 27“ tippt er jeweils dreimal auf die gleichen Stellen, also beginnend mit „28…, 31 …“. Aufgrund der drei doppelt gezählten Würfel ist sein Ergebnis von 48 um 3 zu groß.
0:08:45	**Dann … 31, 32, 33; 34, 35, 36; 37, 38, 39; … 39, 40, 41, 42; 43, 44, 45; 46, 47,**	
0:09:11	**48.**	

Die Kompetenzen einer mentalen Strukturierung (Strukturierungskomplexität, Tiefendecodierung und Strukturierungskoordination) hängen von den Kompetenzen zur Anzahlbestimmung (Anzahlerfassung, Abzählen) ab. Sind numerische Kompetenzen unzureichend ausgebildet, dann können Kinder evolvierte räumliche Vorstellungskompetenzen für räumliche Strukturierungen nicht nutzen und bleiben deshalb in der Anwendung und Artikulation ihrer räumlichen Strukturierungskompetenzen hinter ihren potentiellen Möglichkeiten zurück. Eine Förderung zur räumlichen Strukturierung bietet eine Möglichkeit zur Verbesserung basaler numerischer Kompetenzen.

Literatur:

Merschmeyer-Brüwer, C. (2003). Räumliche Strukturen - kinderleicht? *Grundschulunterricht*, Heft 6, S. 39-48.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2005): Räumliche Strukturen "begreifen" - Fördermöglichkeiten in der Grundschule?! *Beiträge zum Mathematikunterricht,* Franzbecker, Hildesheim.

Henrik MEYER, Universität Hildesheim

Aspekte der numerischen Mathematik in der Schule

Abstrakt

Ziel des Beitrages ist die Wiederaufnahme und Weiterführung der um etwa 1980 begonnenen Bemühungen, numerische Mathematik verstärkt in den Schulunterricht zu integrieren, um offen liegenden Problemen der Schüler im Hinblick auf den kritisch-sinnvollen Umgang mit Zahlen und Größen besser zu begegnen und sie eventuell auf lange Sicht beheben zu können. Es wird dabei auf die Entwicklung und den Stand des numerischen Schulunterrichts zu Beginn der 80er Jahre eingegangen. Bezüglich des heutigen Standes wird eine empirische Untersuchung zur Überschlagsrechnung vorgestellt.

Einleitung

Der Bereich der so genannten Angewandten Mathematik enthält neben den Disziplinen Optimierung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik u. a. auch ein Teilgebiet, welches sich mit Näherungsverfahren, Näherungswerten oder auch speziell mit der Kontrolle von Rundungsfehlern befasst – die Numerik. Schulmathematisch geht es dabei um den sinnvollen Umgang mit konkreten Zahlen und der bewussten Verwendung des Taschenrechners. Versucht man nun, im Schulunterricht solche Fragen aufzuwerfen und sauber zu diskutieren, ergeben sich zwei didaktische Spannungsfelder, die sich gegenseitig bedingen (vgl. Abbildung 1):

1) Welche Inhalte der numerischen Mathematik sind für die Schüler zur Bewältigung des Schulstoffs relevant, und wie können sie vermittelt werden?

2) Welche Inhalte der numerischen Mathematik ergeben sich demzufolge für die Ausbildung der zukünftigen Lehrer, und welche Konsequenzen hat das für den zu vermittelnden Stoff an deutschen Pädagogischen Hochschulen und Universitäten?

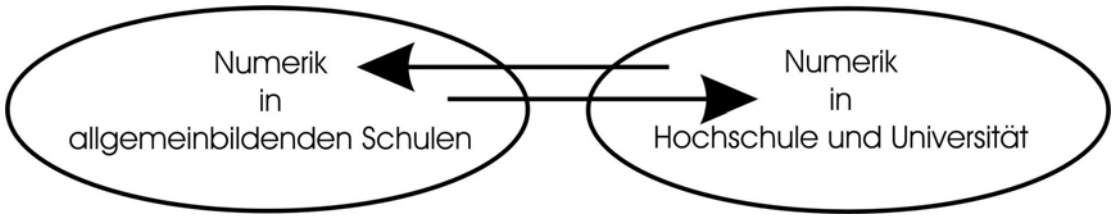


Abbildung 1: Spannungsfelder der Numerik

Numerischer Unterricht in Westdeutschland zu Beginn der 80er Jahre

Etwa um 1980 traten die Probleme der Numerik verstärkt in die mathematikdidaktische Diskussion ein und es wurde in Deutschland die Forderung laut, dass die numerische Mathematik im schulischen Bereich zu integrieren ist. Die Hauptgründe für diese Entwicklung waren:

1) Fortschritte in der elektronischen Datenverarbeitung und das immer weitere Vordringen des Taschenrechners konnten nicht weiter ignoriert werden.
2) Die bisherige Fixierung der Mathematik auf Grundlagenaspekte sollte kompensiert werden.
3) Eine algorithmische Durchdringung der Schulmathematik wurde erst durch Inhalte der numerischen Mathematik ermöglicht.

Richenhagen[1] brachte in diesem Zusammenhang einige Fragestellungen ein, die helfen sollten, ein fachdidaktisches Konzept zu erarbeiten:

1) Was sind die zentralen Denk- und Arbeitsweisen der Numerik?
2) Ist eine integrative oder additive Behandlung der Numerik sinnvoll?
3) Verändert sich die Unterrichtsmethodik bei Berücksichtigung numerischer Inhalte?
4) Wie ist die Numerik in das Gesamtbild der Mathematik einzuordnen?

Für *Blankenagel*[2] sind die zentralen Aspekte der numerischen Mathematik im Schulunterricht weniger inhaltlicher, sondern eher methodischer Natur. Zusammenfassend lässt sich jedoch feststellen, dass die Bemühungen um numerische Mathematik in Westdeutschland kaum Einfluss auf die Schulpraxis hatten.

Numerischer Unterricht in Ostdeutschland zu Beginn der 80er Jahre

Parallel zu den Bemühungen in Westdeutschland, die numerische Mathematik im Unterricht zu forcieren, konnte man Anfang der 80er Jahre in der damaligen DDR eine ähnliche Entwicklung wahrnehmen. Die führende mathematikdidaktische Zeitschrift „Mathematik in der Schule“ brachte vornehmlich in den Jahren 1979-1983 zu diesem Zwecke eine Reihe von Artikeln heraus, die sich mit Problemen der Näherungsrechnung bezüglich des immer weiter Verbreitung findenden Taschenrechners beschäftigten. Es wurde festgestellt, dass viele Schüler bei relativ einfachen Zahlenrechnun-

[1] Richenhagen, Gottfried: *Einige Thesen zu einer Didaktik der Numerik*, Numerische Mathematik in der Sekundarstufe II, Curriculum Heft 28, Neuss, 1982

[2] Blankenagel, Jürgen: *Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik*, Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1985

gen versagen, falsche und oftmals völlig unsinnige Ergebnisse kritiklos akzeptieren oder elementare Anforderungen wie die Subtraktion zweier rationaler Zahlen oder die Umwandlung von Einheiten nicht zu erfüllen vermögen[3]. Allgemein wurde bemängelt, dass die Sicherheit im Rechnen bei vielen Schülern und Klassen noch nicht im gewünschten Maße vorhanden war. Dabei erkannte man, dass streng geprüft werden muss, zu welchen Stoffgebieten und mit welchem Ziel sich die Nutzung des Taschenrechners als sinnvoll erweist und wo sein Einsatz nicht richtig ist. Man versuchte aufzuzeigen, dass durch die Existenz und Verwendung von elektronischen Taschenrechnern das Rechnen-Können der Schüler nicht etwa überflüssig wird, sondern in einzelnen Komponenten sogar noch an Bedeutung gewinnen muss.

Eine empirische Untersuchung zur Überschlagsrechnung im Raum Hildesheim

Im Zusammenhang mit der Konzeption einer Lehrveranstaltung zur numerischen Mathematik an der Uni Hildesheim haben wir etwa 1000 Schüler aus Hauptschule, Realschule und Gymnasium und ca. 230 Studenten des Lehramtes Mathematik anhand des Arbeitsblattes aus Abbildung 2 getestet. Die Aufgaben stammten aus empirischen Untersuchungen, die in den 80er Jahren schon einmal durchgeführt wurden und für die bereits gesicherte Ergebnisse vorliegen:

Löse alle drei Aufgabenteile ohne Taschenrechner!

1. Teil) In den folgenden drei Aufgaben sind die Ziffernfolgen der Ergebnisse schon ausgerechnet. Setze das Komma jeweils an die richtige Stelle!

$90122 + 365908 + 61100 = 517130000$

$123{,}6 \cdot 9876{,}50 = 1220735400$

$224 : 0{,}16 = 140000$

2. Teil) Gib einen sinnvollen Überschlag an!

a) $12{,}5^2 \approx$ b) $0{,}35^2 \approx$ c) $0{,}006^2 \approx$

3. Teil) Was ist ein sinnvoller Überschlag für $\sqrt{0{,}9}$?

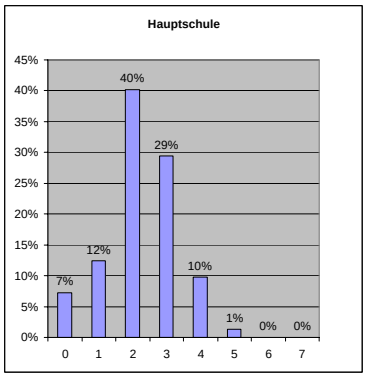
A) 1 B) 0,3 C) 0,45

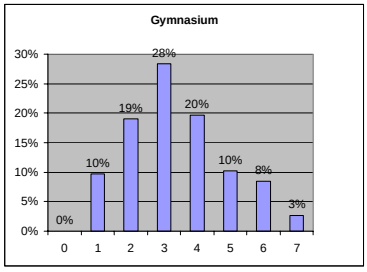
Abbildung 2: Arbeitsblatt zur Überschlagsrechnung

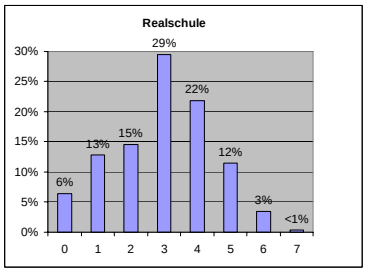
[3] Fanghänel, Günter / Flade, Lothar: *Zur Bedeutung des Rechnen-Könnens für die mathematische Allgemeinbildung,* in: Mathematik in der Schule, Heft 10, S. 524-531, Verlag Volk und Wissen, Berlin, 1979

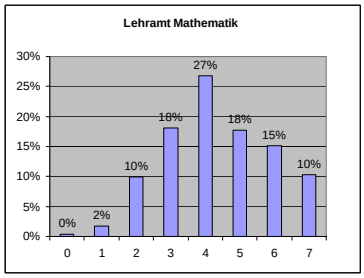
Die Auswertung der Testbögen ergibt die folgenden Diagramme:

Sie stellen bis auf das Lehramt Mathematik jeweils Längsschnitte durch vier Schuljahre der aufgeführten Schulstufen dar, also Klasse 7, 8, 9 und 10. Wie erwartet, schließen die Hauptschulen am schlechtesten ab. 60% aller Schüler haben 2 und weniger richtige Ergebnisse. Alle 7 Aufgaben bzw. wenigstens 6 Aufgaben richtig hat keiner, 5 Aufgaben kaum. Eine Verschiebung lässt sich dann deutlich zum Realschulzweig und weiter zur gymnasialen Stufe erkennen. Bemerkenswert ist, dass auch in diesen beiden Schulformen etwa 60% der Schüler 3 und weniger Punkte haben. Insgesamt schneiden die Gymnasien etwas besser ab. Die nächste Verschiebung ergibt sich zum Lehramt Mathematik;
etwa 60% der Studierenden haben jedoch nur 4 (!) und weniger Punkte.









Die typischen Fehler lagen bei allen untersuchten Schülern und Studenten hauptsächlich im allgemeinen Zahlenverständnis.

Schlussfolgerungen

1) Die Ergebnisse im Berechnen der Überschläge haben sich im Vergleich zu den Untersuchungen von *Wynands und Wickmann*[4] und auch zu *Flade und Walsch*[5] deutlich verbessert.

2) Von ausreichendem Verständnis kann jedoch weder bei Schülern noch bei den zukünftigen Mathematiklehrern die Rede sein.

3) Eine verstärkte Förderung dieser Fähigkeiten an Schule und Universität ist zu überdenken.

[4] Wynands, Alexander / Wickmann, Dieter*: Rechenfertigkeit und Taschenrechner Istzustand 1979/80,* in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 12, S.162-166, 1980

[5] Flade, Lothar / Walsch, Werner: *Taschenrechner im Mathematikunterricht,* Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Halle, S. 105-116, Jahrgang XXXIII, 1984

Jörg MEYER, Hameln

Theoriearmes Testen

Eine ausführliche Version erscheint in der ISTRON-Schriftenreihe.

Der entsprechende Band hat die Herausgeber Jörg Meyer / Reinhard Oldenburg und enthält (unter vielen anderen) die beiden Artikel

„Ein einfacher Zugang zu t-Tests“ und

„Ein einfacher Zugang zu nichtparametrischen Tests“.

Inhaltlich geht es um die Verwirklichung eines alten Schupp’schen Postulats:

„... ein weiterer Vorteil des Computereinsatzes: (...) Einsparung von Theorieaufwand“.

Methodisch geht es um den Einsatz von Excel, wobei insbesondere die Mehrfachoperationen eine tragende Rolle spielen.

Wolfram Meyerhöfer, Potsdam

Praxisorientierung als Verblendung. Eine Fallstudie.

In meinem Vortrag habe ich einige Resultate einer Untersuchung an drei von fünf Brandenburger mathematischen Fachseminaren vorgestellt, die ich mit Clara Rienits durchgeführt habe. Den Vortrag finden Sie ebenso wie den Forschungsbericht unter www.math.uni-potsdam.de/prof/o_didaktik/-mita/me/Veroe). Eine gekürzte Version des Berichtes habe ich allen Referendaren und Fachseminarleitern geschickt, im unten angegebenen Buch können Sie eine Debatte lesen, die sich daraufhin entsponnen hat.
In unserer Untersuchung erweist sich der Begriff der Praxisorientierung lediglich als ideologischer und negativer: Er steht für Theorieablehnung, Reflexionsarmut und Nichtausbildung, gepaart mit Ignoranz gegenüber den Praxiserfahrungen und –bedürfnissen der Referendare. Auf Seiten der Referendare deuten sich drei Gruppentypologien an: Es gibt sehr unzufriedene Referendare, die Ausbildung vermissen und einfordern. Es gibt Referendare, die unter dem Referendariat leiden und eine Ausbildung vermissen, dies aber nicht in Form von Kritik an der Ausbildung äußern (können). Es gibt aber auch Referendare, die gerade deshalb zufrieden sind, weil keine Ausbildung erfolgt. Der theoretisch denkbare vierte Typus, der Ausbildung erlebt und mit ihr zufrieden ist, ist nur ansatzweise vertreten.

Alternativen von Gelingen

In der Vortragsdiskussion zeigte sich, dass das von uns Herausgearbeitete einerseits für die analysierte Praxis widerständig ist, andererseits von anderen als ausgesprochen erschließend angesehen wird. Eine interessante Kritik ist die, dass wir einen vorgefertigten Begriff von Praxisorientierung an das Referendariat herantragen und lediglich konstatieren, dass das dort Gefundene unserem Anspruch nicht genügt. Ich versuche deshalb hier, deutlicher zu beschreiben, wie unser Anspruch sich erst aus dem ableitet, was die analysierte Praxis selbst als Anspruch formuliert. Das erleichtert es vielleicht, unsere Analysen nicht als Vorwurf zu lesen, sondern als Analyse von vorhandenen Widersprüchen und Inkonsistenzen, verbunden mit dem Versuch einer Konstruktion von gelingender Lehrerausbildung. Glücklicherweise haben wir auch einen Fachseminarleiter gefunden, der eine solche Gelingensoption auch als empirisch vorfindlich erkennen lässt.

Fachseminarleiter 1: Fallanalyse

Dieser Fachseminarleiter konzentriert sich in seinen Ausführungen auf die Wiedergabe von – sachlich meist inkorrekten - Vorurteilen. Der Fachsemi-

narleiter gibt manifest wenig über sein Tun bzw. über die Situation an seinem Fachseminar preis, er konstatiert vorrangig Trivialitäten wie Unterschiede zwischen Referendaren.

Als ausgesprochen problematisch erweist sich, dass dieser Fachseminarleiter **keine brauchbaren Hilfen für die professionelle Entwicklung der Referendare geben kann**. Er konstruiert eine Realität, in der die Referendare einen zu hohen mathematischen Anspruch in die Schule tragen. Für ihn geht es nun um etwas, was er „zurückschalten" nennt. Dieses Zurückschalten spezifiziert sich lediglich dahingehend, dass die Referendare überhaupt den Schulstoff *kennen*. Eine produktive Verbindung zwischen hochschulmathematischem und schulmathematischem Wissen und Können ist nicht sichtbar.
Wir konstruieren nun ausgehend vom „Problem" eine ausbilderische Alternative: Es geht darum, von diesem hohen Niveau bzw. Anspruch ausgehend schulmathematischen Stoff zu durchdringen und davon ausgehend Lernprozesse zu gestalten. Damit ist nicht nur ein Modell von Professionalität angedeutet, sondern der hohe Anspruch – ausgebildet durch das Fachstudium – wird nicht desavouiert, sondern angenommen und zum Ausgangspunkt eines Lernprozesses für den Referendar gemacht. Ziel ist nicht „Zurückschalten", sondern die Umsetzung des hohen Anspruchs in ein Schülergerechtes. Das heißt dann konkret zum Beispiel, begriffliche Schärfe nicht zu reduzieren, sondern auf Schülergerechtheit hin zu verändern. Es heißt, auf Beweise nicht zu verzichten, sondern verschiedene Formen von Beweisen (z.B. auch Begründen) zu erschließen. Im ersteren Fall heißt Ausbilden dann, das Verhältnis von Umgangssprache und Fachsprache zu thematisieren, im zweiten Fall heißt es, Beweise als besondere Formen des Argumentierens zu verstehen. Beides sind Erweiterungen des fachlich Gekonnten, kein Zurückschalten des fachlich Gekonnten.

In der Konstruktion des Fachseminarleiters gibt es „Unsicherheiten" – und die entstehen durch einen zu hohen mathematischen Anspruch der Referendare. Ein positives Bild der Herausbildung von Professionalität ist nicht zu erkennen, es geht lediglich um die Entfernung des **Mathematischen** aus dem Tun der Referendare, das **als Hürde auf dem Weg zum Schüler** konstruiert wird. Wir versuchen, uns an dieser Stelle deutlich zu machen, was *wirklich* diese Hürden ausmachen könnte, denn wir haben ja bereits gesehen, dass das Mathematische es nicht ist. Wir sehen hier in einem positiven Sinne zunächst handwerkliche und andere Fähigkeiten, deren Erlangung der Zweck des Referendariats ist und deren Absenz eine Hürde auf dem Weg zum Schüler ist. Wir denken ganz abstrakt an die Gestaltung von

Lernprozessen und an die Wahrnehmung von Unterricht und Schülern. Beides spielt bei Fachseminarleiter 1 keine Rolle.

Leiden und Jammern sind vielfach vertretene Elemente der Darlegungen. Der Fachseminarleiter leidet z.B. in forcierter Weise daran, dass die Referendare Grundlagen der Schulmathematik im Fachseminar (noch) lernen (müssen). Wir konfrontieren das mit der Annahme, dass mathematische, geschichtliche, philosophische und methodische Grundlagen der Schulmathematik in allen Phasen der Lehrerbildung erlernt bzw. vertieft werden sollen und müssen. Sie sind das, was man benötigt, um sich der Schulmathematik überhaupt (als Mathematiklehrer) annähern zu können. **Dieser Fachseminarleiter leidet also** in unserer Deutung **an einem selbstverständlichen Bestandteil seines Aufgabenfeldes.** Er stellt dieses Leiden vor alle Mitteilung über das, was in seinem Fachseminar gelernt wird. Er leidet aber z.B. auch daran, dass der von ihm erstellte Fachseminarplan der Ausbildungssituation nicht angemessen ist.
Für diese Kritik des Leidens bin ich im Vortrag arg angegriffen worden. Mir scheint es aber fruchtbar, die Sache so deutlich zu benennen. Man mag alle dem Referendariat vorgängigen (Aus)Bildungsgänge kritisch betrachten. Nichtsdestotrotz ist das Referendariat ein exponierter Ort des Erlernens von Grundlagen der Schulmathematik, und es ist Aufgabe des Fachseminarleiters, dieses Erlernen zu gestalten.

Es stellt sich eine Hilflosigkeit gegenüber und Herabwürdigung von Theorie und die Verweigerung jeglicher Reflexionsarbeit dar. Zum Beispiel zeigt sich der Seminarplan ausgesprochen wenig praktisch inspiriert. Die geringe Praxisorientierung hat einerseits mit der **Verweigerung einer Reflexion der praktischen Probleme der Referendare** zu tun. Die geringe praktische Brauchbarkeit der im Plan versammelten Theorieelemente ruft bei uns wiederum eine Idee hervor, was Praxisorientierung hier wäre: Man würde eben von den praktischen Problemen *der Referendare* ausgehend das Fachseminar gestalten. Dazu muss der Fachseminarleiter theoretisch so sattelfest sein, dass er das jeweils diskutierte praktische Problem in ein neues Licht tauchen kann, indem er es vor dem Hintergrund von Theorien deutet. Sein Plan erscheint sogar sehr theoretisch orientiert – wenn auch stark kategorienorientiert, eklektizistisch und wenig konsistent strukturiert. Ein praktisch orientiertes Seminar würde kaum die angegeben Themen als Seminarthemen – noch dazu in der vorliegenden Reihenfolge – wählen. Es würde sich an den in der Schulpraxis sich ergebenden Fragestellungen statt an kategorialen Theorieelementen orientieren. Die Erläuterungen im Fachsemi-

narplan verschaffen (hoffentlich) keinen Eindruck von den Seminarinhalten und erscheinen „dazugewürfelt“.

Der Fachseminarleiter beklagt, dass der (unseres Erachtens auch bei homogenen Gruppen nicht sinnvoll umsetzbare) Plan derzeit wegen der inhomogenen Gruppe „kaum sinnvoll durchsetzbar“ sei. Er fasst sprachlich eine grundsätzlich brutale Seminarsituation: Normalerweise wird der Plan „durchgesetzt“. Die Referendare haben dabei nichts zu melden. Das ist nicht nur eine erhebliche Abweichung von den Anforderungen an die Beteiligung der Referendare an der Planung und Durchführung des Seminars, sondern verweist wiederum auf mangelnde Praxisorientierung des Seminars: Hier wird ein Plan durchgesetzt statt Probleme der Praxis zu reflektieren, wenn sie auftauchen.

Es zeichnet sich ab, dass der Fachseminarleiter auch bei den Unterrichtsbesuchen seiner Verantwortung nicht gerecht wird: Er legt das Hauptaugenmerk nicht auf die Entwicklung der Professionalität des Referendars, sondern auf die Ausbildungslehrer. Hier zeichnet sich ein **Bild, bei dem der Fachseminarleiter die Deutungen der Ausbildungslehrer ungebrochen übernimmt**. Er erklärt sich damit nicht nur für überflüssig, er verweigert damit auch jede Differenzierung zwischen dem handwerklichen Ausbildungspart des Ausbildungslehrers und dem viel stärker reflektierenden Part des Fachseminarleiters. Unter der Verblendung einer „äußerst positiven Zusammenarbeit“ negiert er ebenso seine Pflicht zur Verbreiterung der Ausbildung. – Hier wieder unsere positive Variante: Der Ausbildungslehrer erbringt seinen Part sehr intensiv, aber meist aus der notwendigerweise eingeschränkten Perspektive seines eigenen handwerklichen Tuns. Der Fachseminarleiter muss die gesamte Breite vorfindlichen und möglichen Lehrerhandelns einbringen, damit der Referendar seinen eigenen Weg, der nur sehr selten der Weg des Ausbildungslehrers sein kann, finden kann. Fachseminarleiter 1 verweigert diesen Beitrag, der in kollegialer und respektvoller Differenz zum Ausbildungslehrer zu erbringen ist und auch den Blick des Ausbildungslehrers weiten soll. Da die Professionalität von Referendar und Ausbildungslehrer verschiedene Wege gehen muss, sind gelegentliche Konflikte zwischen beiden unabdingbar. Die Aufgabe des Fachseminarleiters ist es, diese Konflikte herauszuarbeiten und produktiv zu machen. Das verweigert Fachseminarleiter 1 und **entzieht sich damit insbesondere der Verantwortung gegenüber den Referendaren**, die in diesen Konflikten in der Position der Abhängigkeit vom Ausbildungslehrer agieren.

Wolfram Meyerhöfer, Clara Rienits (2006): Evaluation des Referendariats im Land Brandenburg, Fachseminare Mathematik. In: Wilfried Schubarth (Hrg.): Qualität und Evaluation der Lehrerbildung: Beispiel 2. Phase/Referendariat. Reihe: Beiträge zur Lehrevaluation an der Uni Potsdam

Thorsten MEYFARTH, Kassel

Die kontinuierliche Verwendung von Simulationen im Stochastik-Leistungskurs – Ein Kurskonzept

Das vorgestellte Projekt benutzt Leitideen, Aufgabentypen und Untersuchungsmethoden, die zu großen Teilen im Rahmen der Zusammenarbeit in der Fachgruppe von Prof. Dr. Rolf Biehler an der Universität Kassel erarbeitet worden sind. Das Unterrichtskonzept wurde bereits mehrfach komplett an den Kasseler Gymnasien Albert-Schweizer-Schule und Jacob-Grimm-Schule unterrichtet.

1. Vorstellung des Kurskonzepts

Zentrales Gestaltungsmerkmal des Kurskonzepts ist der kontinuierliche Einsatz der Statistiksoftware Fathom über das gesamte Kurshalbjahr hinweg. Hierbei werden vor allem Simulationen sowie dynamische Lernumgebungen eingesetzt.

Der Einsatz von Simulationen im Stochastikunterricht ermöglicht einerseits einen experimentellen Umgang mit stochastischen Problemen. Weiter dient die Simulation neben dem in der Schule üblichen theoretischen Zugang als eigenständiges Werkzeug zur Lösung stochastischer Problemstellungen (Biehler 1991). Stochastische Begriffe können somit durch ein experimentelles Arbeiten im Unterricht vorbereitet werden. Ferner kann man auch Problemstellungen behandeln, für die die theoretischen Grundlagen (noch) nicht zur Verfügung stehen.

Eine Computersimulation in Fathom erfolgt in den folgenden vier Schritten (Biehler 2003):

Schritt 1: Simulation des Einzelexperiments
Schritt 2: Definition der interessierenden Messgröße (Zufallsgröße)
Schritt 3: Wiederholte Durchführung der Simulation und Sammeln der Messgrößen
Schritt 4: Auswertung der Simulation

Diese Grundstruktur einer Simulation muss von den Schülerinnen und Schülern verstanden und geübt werden. Hierbei erfordern die ersten beiden Schritte Modellierungskompetenzen bei der Abbildung der stochastischen Situation in die Computersimulation.

Die Themenfolge des Kurskonzepts ergibt sich durch den Lehrplan des Landes Hessen (Lehrplan Mathematik Stand 2005). Es wurden drei Schwerpunktsetzungen ausgewählt:

1. Einführung in den Stochastikkurs mit Simulationen
2. Binomialverteilung
3. Testen von Hypothesen

Damit die Simulationen über das gesamte Kurshalbjahr zur Verfügung stehen, wird der Umgang mit Computersimulationen an den Beginn des Kurses gesetzt. Dies hat ferner den Vorteil, dass die Schülerinnen und Schüler zu Beginn des Kurses Zufallsprozesse experimentell erarbeiten und beobachten können und hierbei ein intuitives Verständnis für stochastische Prozesse aufbauen können.

Neben dem Begriff der Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der zweite zentrale Begriff im Stochastikkurs der gymnasialen Oberstufe. Dieser wird in der Schule vor allem am Beispiel der Binomialverteilung behandelt. Im vorliegenden Kurskonzept wird die Binomialverteilung unter Verwendung von Simulationen eingeführt. Die Abhängigkeit der Verteilung von den Parametern *n* und *p* wird anhand dynamischer Lernumgebungen untersucht. Das Thema wird durch die σ-Umgebungen und das $1/\sqrt{n}$ – Gesetz vervollständigt.

Als Themenbereich der beurteilenden Statistik ist im hessischen Lehrplan das Testen von Hypothesen vorgesehen. Zum besseren Verständnis der Testlogik erfolgt der Einstieg in das Thema mit dem Testen von Hypothesen nach dem P-Wert-Konzept (Seber and Wild 2000). Erst im zweiten Schritt werden die in der Schule üblichen Signifikanztests eingeführt. Insbesondere bei der Untersuchung des Fehlers erster und zweiter Art sowie bei der Operationscharakteristik wird der Unterricht durch dynamische Lernumgebungen unterstützt.

2. Der „Simulationsvorkurs“

Die ersten drei Wochen des Kurshalbjahres werden als Einführungskurs in Computersimulationen mit Fathom gestaltet. Die Schülerinnen und Schüler erlernen hierbei den Umgang mit der Software sowie die Erstellung einer Simulation in den vier oben genannten Schritten. In diese Einführung integriert werden das Gesetz der großen Zahl und theoretische Grundbegriffe wie Zufallsexperiment, Wahrscheinlichkeitsraum, Ergebnis und Ereignis sowie die Laplace-Wahrscheinlichkeit.

Der Simulationsvorkurs beginnt mit folgender komplexer Aufgabenstellung zum Vergleich zweier verschiedener Multiple-Choice-Tests:

Betrachten Sie die folgenden beiden Tests:

Test 1 besteht aus 10 Fragen, bei denen der Prüfling entweder ja oder nein ankreuzen kann. Test 2 besteht aus 20 Fragen, bei denen der Prüfling entweder ja oder nein ankreuzen kann. Beide Tests sind bestanden, wenn mindestens 60% der Fragen richtig beantwortet sind.

Bei welchem der beiden Tests hat ein Prüfling größere Chancen zu bestehen, wenn er nur rät?

Die Aufgabenstellung lässt sich zu Beginn des Stochastikkurses nicht theoretisch lösen. Allerdings bietet sich eine händische Simulation an, bei der die Beantwortung einer einzelnen Testfrage über einen Münzwurf simuliert wird. Im Anschluss an diese händische Simulation wird dann die Computersimulation mit Fathom eingeführt und erläutert.

Im Anschluss hieran wird das Gesetz der großen Zahl am Beispiel des Münzwurfs empirisch eingeführt. Man betrachtet die sukzessive Stabilisierung der relativen Häufigkeit für „Zahl“ gegen die Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}5$. Auch hier wird sowohl das händische Werfen der Münzen wie auch die Computersimulation in Form zweier vorbereiteter Fathom-Lernumgebungen mit integrierter grafischer Darstellung der Stabilisierung der relativen Häufigkeit eingesetzt.

Die Simulationskompetenzen werden im Folgenden über strukturell sehr einfache Aufgaben zum einfachen und doppelten Würfelwurf gefestigt und erweitert. Hierbei sind die Aufgaben jeweils so gestaltet, dass zu jeder Aufgabe eine kurze Anleitung zum Aufbau der Simulation existiert. Insbesondere enthalten diese Kurzanleitungen auch neu benötigte Fathom-Kommandos, so dass die Schülerinnen und Schüler über die Erarbeitung dieser Würfelaufgaben ihre Simulationskompetenzen sukzessive selbstständig erweitern können. Neben den Simulationskompetenzen werden anhand dieser Würfelaufgaben die oben aufgezählten stochastischen Grundbegriffe eingeführt.

Den Abschluss des Simulationsvorkurses bildet eine arbeitsteilige Gruppenarbeitsphase mit gemischten Aufgabenstellungen. Den Schülerinnen und Schülern stehen insgesamt acht Aufgaben zur Verfügung. Die Aufgaben sind deutlich komplexer und anwendungsorientierter als die zur Erweiterung der Fathom-Kompetenzen gewählten Würfelaufgaben. So sind unter den Aufgabenstellungen unter anderem zwei Erwartungswertaufgaben aus dem Bereich der Glücksspiele, das Entenjagd-Problem, das Geburtstagsproblem und das Sammelbildproblem. Jede Schülergruppe soll mindestens drei der acht Aufgaben bearbeiten, schriftlich ausarbeiten und eine der Aufgaben in Form einer kurzen Präsentation vorstellen. Die Hauptschwierigkeit dieser arbeitsteiligen Gruppenarbeitsphase liegt in der geeigneten Modellierung der stochastischen Problemstellungen als Computersimulation in Fathom. Die Arbeitsgruppen sollen hier möglichst selbstständig die Simulationen entwickeln und in der Lage sein, ihre Ergebnisse schriftlich sowie in Form einer kurzen Präsentation darzustellen.

3. Untersuchungsergebnisse

Das Kurskonzept wurde im zweiten Schulhalbjahr 2004/2005 in zwei Mathematik-Leistungskursen an der Jacob-Grimm-Schule in Kassel komplett unterrichtet, einer der beiden Kurse wurde betreut durch den Autor. In diesem Rahmen wurden neben der Unterrichtsbeobachtung und den Kursar-

beiten mehrere Untersuchungen durchgeführt, unter anderem wurden nach jedem der drei Unterrichtsschwerpunkte in beiden Kursen Schülerbefragungen durchgeführt, welche die Einstellung gegenüber dem Kurskonzept sowie eine subjektive Einschätzung der Schülerinnen und Schüler zu ihrem Lernerfolg und zu den Unterrichtsmethoden zum Inhalt hatten. Ferner wurde die Gruppenarbeit bei vier Schülergruppen aus dem Kurs des Autors mit der Software Camtasia aufgezeichnet. Die Software zeichnet die Bildschirmaktivität und simultan hierzu die Gespräche der Gruppe am Computer als Video auf.

Bei der ersten Schülerbefragung im Anschluss an den Simulationsvorkurs zeigt sich eine hohe Akzeptanz des Unterrichtskonzepts wie auch der Software Fathom. Bei der Frage nach der Nutzungsdauer der Software zu Hause geben die mittleren 50% der Schülerinnen und Schüler Zeiten von 2 bis 5 Stunden pro Woche an. Obwohl die Akzeptanz der Software bei den Mädchen etwas geringer ist als bei den Jungen, sind die mittleren häuslichen Nutzungsdauern bei den Mädchen deutlich höher. Bei offenen Fragen zu Stärken und Schwächen der Unterrichtseinheit geben einige Schülerinnen und Schüler an, dass ihnen die theoretische Behandlung der Aufgabenstellungen parallel zur Simulation gefehlt hat. Auf positiver Seite wird die Gruppenarbeit und das selbstständige Arbeiten am Computer hervorgehoben, weiter die Vielfalt der in kurzer Zeit behandelten Fragestellungen.

Anhand der Camtasia-Aufnahmen kann man ein sehr differenziertes Bild über die Software-Benutzung, die Zusammenarbeit in der Gruppe sowie den Umgang mit den Aufgabenstellungen gewinnen. In der arbeitsteiligen Gruppenarbeitsphase zeigt sich ein sehr sicherer Umgang der Schülerinnen und Schüler mit der Software, so dass die Probleme bei der geeigneten Modellierung der stochastischen Aufgabenstellungen liegen. Dies wird gestützt durch die Beobachtung, dass alle Schülergruppen mindestens drei Aufgabenstellungen erfolgreich gelöst haben – einzelne Schülergruppen haben sogar alle Aufgabenstellungen erfolgreich bearbeitet.

Literatur:

Biehler, R. (1991). Computers in Probability Education. Chance Encounters: Probability in Education. R. Kapadia and M. Borovcnic. Dordrecht, Kluwer**:** 169-211.

Biehler, R. (2003). Simulation als systematischer Strang im Stochastikcurriculum. Beiträge zum Mathematikunterricht 2003. Hildesheim, Franzbecker.

Lehrplan Mathematik (Stand 2005). Lehrplan Mathematik - gymnasialer Bildungsgang, Jahrgangsstufe 13, Kultusministerium Hessen.

Seber, G. A. F., C. Wild (2000). Chapter 9 Significance Testing: Using Data to test Hypothesis. A First Course in Data Analysis and Inference. New York, J. Wiley**:** 368-407.

Renate MOTZER, Augsburg

Soziale Bezüge in mathematischen Themen sehen

Unterschiedliche Akzente in den Arbeiten von Jungen und Mädchen

Mädchen und Jungen haben manchmal unterschiedliche soziale Bedürfnisse. Mädchen scheinen mehr das Bedürfnis nach Kommunikation, nach sozialem Austausch zu haben, auch danach über Probleme zu reden u.ä. Jungen dagegen scheint ihre Stellung im sozialen Gefüge wichtiger zu sein. Diese unterschiedlichen Bedürfnisse wirken sich auch auf die bevorzugten Arbeitsformen im Mathematikunterricht aus (vgl. Jahnke-Klein 2001). Neben organisatorischen Aspekten können auch inhaltliche Gesichtspunkte für die Motivation relevant sein. So kann es etwa beim Beweisen im Mathematikunterricht von Bedeutung sein, in welchem sozialen Kontext Beweise gesehen werden.
Bei der Untersuchung von Aufsätzen (sog. Themenstudien - vgl. Kuntze 2005) über Beweisen kann beobachtet werden, dass manche Mädchen das Wort „Überzeugen“, das in den den Kindern vorgegebenen Materialien mehrfach zu finden war, anders deuten als Jungen. Es scheint ihnen nicht so sehr darum zu gehen, anderen klar zu machen, dass sie Recht haben, sondern darum anderen die zu beweisende Aussage verständlich zu machen.
Im Kontext des Verständlichmachens scheint auch der Wunsch nach festen Regeln zu stehen, der bei Mädchen besonders ausgeprägt ist (vgl. auch Jahnke-Klein 2001, 117ff), und die Tatsache, dass die Mädchen der äußeren Form eine größere Rolle zukommen lassen. Beides kann die Verständigung enorm erleichtern.

Für meine Untersuchung lagen mir 87 Themenstudien über das Beweisen vor. 41 Mädchengruppen und 46 Jungengruppen aus 8. Klassen an Münchner Gymnasien wurden 2003 aufgefordert, sich anhand von verschiedenartigen Materialien Gedanken zum Beweisen zu machen und diese Gedanken schriftlich festzuhalten (vgl. Kuntze 2004). Die Materialien, mit denen sich die Schülerinnen und Schüler in dieser Themenstudienarbeit auseinander setzten, beinhalteten mathematikbezogene Dokumente wie Argumentationsbeispiele und interdisziplinär orientierte Quellauszüge wie Rechtsnormen zu Beweisverfahren im Strafprozess. Den Schülerinnen und Schülern war freigestellt, welche Aspekte des Beweisens sie in ihrer Themenstudie behandeln wollten und welche Schwerpunkte sie dabei setzten.
Soziale Aspekte werden sehr oft angesprochen. In 66 Gruppen finden sich mehr oder weniger ausführliche Hinweise auf soziale Kontexte des

mathematischen Beweisens (36 Mädchengruppen und 30 Jungengruppen). Sie stehen meistens (bei 62 Arbeiten) im Zusammenhang mit dem Wort „Überzeugen".
Dass dieser Bereich eine so große Bedeutung erlangen konnte, dürfte nicht unwesentlich an den Rohmaterialien liegen. Diese betonen den Aspekt des Überzeugens vor allem im ersten Dokument. Dort lautet das erste Zitat: „Überzeuge dich selbst, überzeuge deinen Freund, überzeuge deinen Feind – das letztere ist das, was man beim Beweisen machen muss."
In der Mathematik, vor allem in der Schulmathematik besitzt das Motiv des Überzeugens keine große Bedeutung, zumindest wird es in den meisten Schulbüchern nicht erwähnt. Dass es in den Themenstudien so oft auftaucht, dürfte man folglich als einen Lerneffekt aus den Materialien deuten.

Rezeption dieses Begriffes bei den Schülerinnen und Schülern
Interessant ist nun zu sehen, was bei den Jugendlichen mitschwingt, wenn sie dieses Wort „Überzeugen" in ihre Themenstudien aufnehmen. 62 Arbeiten enthalten das Wort „Überzeugen" im Zusammenhang mit mathematischen Beweisen. In 14 Arbeiten wird dieses Wort nur zitiert. Unter den 48 Arbeiten, die das Wort im Rahmen von selbst formulierten Sätzen verwenden, sind 15, die es nicht weiter erläutern. Die restlichen 33 Arbeiten stellen es in einen größeren Kontext, der hier genauer untersucht werden soll. Dabei können gewisse Unterschiede zwischen den Geschlechtern beobachtet werden.
Für etliche Schüler und Schülerinnen gibt es einen Zusammenhang zu der Aussage, dass mathematische Beweise von Mathematikern anerkannt werden müssen (14 Jungengruppen und 7 Mädchengruppen). Weiterhin stehen diese beiden Themen für 10 Jungen- und 5 Mädchengruppen im Kontext mit der Tatsache, dass es kein eindeutiges Regelwerk für mathematische Beweise gibt (auch diese Aussage findet sich in den Materialien). Dabei fällt auf, dass die Jungen gewöhnlich diese Feststellung als Tatsache ohne eigene Wertung beschreiben, unter den 5 Mädchengruppen aber 3 sind, die darüber gar nicht sehr erfreut sind. Für 2 Mädchengruppen und 4 Jungengruppen geht dies schließlich noch damit einher, dass es eine absolute Wahrheit nicht gibt.
Während dieser Argumentationszusammenhang, der den Zitaten des ersten Dokuments entspricht, also eher von den Jungen übernommen wurde als von den Mädchen, finden sich umgekehrt bei den Mädchen deutlich häufiger Aussagen, die sich auf das Verstehen von Beweisen beziehen, genauer gesagt auf das Verständlichmachen. Nicht nur man selbst soll den Beweis verstehen, sondern das Überzeugen des Gegenübers besteht darin,

ihm den Beweis verständlich und nachvollziehbar zu machen. Die Worte „verstehen“ bzw. „verständlich“ findet man im Kontext des Überzeugens bei 10 Mädchen- und 5 Jungenarbeiten. Dabei betont je eine Jungen- und eine Mädchengruppe die internationale Verständlichkeit der Mathematik. Das Wort „nachvollziehbar“ findet sich bei 5 Mädchen- und 2 Jungengruppen. Eine Mädchengruppe verwendet statt „nachvollziehen“ an einer Stelle das gefühlbetontere „nachempfinden“.
3 Mädchengruppen geht es beim mathematischen Beweisen darum, anderen etwas glaubhaft zu machen. Nur ein Junge verwendet ebenfalls dieses Wort. Beweisen heißt für ihn auch etwas „glaubhaft anderen verkaufen können.“

Überzeugen im Sinne von Rechthaben

Es gibt noch weitere Formulierungen, die unterschiedliche Tendenzen aufzeigen in dem, was für Jungen und Mädchen beim Wort „Überzeugen“ mitschwingt. Die Ausführungen von Jungen gehen manchmal eher in die Richtung, dass man selbst Recht haben will, dass einem niemand mehr widersprechen kann. Beweise in der Schule sind z.B. dazu da, „um anderen Schülern und Lehrern zu zeigen, dass jemand recht bzw. unrecht hat.“ Andere Jungen meinen, in der Mathematik muss man „nicht nur überzeugen, man muss es so beweisen, dass man es gar nicht mehr abstreiten kann.“ Man muss den anderen überzeugen, „ohne dass er was dagegen einwenden kann.“ „In der Mathematik gibt es keinen Kompromiss“, ist für eine weitere Jungengruppe wichtig.
Drei andere Jungen meinen:

Beweise dienen nicht nur den Mathematikern, sondern auch den Physikern, Biologen und Juristen. Man benutzt sie um Dinge unwiderruflich zu belegen. Manchmal sitzen, vor allem die Mathematiker, Monate lang vor den Aufgaben die es zu beweisen gilt. Sinn ist es nicht nur durch ausprobieren und Vermutungen Dinge zu beweisen, sondern die Beweise müssen Hieb- und Stichfest sein. Man sagt auch: Selbst seinen schlimmsten Feind muss man überzeugen können.

Sie sehen außerdem die „gegenseitige Herausforderung der Mathematiker“.

Überzeugen im Sinne von Verständlichmachen

Dass „alle zustimmen, alle überzeugt“ sind, ist auch Mädchen wichtig. Aber es scheint ein etwas anderer Kontext dahinter zu stecken.

Das Wichtigste an Beweisen ist es jedoch,
Überzeugung zu gewinnen. So sollte man aber nicht
nur selbst von seiner Idee überzeugt sein, sondern
auch andere dafür begeistern. Zum Beispiel Freunde,
Lehrer, Verwandte und Bekannte, Eltern und
Geschwister. Denn ein Beweis gilt nur dann als

solcher, wenn er auch von allen anderen anerkannt wird.

Schließlich stellen diese Mädchen fest: „Noch besser ist es, sich zu mehreren Leuten zusammenzusetzen, um eventuell Fehler zu vermeiden."
Eine weitere Gruppe formuliert es so: „Überzeugungen sollten nicht erzwungen werden – es ist wichtiger, etwas verstehen oder nachvollziehen zu können. Nur so erfüllt ein Beweis auch seinen Zweck."
Einige erwähnen hierbei den Zusammenhang mit den Fachleuten. Zwei Mädchen nennen verschiedene Situationen, in denen bewiesen wird: „Ein Beweis soll auch Dinge, die man selbst versteht, für andere verständlich machen. Ein Beweis ist nur dann richtig, wenn andere den Tatbestand oder die Wirklichkeit durch ihn sehen. Er muss von Fachleuten anerkannt werden. ... Wir verstehen unter einem mathematischen Beweis, dass der Lehrer uns wirklich beweisen kann, dass ein neu durchgenommener Stoff wirklich in dieser Art und Weise funktioniert. ... Hätte man nicht schon vor vielen Zeiten angefangen zu beweisen, würden wir jetzt immer noch glauben, die Erde sei flach und wir wären die einzigen im Universum."
Dass es Aufgabe des Lehrers ist zu beweisen (und das nicht nur im Mathematikunterricht), sieht auch ein anderes Mädchen so.

Folgerungen für das Behandeln von Beweisen im Unterricht

Es bleibt zu fragen, wo der Unterricht dahingehend geöffnet werden könnte, dass Beweise von Schülerinnen und Schülern tatsächlich dazu beitragen, dass andere die Inhalte und Zusammenhänge eines Satzes besser verstehen. Diese anderen können die Mitschülerinnen und Mitschüler sein (bei Referaten, bei Expertenpuzzles oder ähnlichen Unterrichtsformen), vielleicht auch außenstehende Personen.
Andererseits könnte man einwenden, ob nicht bei einem offeneren Unterricht, der zu echten Beweisanlässen führt, dem Bedürfnis vieler Mädchen nach festen Regeln noch weniger Rechnung getragen wird.
Dem Wunsch nach Schema F sollte aber nicht immer nachgegeben werden. Die Mädchen sollen vielmehr sehen, es lohnt sich, sich eigenständig mit einem mathematischen Problem zu beschäftigen.

Literatur:

Jahnke-Klein, Sylvia (2001). Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen, Hohengehren
Kuntze, S. (2005). Schülerinnen und Schüler reflektieren, beurteilen und präsentieren mathematische Themen - Die Themenstudienmethode im gymnasialen Mathematikunterricht. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 37-54). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.
Kuntze, S. (2004). Wissenschaftliches Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Beurteilung gegebener Beweisbeispiele aus der Geometrie - *Journal für Mathematik-Didaktik*, 25(3/4), 245-268.

Hartmut MÜLLER-SOMMER, Vechta

Das „Baustoff - Bauplan - Prinzip“ – Ein heuristisches Werkzeug für kreatives Lernen im Geometrieunterricht

Durch kreatives Experimentieren mit einem dynamischen Geometriesystem erscheinen Kurven und Figuren unter neuen Blickwinkeln: Wir können sie als „Funktionendepots“ interpretieren. Dabei lassen sich die Funktionen als „Baustoffe“ auffassen, aus denen wir mit einfachen „Bauplänen“ neue Kurven erzeugen können. Der Beitrag stellt dar, wie man einerseits mit Hilfe dieser neuen Kurven überraschende Eigenschaften der Ausgangskurven entdecken und andererseits aus den „Baustoffen“ und „Bauplänen“ neue Interpretationsmöglichkeiten für die erzeugten Kurven gewinnen kann.
Dass mit dem „Baustoff-Bauplan-Prinzip“ neue Wege zu alten Inhalten des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe I eröffnet werden, soll im ersten Teil des Beitrags anhand von unterrichtspraktischen Beispielen gezeigt werden.
Der zweite Teil des Vortrags geht über den Unterrichtsstoff der Sekundarstufe I hinaus und beschreibt überraschende Zugänge zu höheren Kurven. Dabei erweist sich die Idee, gewisse Winkel als Baustoffe zu verwenden und mit einfachen Bauplänen zu verarbeiten, als besonders fruchtbar. Die Kegelschnitte und viele mathematikhistorisch relevante höhere Kurven erscheinen unter neuen Blickwinkeln: Jede dieser Kurven besitzt einen eigenen Bauplan, er ist aber in derselben „Sprache“ abgefasst, da er auf dieselben Baustoffe zurückgreift. Im Weiteren wähle ich für das „Baustoff-Bauplan-Prinzip“ die Abkürzung „BBP“.

Die Grundidee

In Abb. 1 bewege sich der Punkt C auf einem Thaleskreis über $\overline{AB}$. Zu jeder Lage von C gibt es offenbar eine bestimmte Höhe h, bestimmte Kathetenlängen a und b, bestimmte Hypotenusenabschnitte q und p und bestimmte Winkel α und β. Die Figur lässt sich somit als „Funktionendepot“ auffassen.

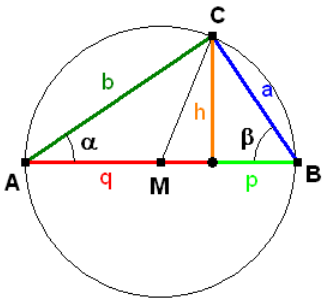


Abb. 1

Die Funktionen dieses Depots sind kennzeichnend für die Figur und beschreiben genau die Eigenheiten, die in der Figur bzw. Kurve enthalten sind. In einer statischen Figur erscheinen diese Funktionen in einem „eingefrorenen“ Zustand. Erst durch den Zugmodus im DGS wird ihr dynamischer Charakter deutlich.

Die Elemente des Funktionendepots fassen wir nun als „Baustoffe“ auf, die sich nach bestimmten „Bauplänen“ weiterverarbeiten lassen.

Ein Beispiel: Als *Baustoff* wird der Hypotenusenabschnitt p angesehen. Dieser Baustoff soll nun nach zwei verschieden Bauplänen verarbeitet werden.

Bauplan 1: Die Länge von p wird vom Fußpunkt F aus in Richtung von C abgetragen.

Bauplan 2: Die Länge von p wird vom Mittelpunkt M aus in Richtung von C abgetragen.

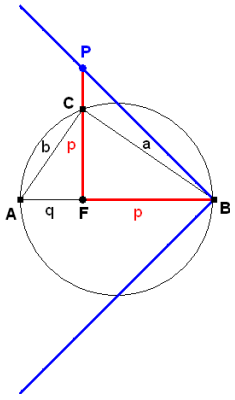


Abb. 2a

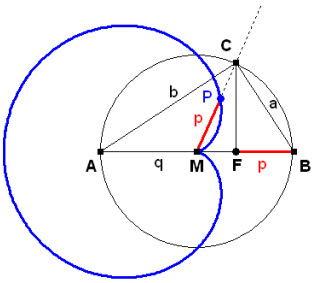


Abb. 2b

Der erste Bauplan liefert als Ortskurve ein Streckenpaar (Abb. 2a), der zweite eine Kardioide (Abb. 2b).

In der Grundidee zum BBP kommen die drei wesentlichen Aspekte des Funktionsbegriffs zum Tragen: der Aspekt der Zuordnung, die Vorstellung einer dynamischen Abhängigkeit zweier Größen (Kovariationsaspekt) und der Aspekt „Funktion als Objekt“. Mit einem DGS lässt sich der Entstehungsprozess der erzeugten Kurven dynamisch visualisieren. Somit kann das BBP inhaltliche Grundvorstellungen des Funktions-, aber auch des Kurvenbegriffs nachhaltig unterstützen.

Eine Unterrichtseinheit

Im Folgenden wird ein Unterrichtsgang skizziert, den ich in einer 9. Klasse eines Mädchengymnasiums durchgeführt habe. Im Vorunterricht wurde der Themenbaustein „Parabel“ behandelt. Die Konstruktionen nach Abb. 2a und 2b bildeten den Einstieg in die Unterrichtseinheit und wurden vom Lehrer am Rechner präsentiert.

Mit einem „Zug“ war die einfache Thalesfigur für die Klasse zu einem interessanten Forschungsobjekt geworden! Die Schülerinnen wollten wissen, was noch alles in der Figur „drinsteckt“.

In einem „Forschungsauftrag“ sollte die Klasse nun auch die übrigen Baustoffe der Figur (Dreieckshöhe h, Kathetenlängen a und b, Hypotenusenabschnitt q) nach den Bauplänen 1 und 2 bearbeiten.

„Forschungsauftrag“:

a) Stelle die Höhe h und die Kathetenlänge a nach den Bauplänen des Einstiegsbeispiels in Abhängigkeit von der Lage des Punktes C grafisch dar.

b) Übertrage die erzeugten Kurven auf dein Arbeitsblatt und beschreibe die Veränderungen von h und a, wenn du C auf dem Thaleskreis bewegst.

c) Welche Kurven ergeben sich für die Kathete b und für den Hypotenusenabschnitt q?

Aus Platzgründen beschränke ich mich bei der Vorstellung der Untersuchungsergebnisse auf die Untersuchung der Kathetenlänge a nach Bauplan 1. Wir erhalten als Ortskurve eine Parabel, die offenbar in dem in Abb. 3 dargestellten Koordinatensystem die Gleichung $y = \frac{1}{2r}x^2$ besitzt. Die Koordinaten $x = a$ und $y = p$ des Parabelpunktes P führen daher auf $p = \frac{1}{2r}a^2$, also auf $a^2 = 2r\,p = c\,p$.

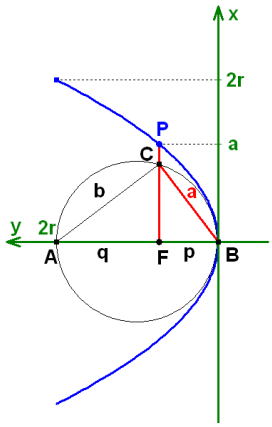


Abb. 3

Dies ist der **Kathetensatz** für die Kathete a!
Analoge Untersuchungen für die Kathetenlänge b führen auf den zweiten Kathetensatz $b^2 = c\,q$. Die erzeugte Kurve deckt also einen geometrischen Sachverhalt auf, der den Schülerinnen vorher unbekannt war!

Die Gleichung $a^2 = 2r\,p$ zeigt auch, dass ein linearer Zusammenhang zwischen a^2 und p besteht: Wenden wir die Baupläne 1 und 2 (vgl. Abb. 2) nicht auf den Baustoff p, sondern auf a^2 an, so erhalten wir wieder ein Streckenpaar und eine Kardioide. Hier kommt nur der zusätzliche Streckfaktor c ins Spiel. Diese Ortskurven liefern gleichzeitig einen visuellen Hinweis auf den **Satz des Pythagoras**! In der Tat: Bauplan 2, angewandt auf $a^2 + b^2$, führt auf einen Kreis mit dem Radius c^2 (Abb. 4). Eine Schülerin brachte den pythagoreischen Satz auf die Kurzform *„Herz + Herz = Kreis“*.

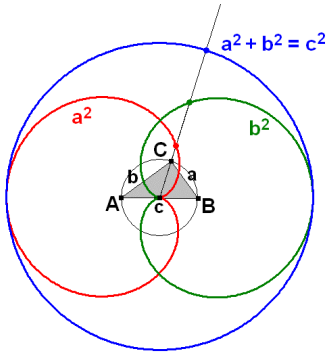


Abb. 4

Wählen wir in Abb. 4 die Punkte A und B beliebig auf dem Thaleskreis, so liefert der Bauplan 2 als Ortskurve i. Allg. keinen Kreis, sondern eine *deformierte* Kurve. Die Schülerinnen konnten hier „eigenhändig“ erkennen, dass Kreise nur dann entstehen, also der Satz des Pythagoras nur dann gültig ist, wenn das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist.
Immer dann, wenn Baustoffe oder Baupläne variiert werden, kann das BBP seine eigentliche *heuristische Kraft* entfalten. Verändern wir beispielsweise in Abb. 4 die Lage des Punktes A, und damit den Baustoff $a^2 + b^2$, indem wir A vom Thaleskreis lösen, so wird die ursprüngliche kreisförmige Ortskurve, die nach Bauplan 2 erzeugt wurde, wieder *deformiert*. Auch diese Deformation lässt sich durch eine zweite Baustoffvariation *„reparieren“*: Wird nämlich auch der Punkt B vom Thaleskreis gelöst und so verschoben,

dass A und B punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des alten Thaleskreises liegen, so entsteht wieder ein Kreis als Ortskurve. Der Thaleskreis ist also der geometrische Ort aller Dreieckspunkte C, die zu Dreiecken ABC mit konstanter Summe a^2+b^2 gehören! Hat der Thaleskreis den Radius r = 1, so gilt $a^2+b^2=\frac{c^2}{2}+2$. Diese Gleichung beschreibt offenbar eine Verallgemeinerung des pythagoreischen Satzes!

Kurven unter neuen Blickwinkeln

In Abb. 5 ist P ein Punkt auf einem Einheitskreis K um M(0;0) und Q(-q;0) ein Punkt auf der x-Achse. Als *Baustoffe* wählen wir die Winkel φ und ψ. Der *Bauplan*: Zu vorgegebenen Punkten A und B wird ein Dreieck ABC mit $\alpha=\varphi$ und $\beta=\psi$ konstruiert. Ist q = 1 ($Q \in K$), so durchläuft C eine Hyperbel[1], wenn sich P auf dem Einheitskreis bewegt (Abb. 6).

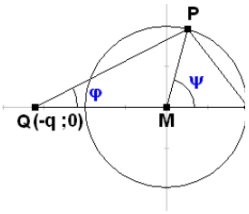


Abb. 5

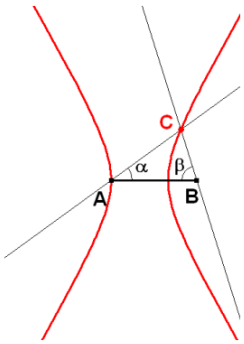


Abb. 6

Variiert Q auf der x-Achse, so ergeben sich weitere Kegelschnitte: Wir erhalten weitere Hyperbeln für q < 2, eine Parabel für q = 2 und Ellipsen für q > 2. Ganz offensichtlich liefert hier das BBP neue Einblicke in den **Bauplan der Kegelschnitte**! Wählen wir für die obigen Baustoffe φ und ψ andere einfache Baupläne, so erhalten wir neue Zugänge zu bekannten **algebraischen Kurven**: Der Bauplan „$\alpha=\varphi+0{,}5\psi$, $\beta=\pi-0{,}5\psi$“ liefert beispielsweise Kurven 3. Grades. Algebraische Kurven 4. Grades ergeben sich mit dem Bauplan „$\alpha=\psi$, $\beta=\pi-(\varphi+\psi)$“.

Fazit

Das BBP stellt ein kreatives Werkzeug für den Geometrieunterricht dar (s. Weth 1999). Als *kreative Produkte* rücken die erzeugten Kurven in das Zentrum des Interesses und verleihen diesem Werkzeug das eigentliche heuristische Potenzial. Daher unterstreicht dieser Beitrag Forderungen, bereits in der Sekundarstufe I mit der Exploration beziehungshaltiger Kurven zu beginnen (s. Schupp 1998).

Literatur

Schupp, H.: Einige Thesen zur sogenannten Kurvendiskussion. – In: MU 44 (1989), H. 4/5, S. 5-21.

Weth, Th.: Kreativität im Mathematikunterricht – Begriffsbildung als kreatives Tun. Hildesheim: Franzbecker 1999

[1] Mit dieser Hyperbel hat übrigens PAPPUS die Winkeldreiteilung durchgeführt. Hier ist $\beta = 2\alpha$.

Fritz Nestle, Ulm (Ludwigsburg)

Didaktikervorstellungen über Lernergebnisse im MU

1 Weiße Flecken auf der Landkarte
2 Was sind Standards?
3 Anmerkungen zum Fragebogen
4 Antworten
5 Kommentar
6 Quellenhinweise

1 Weiße Flecken auf der Landkarte der Didaktik. Über Schülervorstellungen zum Lernen wird viel geforscht. Wenig weiß man über die Vorstellungen der Didaktik, insbesondere über die Vorstellungen zu Langzeitergebnissen des Mathematiklernens. Solche Vorstellungen sind jedoch von großer Bedeutung, wenn man als Arbeitshypothese einen nennenswerten Beitrag der fachdidaktischen Studienanteile zum späteren Lehrverhalten der Lehramtsstudenten postuliert.

2 Was sind Standards? Eines der Ergebnisse der französischen Revolution und der Aufklärung war die Ersetzung willkürlicher Maße durch personenunabhänge Standards. So wurde zum Beispiel als Längenmaß anstelle von (willkürlichen Herrscher-)Füßen, Ellen, Spannen, Ruten, ... das Metermaß als zehnmillionster Teil des Erdmeridianquadranten eingeführt. Heute wird die Längeneinheit als international in der Wissenschaft gültige Maßeinheit mit einer Genauigkeit von 2.5×10^{-11} (über die Lichtgeschwindigkeit) definiert.

Erst durch definierte Einheiten ist die heutige Technik möglich geworden. 1917 - noch während des ersten Weltkriegs - wurde das deutsche Institut für Normung gegründet. Inzwischen gibt es DIN-Normen für eine Vielzahl von Anwendungen. Der Nutzen ist offenkundig.

Im Bereich des Lernens stehen Normen noch aus. Die Beschäftigung der KMK mit Bildungsstandards, beginnend mit der Vereinbarung vom 3.12.2003, verwendet den Begriff Standard in neuer Bedeutung. Beispiel: „Die Schülerinnen und Schüler nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit.“ (3.2 in [1])

Hier ist in keiner Weise festgelegt, was tatsächlich von den Schülern erwartet wird. Was heißt „nutzen“, „sinntragend“, „Verwendungsnotwendigkeit“, ... ?

Im alten Griechenland gab es das Orakel von Delphi. Unter dem Einfluss von Dämpfen aus dem Erdinneren stieß die Seherin Pythia interpretationsbedürftige Laute aus. Priester des Delphischen Orakels waren dazu ange-

stellt, diesen Lauten einen Sinn zu geben. Man fragte das Orakel, wenn man eine Entscheidungshilfe brauchte. Die Priester waren darin geübt, ihre Auslegungen mehrdeutig zu formulieren. Krösus bekam zur Frage nach den Erfolgsaussichten eines Krieges die Antwort „Wenn Krösus den Halys überschreitet, wird er ein großes Reich zerstören." Er hat den Fluss überschritten und dadurch sein eigenes Reich zerstört.

Sind Didaktiker zur Interpretation der Äußerungen der KMK berufen? Neugier zu diesem Punkt war Anlaß für eine Umfrage unter den Didaktikern des Fachs, ein online-Fragebogen das Mittel der Wahl, nachdem die Tagungsleitung in Osnabrück keine Möglichkeit gesehen hatte, den Fragebogen den Tagungsunterlagen beizufügen. Ein Hinweis auf den Fragebogen wurde deshalb per Email versandt.

3 Anmerkungen zum Fragebogen. Um die Wahrscheinlichkeit für das Ausfüllen zu erhöhen, wurden – pars pro toto - die Fragen auf zehn Teilthemen des Mathematikunterrichts beschränkt:

1 Einmaleins	2 Terme
3 „Dreisatz"	4 Prozent- und Zinsrechnung
5 Abbildungsgeometrie	6 Dreieckskonstruktionen
7 Volumberechnung (KMK-Beispiel)	8 Analysis
9 Computer 1 (Tabellenkalkulation)	10 Computer 2 (HTML)

Gefragt wurde nach IST und SOLL für jeweils eine Auswahl der Zielgruppen Schüler verschiedener Altersstufen, Lehramtsstudierende, Lehrer und Mathematikdidaktiker. Im Begleitschreiben wurden anonym erfasste, subjektive und spontane Schätzwerte erbeten. Es wurde darauf hingewiesen, dass auch bei Bedenken gegen das Ausfüllen ein Kommentar im sonst leeren Fragebogen erwünscht ist, und dass keine Reaktion auf das Rundschreiben als Desinteresse am Thema gedeutet werden kann. Bewußt wurde nicht nach Schularten differenziert, da der Schätzwert bei einigen Fragen auf eine Altersstufe bezogen werden sollte.

438 Emailnachrichten, überwiegend einer Internetadressenliste der GDM entnommen, wurden verschickt; 102 Nachrichten kamen als unzustellbar zurück, das heißt, bis zu 336 Nachrichten haben den Empfänger erreicht. 16 Absender haben Ihren Fragebogen namentlich gekennzeichnet, 16 Antworten sind anonym eingegangen. Drei Emailnachrichten kamen ohne Fragebogen, zusätzlich 17 Fragebögen einer Gruppe von Referendaren!

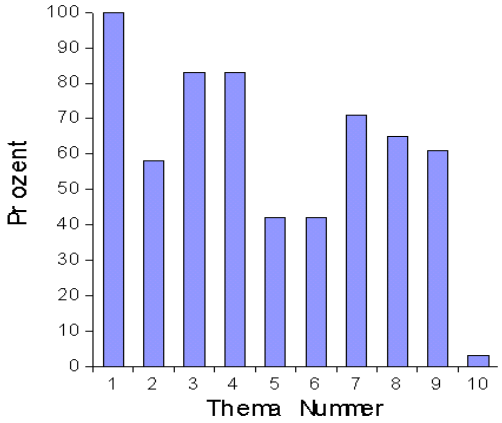
Mit einer Rücklaufquote von rund 10 % ist die Basis der folgenden Auswertung von höherem Gewicht als die Wahlbeteiligung bei vielen Asta/-Stupawahlen, deren Ergebnis Zugriff auf Millionensummen eröffnet.

Kommentare waren ausnahmslos freundlich, zum Teil Bedenken („beim Ausfüllen des Fragebogens war mir recht unbehaglich, weil ich in den Fragen einerseits die modische \"Outputorientierung\" erkenne, ...“), zum Teil Zustimmung („ich finde Ihre Initiative sehr spannend, ...“).

4 Antworten. Im Folgenden können nur wenige Einzelergebnisse hervorgehoben werden. Anonymisierte "Exeldaten“: xls_nestle_fritz.xls auf der CD.

Eine Teilfrage zu jedem Thema betraf die Einschätzung wichtig/unwichtig:

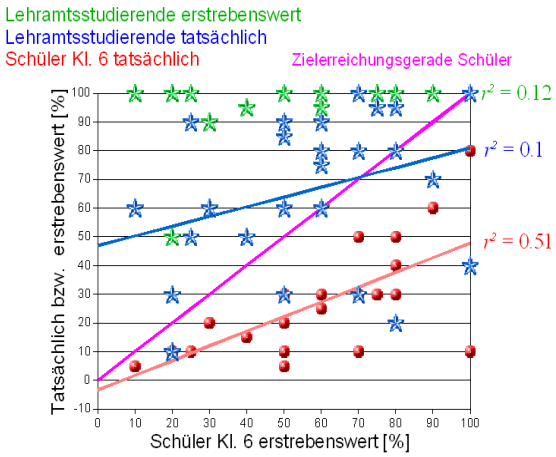
Bild 1: Erwartungsgemäß erhielt das Einmaleins die höchste Priorität, die HTML-Frage eine sehr niedrige.



Die beiden Geometriethemen (5) und (6)zeigen, dass die Ansichten zu Abbildungsgeometrie und Dreieckskonstruktionen immer noch gespalten sind.

Überrascht hat bei Termen die niedrige Priorität der Übersetzung von Sprache in die symbolische Darstellung.

Einer Anregung von Nikolaus Nestle folgend sind in Bild 2 IST- und SOLL-Schätzungen bei Termen einander gegenübergestellt. Die Schätzungen für die tatsächliche Schülerkompetenz liegen zum Teil über der für die tatsächliche Kompetenz der Lehramtsstudierenden!



Eigene Erfahrungen zur tatsächlichen Kompetenz der Lehramtsstudierenden aus den Achtzigerjahren des letzten Jahrhunderts lassen diese Schätzungen optimistisch erscheinen.

Zwischen den Bildern 1 und 2 bergen die Daten eine Fülle interessanter Auswertungsmöglichkeiten. Hier ist nur noch Platz für eine Zusammenfassung: Die Schätzwerte schwanken von Person zu Person außerordentlich.

(Minimale Intervallbreite: 30 % beim „Dreisatz“-Soll – Lehrer
Maximale Intervallbreite: 98 % beim „Dreisatz“-Soll – Schüler)

5 Kommentar. Wenn in den amtlichen Verlautbarungen der KMK von Bildungs-“Standards“ und Regel-“Standards“ die Rede ist, so handelt es sich dabei um sehr diffuse Vorstellungen.

Das Ergebnis der Umfrage zeigt, daß derzeit von den Mathematikdidak-

tikern keine zuverlässige Präzisierung zu erwarten ist. Immerhin sind die Vorstellungen über die Unterrichtsziele, die tatsächlich erreicht werden, zum Teil realistisch.

Beispiel Prozentrechnung: Die Didaktiker gehen davon aus, daß rund 50 % der Abiturienten eine zweistufige Prozentrechnung nicht lösen können, rund 60 % der Schüler in Klasse 7. In Deutschland konnte deshalb im Wahlkampf zur Bundestagwahl 2005 Stimmenfang betrieben werden mit der Frage „Ist es gerecht, wenn der Generaldirektor *gleich viele Steuern* zahlt wie die Krankenschwester?“ (Hintergrund war der Vorschlag, einen Einheitssteuersatz von 25 % einzuführen und die Steuerschlupflöcher für Großverdiener zu schließen.)

Einigkeit bestand bei allen Antwortenden darin, dass das Einmaleins - eine reine Gedächtnisleistung - wichtig ist. Im Mittel wird jedoch davon ausgegangen, dass nur 87 % der Sechstklässler das Einmaleins beherrschen sollten. Wenn im Mittel nur 95 % der Lehramtsstudierenden Dreisatzrechnungen selbst lösen können sollten, so genügt das den Durchschnittsvorstellungen der Antwortenden – weil sie nur rund 70 % zutrauen, dass sie die Beispielaufgabe zum Dreisatz tatsächlich lösen können.

Wenn sich die Wirtschaft mit solchen Produktionsergebnissen bei der Teileherstellung zufrieden geben würde, wäre die Produktion von Autos oder Fernsehern unmöglich. Wenn im Bildungswesen akzeptiert wird, dass oft weniger als die Hälfte der Lernenden das Lernziel erreicht, liegt darin wohl ein grundsätzlicher Systemfehler. Ein Angebot überprüfbarer Standards für Lernergebnisse entsprechend dem Dortmunder Manifest [3] könnte dieses Problem auf einfache Weise lösen. Ein Hindernis auf dem Weg dazu ist der teilweise in Didaktikerkreisen gepflegte Horror vor dem „teaching to the test“, während sie selbstverständlich „learning to the test“ fordern und „manufacturing to the test“ als Grundmaxime bei der industriellen Produktion allgemein erwartet wird.

Solange nicht genügend Standards, die die Kriterien des Dortmunder Manifests [3] erfüllen, verfügbar sind, dürfte die Forderung Neuwegs [4] nach „Vorsichtsstandards für den Umgang mit Bildungsstandards“ verfrüht sein.

6 Quellenhinweise

[1] www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf
[2] www.bildungsstandards.de/06/ziele/oldvor.htm
[3] www.bildungsoptionen.de/manifest.htm
[4] Hans Neuweg, Vorsichtsstandards für den Umgang mit Bildungsstandards, Berufs- und Wirtschaftspädagogik – online 8, 7.05

Bernd NEUBERT, Gießen

Kompetenzen von Grundschülern bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zu den Leitideen, an denen sich die Bildungsstandards inhaltlich orientieren, gehört „Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit“. Schülerinnen und Schüler sollen am Ende der 4. Jahrgangsstufe die Kompetenz haben, Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten zu vergleichen. Uns interessierte, welche Kompetenzen Grundschüler jüngeren Alters in dieser Hinsicht schon besitzen.

Im Folgenden soll über ausgewählte Ergebnisse zweier Studien berichtet werden. Dabei wurden Grundschüler unterschiedlicher Jahrgangsstufen zum einen mit Aufgaben zum Urnenmodell, zum anderen mit Aufgaben zum Glücksrad konfrontiert. Sie besaßen in allen Fällen keine Vorkenntnisse zur Wahrscheinlichkeitsrechnung aus dem vorangegangenen Unterricht.

Studie zum Urnenmodell

An der Studie zum Urnenmodell (vgl. Mayer 2005) nahmen Schüler aus einer 1. und einer 4. Klasse teil. In Einzelinterviews wurden ihnen Aufgaben zur Einschätzung der Gewinnchancen beim Ziehen aus jeweils zwei Urnen gestellt. Für die Formulierung der Aufgabenstellungen wurden folgende „Mischungsverhältnisse“ in den Urnen zugrunde gelegt:

		Urne 1	Urne 2
Aufgabe 1	Unterschiedliche Anzahl der Gewinnfarbe; Gleiche Anzahl der Nieten	2 - 4	4 – 4
Aufgabe 2	Gleiche Anzahl der Gewinnfarbe; Unterschiedliche Anzahl der Nieten	3 - 4	3 – 5
Aufgabe 3	Unterschiedliche Anzahl der Gewinnfarben; Unterschiedliche Anzahl der Nieten; Jeweils ein Element der Gewinnfarbe mehr als Nieten	2 - 1	4 – 3
Aufgabe 4	Unterschiedliche Anzahl der Gewinnfarbe; Unterschiedliche Anzahl der Nieten; Jeweils gleich viele rote und blaue Würfel	2 - 2	4 - 4

Zur Veranschaulichung der Urnen waren acht große Streichholzschachteln vorhanden, die mit Würfeln entsprechend der Verteilung in den jeweiligen Aufgaben gefüllt waren. Die zugehörigen Aufgabenstellungen waren auf einem Ar-

beitsblatt formuliert. Dort waren auch die Streichholzschachteln mit den jeweiligen Verteilungen abgebildet.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Anzahl richtiger Antworten bzw. Begründungen in den beiden Klassen:

	Klasse 1 (20 Schüler)		Klasse 4 (16 Schüler)	
	Antwort	Begründung	Antwort	Begründung
Aufgabe 1	19	17	15	12
Aufgabe 2	15	13	13	7
Aufgabe 3	8	5	10	8
Aufgabe 4	2	2	9	5

Bei den Begründungen fällt auf, dass sich viele Schüler der 1. Klasse vorrangig nur an der Anzahl der günstigen Ereignisse orientierten. Sie wählten die Urne mit der größeren Anzahl an Gewinnereignissen. Diese Strategie dominierte beim Bearbeiten der Aufgaben 1, 3 und 4. Bei Aufgabe 2, wo diese Strategie zu einem kognitiven Konflikt führte, wurde nach anderen Strategien gesucht. Bei der Lösung dieser Aufgabe bezog eine Reihe von Kindern auch die Anzahl der ungünstigen Würfel in ihre Überlegungen ein. Bei der Bearbeitung der Aufgaben 3 und 4 kehrten die meisten aber wieder zur Strategie „Anzahl günstiger Würfel“ zurück.

Bei den Schülern der 4. Klasse dominiert zwar bei Aufgabe 1 ebenfalls die Strategie „Anzahl günstiger Würfel“, speziell bei den Aufgaben 3 und 4 war bei deutlich mehr Schülern als in Klasse 1 ein Vergleich der günstigen und ungünstigen Ereignisse innerhalb einer Schachtel oder auch bei beiden Schachteln zu beobachten. Dies lässt schon auf ein besseres Verständnis des zum richtigen Lösen notwendigen Verhältnisbegriffes schließen.

Studie zum Glücksrad

An der Studie zum Glücksrad (vgl. Weisbach 2005) nahmen Schüler einer 1. und einer 3. Klasse teil. In Einzelinterviews wurden ihnen vier Aufgaben zur Einschätzung der Gewinnchancen an Glücksrädern gestellt, die ebenfalls auf einem Arbeitsblatt formuliert waren. Die jeweiligen Glücksräder waren abgebildet. Außerdem standen entsprechende Glücksräder zur Verfügung, so dass die Kinder auch auf der enaktiven Ebene tätig werden konnten. Bei zwei Aufgaben ging es darum, die Gewinnchancen zwischen zwei Glücksrädern zu vergleichen, bei den anderen beiden Aufgaben sollten verschiedene Regeln zu einem Glücksrad hinsichtlich der Gewinnchancen bewertet werden.

In *Aufgabe 1* waren zwei Glücksräder mit jeweils sechs nummerierten Feldern zu vergleichen, von denen das eine drei Gewinnfelder, das andere zwei Gewinnfelder aufwies.

In *Aufgabe 2* waren ebenfalls zwei Glücksräder zu vergleichen: Glücksrad 1 hatte acht nummerierte Felder, davon vier Gewinnfelder; Glücksrad 2 hatte 18

nummerierte Felder, davon 7 Gewinnfelder. Die Gewinnfelder waren auf beiden Glücksrädern ungleichmäßig verteilt.

Zu *Aufgabe 3* gehörte ein Glücksrad mit acht nummerierten Feldern, von denen die Felder 1 und 5 blau, 2 orange, 3 und 7 blau sowie 4, 6 und 8 weiß gefärbt waren. Die Kinder sollten aus den folgenden Regeln, die mit den größten Gewinnchancen auswählen und ihre Entscheidung begründen.

Regel 1: Du gewinnst bei 1, 2 oder 3.
Regel 2: Du gewinnst bei rot.
Regel 3: Du gewinnst bei weiß oder blau.
Regel 4: Du gewinnst bei 2, 4, 6 oder 8.

Zu *Aufgabe 4* gehörte ebenfalls ein Glücksrad mit acht nummerierten Feldern, von denen die Felder 1 und 5 gelb, 2, 3 und 6 grün, 4 weiß sowie 7 und 8 rot gefärbt waren. Dazu waren die folgenden Gewinnregeln gegeben:

Regel A: Du gewinnst bei gelb
Regel B: Du gewinnst bei weiß
Regel C: Du gewinnst bei weiß, gelb oder blau
Regel D: Du gewinnst bei weiß, gelb, blau oder orange
Regel E: Du gewinnst bei 10 oder orange
Regel F: Du gewinnst bei 10

Bei Teilaufgabe a wurde nach einer Gewinnregel gefragt, bei der man auf jeden Fall gewinnt, bei Teilaufgabe b nach einer Gewinnregel, bei der man auf keinen Fall gewinnt. In Teilaufgabe c sollte die Regel, bei der die Gewinnchancen am größten, und die Regel, bei der diese am niedrigsten sind, gefunden werden. Außerdem sollten die Regeln nach Gewinnchancen geordnet werden (beginnend mit der Regel mit der größten Gewinnchance). Die Entscheidungen sollten wiederum begründet werden.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Anzahl richtiger Antworten bzw. Begründungen in den beiden Klassen:

	Klasse 1 (19 Schüler)		Klasse 3 (23 Schüler)	
	Antwort	Begründung	Antwort	Begründung
Aufgabe 1	19	18	23	19
Aufgabe 2	2	2	7	2
Aufgabe 3	12	8	21	14
Aufgabe 4a	7	4	18	13
Aufgabe 4b	7	6	14	14
Aufgabe 4c	3	3	15	13

Die Übersicht zeigt, dass es den in der Studie untersuchten Kindern beider Schuljahre am schwersten fiel, die Gewinnchancen zwischen den Glücksrädern mit unterschiedlich vielen Feldern (und auch Gewinnfeldern) zu vergleichen. Dies war für uns nicht überraschend, da bei dieser Aufgabe schon ein gewisses

Verständnis vom Verhältnisbegriff zum Finden der richtigen Lösung benötigt wird.

Als vorherrschende Strategie war in beiden Klassen sowohl beim Vergleich zweier Glücksräder (Aufgaben 1 und 2) als auch hinsichtlich der Beurteilung der Gewinnchancen bestimmter Regeln für ein Glücksrad (Aufgaben 3 und 4) eine (ausschließliche) Orientierung an günstigen Feldern zu beobachten. Auch bei Aufgabe 2, wo dieser Weg nicht zum Erfolg führte, entschieden sich 15 Erstklässler und 12 Drittklässler für diesen. Deutliche Unterschiede zwischen dem Lösungsverhalten der Erst- und Drittklässler gab es bei den Aufgaben 4a und 4b beim Erkennen des sicheren bzw. unmöglichen Ereignisses. Die unterschiedlichen Ergebnisse beim Bearbeiten der Aufgaben 3 und 4c lassen den Schluss zu, dass die Grundschüler mit zunehmendem Alter auch besser in der Lage sind, komplexere Aufgaben zu bearbeiten. Speziell die Aufgabe 4c, die auch das Ordnen der Regeln nach ihren Gewinnchancen verlangte, überforderte viele Erstklässler (drei lösten die Aufgabe aber richtig) und wurde von einigen gar nicht bearbeitet.

Zusammenfassung

Die beiden Untersuchungen lassen mindestens folgende Schlussfolgerungen zu:

Kinder sind von Beginn der Schulzeit an in der Lage, einfache Aufgaben zum Einschätzen von Gewinnchancen an unterschiedlichen Zufallsgeneratoren (Urnenmodell und Glücksrad) zu erfassen. Mit zunehmendem Alter entwickeln sie auch Kompetenzen zum Lösen komplexerer Aufgaben.

Betrachtet man die verwendeten Lösungswege, so war die „Orientierung an (ausschließlich) günstigen Ereignissen“ bei beiden Zufallsgeneratoren die am häufigsten zu beobachtende Lösungsstrategie. Ungünstige Ereignisse wurden vor allem von Erstklässlern vernachlässigt. Dies zeigt, dass ein Verständnis für den Verhältnisbegriff bei den meisten Kindern nur in geringen Ansätzen vorhanden ist. Die Unterschiede zwischen den Erst- und Dritt- bzw. Viertklässlern beim Lösen der entsprechenden Aufgaben deuten aber darauf hin, dass sich dies sich mit zunehmendem Alter (noch in der Grundschulzeit) ändert.

Literatur:

Mayer, Stefanie: Kompetenzen von Kindern der 1. und 4. Klasse bei der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten – erfasst am Beispiel des Urnenmodells. Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen im Fach Mathematik, eingereicht dem Amt für Lehrerausbildung – Außenstelle Gießen, 2005 (unveröffentlicht)

Weisbach, Daniela: Kompetenzen von Schülern der 1. und 3. Klasse bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung – erfasst am Beispiel des Glücksrades. Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen im Fach Mathematik, eingereicht dem Amt für Lehrerausbildung – Außenstelle Gießen, 2005 (unveröffentlicht)

Reinhard OLDENBURG, Göttingen

Mathematik, Realität und Experiment

Zum Verhältnis von Mathematik und Realität

Mathematik gilt nicht als empirische Wissenschaft. Mathematische Sätze werden durch einen innermathematischen Beweisprozess als wahr erwiesen, nicht durch die erfolgreiche Bestätigung in einem Experiment. Diese Sicht verführt aber leider dazu, die Bedeutung von Experimenten in der (individuellen) Genese von Mathematik zu unterschätzen. Dabei ist schon die Voraussetzung, die Unabhängigkeit mathematische Sätze von der Erfahrung, nicht unumstritten. So hat etwa Quine in seiner holistischen, naturalisierten Erkenntnistheorie den Schluss gezogen, dass das geistige System des Menschen als ganzes, also inklusive der Mathematik, evolutionärer Bewährung unterliegt. Die scheinbar privilegierte, von der Erfahrung her „unantastbare“ Stellung der Mathematik ergibt sich aus ihrer zentralen Position im Gefüge der "mental beliefes": Änderungen an der Mathematik sind eine äußerst unökonomisch Form der Adaption, weil sie durch vielfältige Vernetzung unüberschaubare Konsequenzen hätten. Es lässt sich nun leicht eine didaktische Konsequenz aus dieser philosophischen Position ziehen: Mathematik festigt sich durch vom Schüler erlebte Bewährung in der Realität.

Der Modellbildungskreislauf neu betrachtet

Der Modellbildungskreislauf ist seit über 20 Jahren (Blum 1985) eine Ikone der Bewegung des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts und mittlerweile vielfach modifiziert worden. Gemeinsam ist allen Fassungen, dass ausgehend von einer realen Situation zunächst ein Realmodell abstrahiert wird, das anschließend in ein mathematisches Modell übersetzt wird. Dieses kann gelöst und die Ergebnisse wieder in der Ausgangssituation interpretiert und validiert werden. Wichtig scheint mir dabei, dass man den Übersetzungsvorgang von Realmodell zu mathematischem Modell als kreativen Prozess versteht. Wenn man hier von einer mechanischen Übersetzung ausgeht, beraubt man die Schüler u. U. einer wichtigen Möglichkeit, kreativ zu sein. Dass in der Tat nicht von einer mechanischen Übersetzung gesprochen werden kann, zeigt sich beim Beispiel der Entladung eines Kondenstors. Das Realmodell besteht aus einem idealisierten Spannungsmessgerät, idealem Kondensator mit unendlichem Widerstand etc. Mögliche Mathematische Modelle nutzen Differentialgleichungen, Differenzengleichungen oder gleich eine exponentielle Modellierung. Auch diese Position steht im Einklang mit einem theoretischen Befund von

Quine. Laut seiner Unbestimmtheitsthese sind unsere Theorien von der Erfahrung her unterbestimmt.

Der Vergleich Realität-Modell im Validierungsschritt kann mögliche Realität-Modell-Differenzen offen legen. Davon gibt es mehrere Arten:

- Vereinfachung (GPS, Erdnavigation auf Kugel)
- Ersatzwirklichkeit: Modell nicht authentisch, aber brauchbar (Splines im Straßenbau)
- Modell in Realität unbrauchbar (Computertomographie nach Kirchgraber (Istron 6)), aber prinzipiell OK in einer idealisierten Realität
- Modell vollkommen unangemessen

Man muss sich klar machen, dass diese Differenzen nicht einfach ein Übel sind, sondern, in gewissem Umfang, notwendig zum Schritt der Theoriebildung gehören.

Mathematische Schülerexperimente

Bei einem mathematischen Schülerexperiment interagieren die Schüler mit einer außermathematischen Realität im Sinne einer wechselseitigen Beeinflussung zum Zwecke der Erkenntnisgewinnung. Damit geht das Experiment über die Verwendung von Modellen zur Veranschaulichung hinaus.

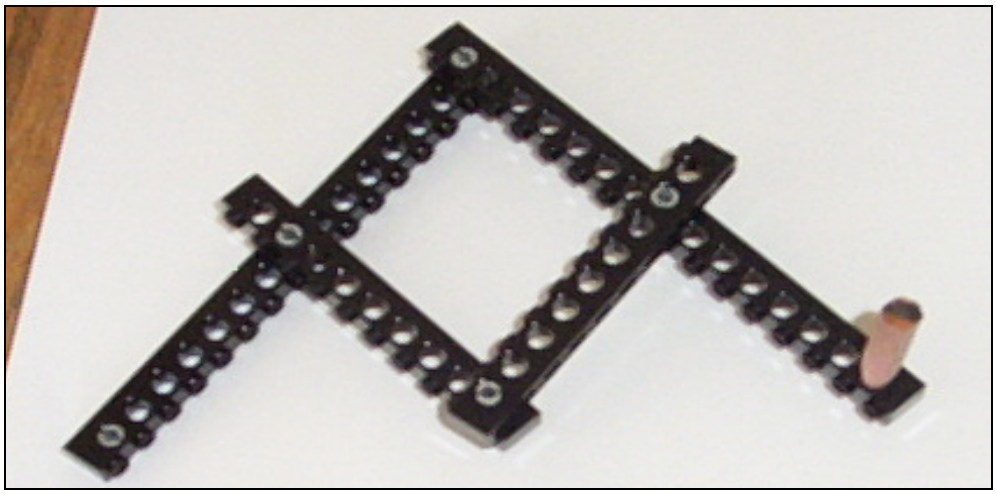
Die Experimente können im Unterricht verschiedene Prozesse anregen:

- Modellbildung (z.B. Abkühlung einer Kaffeetasse)
- Argumentation (z.B. Spiegelsymmetrie)
- Begriffsbildung (z.B. Riemer-Würfel)
- Problemlösung (z.B. Flächen auswiegen, Schwerpunkt finden)

Beim Modellieren schließt das Experiment den Modellbildungskreislauf, indem es unmittelbare Rückmeldung aus der Realität liefert. Gestaltungsspielraum und Kompetenzerleben sind der Lohn auf Schülerseite. Dies kann zu einer wiederholten Durchlaufung des Modellbildungskreislaufes führen.

Beispiel: Als Material wird gegeben ein PC mit geeigneter Software, die Terme in Schalldruckpegel umsetzt. Mit einer vom Autor entwickelten MuPAD-Erweiterung erklingt nach Eingabe des Befehls *PlayFunction(0.4*sin(440*2*PI*t,t=0..1)* ein mäßig lauter Sinuston von 440Hz. Ziel des Experimentes ist z.B. einen heulenden Sirenenton zu erzeugen.

Beispiel: Pantographenmodelle können z.B. aus Lego-technic schnell und preiswert hergestellt werden. An diesen Pantographen können Schüler argumentieren und modellieren. Die Lernsituation ist dabei reichhaltiger als bei der Arbeit mit einem mit einem Dynamischen Geometrie-System realisierten Pantographen, weil dort stets eine spezielle Modellierung zugrunde gelegt werden muss. Man kann am DGS-Pantographen anders als am realen Objekt eben nur an einem bestimmten Punkt ziehen. Auch der Auftrag an die Schüler, andere Streckfaktoren zu realisieren, setzt ganz andere – nämlich durch die Software erzwungene – Operationsfolgen in gang.

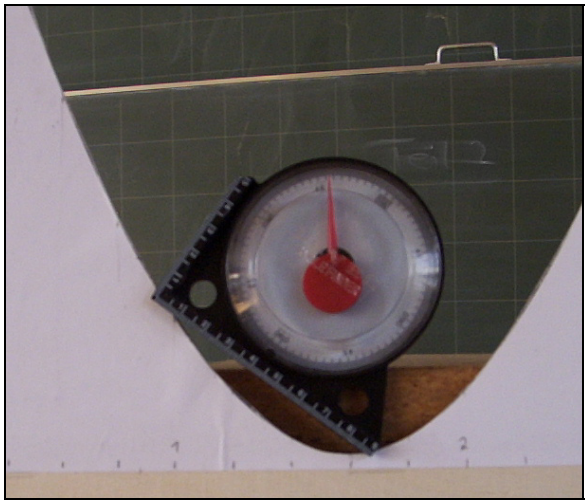


Mathematische Schülerexperimente zur Ableitung

Erstaunlicherweise ist es oft gerade bei sehr abstrakten Themen möglich, mit mathematischen Schülerexperimenten Lernprozesse anzuregen. Im Analysisunterricht stellen die Sekanten- und Tangentensteigung, b.z.w. die mittlere und die momentane Änderungsrate ein problematisches Gebiet dar. Oft bilden Schüler nur unzureichende Grundvorstellungen aus (Malle 2003). Nach einem eigenen Unterrichtsversuch kann dem erfolgreich entgegengewirkt werden, indem die Theorieentwicklung sich im Einklang mit experimenteller Erfahrung entwickelt. Dazu hatten die Schüler und Schülerinnen einer elften Klasse Gelegenheit, in einer selbst gesteuerten Lernphase mit einer Reihe von Experimenten zu arbeiten. Neben bereits öfter in der Literatur beschriebenen Experimenten wie dem Normalenspiegel und der Vermessung von Bewegungen mit einem Ultraschallsensor, kamen dabei auch neue Versuchsideen zum Einsatz. Mit im Fachhandel preiswert angebotenen Steigungsmessern kann an Funktionsgraphen aus Holz die Steigung gemessen werden. Dabei kann der Steigungsmesser entweder mit seiner kurzen oder seiner langen Seite aufgesetzt werden, so dass entweder die Steigung einer kurzen b.z.w. einer langen Sekanten bestimmt wird. An konvexen Teilen des Graphen liegt er tangential an, und es ergibt sich so-

fort aus der Situation, dass es zwischen der Steigung der Sekanten und der der Tangenten eine Beziehung geben muss.

Bei einem anderen Experiment ist ein Funktionsgraph als krumme Wand auf einer waagrechten Platte aufgebaut. An der Wand rollt eine Murmel entlang. Ab dem Ende der Führungswand bewegt sie sich geradlinig. Um vorherzusagen, wo die Murmel letztlich auftreffen wird, müssen die Schüler die Idee der linearen Approximation der (Führungs-)Kurve durch ihre Tangente entwickeln und zu ihrer Berechnung einen geeigneten Differenzenquotienten finden.



In der Einheit haben die Schüler eine Vielzahl von Varianten des Differenzialquotienten gefunden. Mehrere Schüler kamen selbst auf die Idee, den Term des Differenzenquotienten für immer kleinere Δx zu untersuchen.

Eine wichtige Beobachtung war, dass viele Schüler, die bei einem Experiment zunächst kein (für sie) befriedigendes Ergebnis erzielen konnten, zu diesem Experiment zurück gekehrt sind, nachdem sie an anderer Stelle weiter gekommen waren. Der Unterricht muss also so organisiert sein, dass die Schüler möglichst langfristig auf die Versuche zugreifen können.

Literatur

W. Blum: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion, Mathematische Semesterberichte (1985)
M. Ludwig, R. Oldenburg: „mathematik lehren“-Themenheft „Mathematische Schülerexperimente“, erscheint 2007.
G. Malle.: Vorstellungen vom Differenzenquotienten fördern. mathematik lehren 118, 2003, S. 57-62.

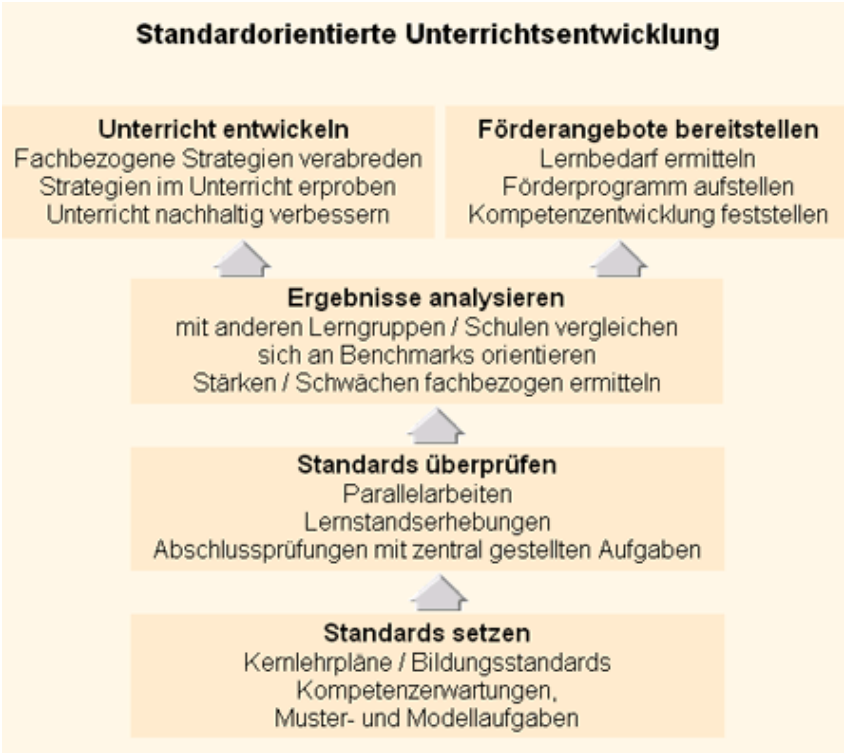
Andreas PALLACK, Soest

Zentrale Mathematikprüfungen in NRW

In Nordrhein-Westfalen finden im Jahr 2007 erstmals zentrale Abschlussprüfungen zum Ende der Sekundarstufe I (prüfungen.10) und der Sekundarstufe II (abitur.nrw) statt. In diesem Beitrag wird über den Stand der Vorbereitungen berichtet. Besonders berücksichtigt werden dabei Beispielaufgaben, welche die Anforderungen der Prüfungen konkretisieren.

Natürlich können im Rahmen dieses Beitrags lediglich kleine Ausschnitte aus den Vorgaben und den Beispielaufgaben vorgestellt werden. Weitere und auch aktuellere Informationen können unter http://www.learnline.de bzw. http://www.msw.nrw.de eingesehen und abgerufen werden.

Einbettung zentraler Mathematikprüfungen in das System der standardorientierten Unterrichtsenwicklung



Grundlage der Standardsicherung und –überprüfung sind die gültigen Kernlehrpläne (für die Sekundarstufe I) bzw. Lehrpläne (Primarstufe und Sekundarstufe II). Sie sind die Referenzsysteme für Unterrichtsvorgaben und die Entwicklung von Beispiel- bzw. Prüfungsaufgaben. Auch andere Maßnahmen der Standardsicherung (z.B. Lernstandserhebungen in der Grundschule (Vera), der Sekundarstufe I (Lernstand 9, vgl. u.a. Pallack, A.

et al (2005)) oder der Sekundarstufe II (Vergleichsarbeiten 11)) basieren auf diesen Referenzsystemen.

Eine zentrale Aufgabe der Schulen ist es, die Ergebnisse dieser Maßnahmen mit Blick auf die eigene Schule zu analysieren und zur Unterrichtsentwicklung vor Ort zu nutzen. Das trifft (leicht eingeschränkt) auch auf zentrale Mathematikprüfungen zu.

Unterrichtsvorgaben und Beispiele prüfungen.10

Aufgrund des nordrhein-westfälischen Schulsystems werden sechs Typen von Prüfungsarbeiten entwickelt, für die es auch jeweils separate Vorgaben gibt. Unter diesen Vorgaben finden sich zwei unterschiedliche *Typen von Vorgaben*: Hauptschulabschluss nach Klasse 10 (betrifft Hauptschule Typ A und Grundkurse der Gesamtschule) und mittlerer Bildungsabschluss (betrifft Hauptschule Typ B, Erweiterungskurse der Gesamtschule, Realschulen und Gymnasien). Zwischen den verschiedenen Schulen wird anhand der Prüfungsaufgaben nochmals differenziert.

Die Prüfung selbst ist in zwei Teile gegliedert: Fundamentum und Additum. Im Fundamentum werden *Basiskompetenzen* überprüft. Gemeint sind die Kompetenzen, die für einen angemessenen Umgang mit Maßeinheiten im Alltag sowie für das Anwendungen und Betreiben von Mathematik eine besondere Rolle spielen. Hier abgebildet ist eine Auswahl von Beispielaufgaben aus einem Fundamentum (Hauptschule Typ A):

Aufgabe 1 (Fundamentum)

a) In eine Getränkekiste passen 12 Flaschen Wasser.
Wie viele Kisten benötigt man mindestens, um 100 Flaschen zu transportieren?
Notiere deine Rechnung.

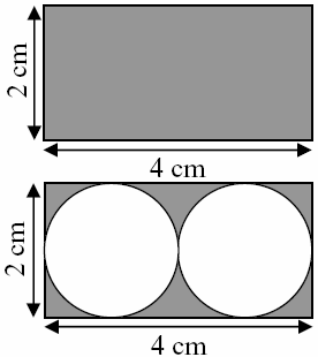
---

b)

b1) Bestimme den Flächeninhalt des abgebildeten Rechtecks.

b2) Aus dem Rechteck werden zwei gleich große Kreise ausgeschnitten (wie in der Abbildung).

Berechne den Flächeninhalt der grauen Fläche, die übrig bleibt.



Die Vorgaben für das Additum werden in Form einer Kompetenzmatrix beschrieben. Vorgestellt werden hier Lerngelegenheiten, die allen Schülerinnen und Schülern ermöglicht werden sollten (Hier gezeigt ist ein Ausschnitt aus den Vorgaben für das Gymnasium):

	Arithmetik / Algebra	Funktionen	Geometrie	Stochastik
Argumentieren / Kommunizieren	Erläuterung mathematischer Zusammenhänge mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen beim Umgang mit linearen oder quadratischen Gleichungen	- Analyse und Bewertung funktionaler Zusammenhänge in authentischen Texten (z. B. Zeitungstexte oder Gebrauchsanweisungen) - Interpretation von grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge		Analyse von grafischen Darstellungen statistischer Daten und deren Manipulation (z. B. aus Zeitungsartikeln)
Problemlösen			Bestimmung unbekannter Größen durch Zerlegen von Figuren, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras oder mit Hilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen	
Modellieren		Erstellung, Nutzung und Interpretation von Modellen aus den Bereichen: - Tarife - Weg-Zeit-Zusammenhänge[1] - Wachstumsprozesse (linear oder exponentiell) - Prozent-, Zins- und Zinseszinsrechnung (z. B. Preisreduktion, Spar- und Kreditmodelle)		- Bestimmung von elementaren Wahrscheinlichkeiten für ein- und zweistufige Zufallsexperimente - Nutzung von Baumdiagrammen und Pfadregeln zur Beurteilung von Chancen und Risiken
Werkzeuge	Verwendung des Taschenrechners (z. B. kritische Reflexion von Ergebnissen)		Nutzung verfügbarer Werkzeuge zur Bearbeitung geometrischer Situationen (z. B. Nutzung von Zirkel und Geodreieck)	

Auch diese Vorgaben werden mithilfe von Beispielaufgaben konkretisiert. Wir zeigen hier einen Ausschnitt aus dem Beispielaufgabensatz für das Gymnasium:

Ein DIN A4-Blatt (21 cm breit und 29,7 cm lang) soll so an den kurzen Seiten zusammengeklebt werden, dass eine Rolle entsteht (s. Skizze). Der Kleberand beträgt 7 mm.

a) Bestimme anhand dieser Angaben den Umfang der so entstandenen Papierrolle.

b) Wie kann man bei einem Kreis mit bekanntem Umfang den Radius bestimmen? Erläutere mit Hilfe eines Beispiels.

c) Der Radius des oben gezeigten Zylinders beträgt 4,62 cm. Hat der entstandene Zylinder ein Volumen von mehr als einem Liter? Notiere deine Rechnung.

d) Handwerker benutzen zur Kreisumfangberechnung oft die folgende Faustformel:

„Kreisumfang gleich Durchmesser mal 3 plus 5 Prozent“

d1) Berechne den Umfang der obigen Papierrolle ($r \approx$ 4,62 cm) mithilfe der Faustformel.

d2) Berechne den Näherungswert für π, der bei dieser Faustformel verwendet wird.

e) Welche Bruchzahl $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ hat die geringste Differenz zu π ? Begründe deine Entscheidung.

Vorgaben und Beispielaufgaben abitur.nrw

Bereits im Jahr 2005 wurden die Vorgaben für das Abitur mit zentral gestellten Aufgaben 2007 veröffentlicht. Die Vorgaben nehmen Bezug auf die Lehrpläne und stellen darüber hinaus einen Stoffkatalog zur Verfügung, der den Schulen zusätzliche Orientierung geben soll.

Bei den Prüfungsaufgaben wird unterschieden zwischen Aufgaben für Grund- und Leistungskurse. Zusätzlich gibt es eine Unterscheidung bezüglich der zugelassenen Hilfsmittel, so dass bei den jeweiligen Kursen nochmals zwischen Prüfungsaufgaben mit und ohne CAS-Nutzung differenziert wird. Da die Lehrpläne bei der Unterrichtsgestaltung einige Freiräume lassen, kann die Lehrkraft aus Sätzen von Aufgaben die Prüfungsarbeit für den eigenen Kurs zusammenstellen. Die hohe Komplexität der Auswahlmöglichkeiten und die Vielfalt von Beispielaufgaben kann an dieser Stelle nicht hinreichend differenziert dargestellt werden, weswegen ich nochmals auf die zu Beginn genannten Internetadressen hinweisen möchte.

Entwicklung von Prüfungsaufgaben in prüfungen.10 und abitur.nrw

Die Prüfungsaufgaben für prüfungen.10 werden von einer Gruppe im Landesinstitut für Schule/Qualitätsagentur NRW entwickelt. Die Gruppe besteht aus Lehrerinnen und Lehrern aller Schulformen und wird von Vertretern der Schulaufsicht begleitet. Geleitet wird sie von Fachreferenten des Landesinstituts für Schule/Qualitätsagentur.

Die Aufgaben für abitur.nrw werden ebenfalls von einem Team erfahrener Lehrerinnen und Lehrer zusammengestellt. Wesentliche Grundlage sind jedoch – im Gegensatz zu prüfungen.10 – Aufgaben, die von Kolleginnen und Kollegen nordrhein-westfälischer Schulen entwickelt wurden.

Gläserne Werkstätten im Internet

Das Land Nordrhein-Westfalen stellt Vorgaben und Beispielaufgaben meist in *gläsernen Werkstätten* zur Diskussion. Das bedeutet, dass vor dem Inkrafttreten von Neuerungen Rückmeldungen von Schulen und anderen Interessenverbänden eingeholt und bei der endgültigen Überarbeitung berücksichtigt werden. Die hier vorgestellten Beispielaufgaben für prüfungen.10 befinden sich zurzeit (03/2006) in einer solchen gläsernen Werkstatt. Es ist also damit zu rechnen, dass zum Zeitpunkt des Erscheinens dieses Tagungsbandes überarbeitete Beispielaufgaben vorliegen.

Literatur

Pallack, A., Dobbelstein, P und Peek, R. (2005). Zentrale Lernstandserhebungen in Nordrhein-Westfalen, in: Der Mathematisch Naturwissenschaftliche Unterricht (58), S. 496-503.

Bernold PICKER, Köln

Von Osnabrück bis PISA - 40 Jahre Mathematikdidaktik in Deutschland

PISA hat uns alle geschockt. Wir hatten ja in den letzten 40 Jahren Reformen übergenug. Wie konnte es dazu kommen?-

1. Mathematikhistorische Aspekte

1.1. Osnabrück 1967 und die historischen Hintergründe

Im Jahre 1964 wurde in der Bundesrepublik Deutschland die Hauptschule eingeführt. Dies war der Anlaß zur 1. Tagung für Didaktik der Mathematik, zu der Ursula VIET im April 1967 nach Osnabrück einlud.
Das Besondere damals war das Eröffnungsreferat. Heinrich BAUERSFELD erklärte: „Ich spreche ***nicht*** über den Mathematikunterricht in der Hauptschule, sondern über den der Grundschule."
Das war der Beginn der später so genannten „Neuen Mathematik". Die Impulse kamen aus den USA und Kanada: Illinois (BEBERMAN), Yale (BEGLE), Woods Hole (BRUNER) und Sherbrooke (DIENES). Das Erscheinen des sowjetischen „Sputnik" beschleunigte die Entwicklung.

1.2.PIAGETs Theorie und ihre Umsetzung

Der zentrale Begriff der PIAGETschen Psychologie ist der Begriff der „Operation". Dieser hat einen Entwicklungsaspekt und einen strukturell-logischen Aspekt**.** Der erste beruht darauf, daß PIAGET von Haus aus Biologe ist, der zweite darauf, daß er die Mathematik für die am höchsten entwickelte Form des menschlichen Denkens hält.
Die „Neue Mathematik" stützte sich neben der Psychologie PIAGETs auf die Ideen von BOURBAKI: Sie suchte die Verbindung mit dem tradierten Rechnen. Es wurden Schulversuche in Frankfurt, Freiburg und Köln durchgeführt. Alle hatten einen ***pränumerischen*** Vorkurs.
Der KMK-Beschluss vom 03.10.1968 machte die Neue Mathematik vom Schuljahr 1972/73 an verpflichtend. Die Kinder und Lehrer in den Versuchsklassen waren begeistert. Das Gros der Lehrer und die Eltern waren dagegen.

1.3. Der Streit um die Einführung der natürlichen Zahlen

1970 stehen sich zwei Standpunkte einander gegenüber: 1. der „Konstruktivismus" nach Luitzen BROUWER und Paul LORENZEN in Erlangen, vertreten durch Rüdiger INHETVEEN und Erich WITTMANN, 2. der „Logizismus" nach Gottlob FREGE und Georg CANTOR, vertreten

durch Walter NEUNZIG und Bernold PICKER. Die ersteren wollen die natürlichen Zahlen mit Hilfe von ***Strichlisten*** einführen, die letzteren mit Hilfe von ***Mengen***.
Bald nach seiner Berufung von Erlangen nach Dortmund ist WITTMANN zu Forschungszwecken in Genf. 1972 gelingt ihm eine konsistente Formalisierung des Begriffs der Gruppierung. 1974 formuliert er das „operative Prinzip".
1977 unterscheiden G. MÜLLER und E. WITTMANN in „Der Mathematikunterricht in der Primarstufe" ***acht*** verschiedeneZahlaspekte.

1.4. Das erweiterte Programm der Neuen Mathematik

1972 in Kiel zeigt Bernold PICKER: „Die Neue Mathematik fördert das bewegliche Denken". Heinrich WINTER legt „Den Nutzen der Mengenlehre für den Arithmetikunterricht" dar. 1973 formuliert er die Lernziele „Argumentieren, kreatives Verhalten, Mathematisieren".
Im gleichen Jahr erscheint von Morris KLINE: „Why Johnny Can't Add. The Failure of the New Math". Aber BAUERSFELD und NEUNZIG können für ihre Klassen beweisen: Die Rechenfertigkeit der Kinder hat ***nicht*** gelitten.
1974 kann PICKER darüber hinaus auf Grund empirischer Untersuchungen belegen: Die Neue Mathematik fördert: 1.die sprachlogischen Fähigkeiten, 2. die Fähigkeit zur Analogiebildung und 3. das problem-orientierte kreative Denken. WINTER weist auf die „Steigerung der arithmetischen Fähigkeiten im neuen Mathematikunterricht" hin.
1976 hält WINTER hält seinen epochemachenden Vortrag über „Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule".

2. Schulpolitische Aspekte

2.1.Die 50er und 60er Jahre

In den 50er Jahren hatten die Pädagogischen Hochschulen ***200 Studierende***, 1960 ***300***. Dann kamen die „Wirtschaftswunderkinder. 1963 hat Köln schon ***1200 Studierende,*** 1966 ***1700.*** Die Gründung der Hochschule Neuss und die „Erfindung der Mikätzchen" schaffen etwas Erleichterung. ***Programmierter Unterricht*** soll helfen, Lehrer zu sparen, dazu Realschulabsolventen als Fachlehrer für Kunst, Musik und Werken.

2.2. Veränderungen in der Lehrerausbildung und Schulstruktur

1968 wird die Volksschule in Grund- und Hauptschule geteilt, 1969 in Nordrhein-Westfalen die Gesamtschule eingeführt, 1974 der Stufenlehrer für die Primarstufe und die Sekundarstufe I und II. Auch für die

Grundschullehrer gilt jetzt das Zwei-Fächer-Studium. Der ***Anteil der Absolventen mit dem Fach Mathematik sinkt auf 15 %***. Alle werden eingestellt!
Erst 1981 wird durch ein neues Lehrerausbildungsgesetz versucht, den Unterricht in Deutsch und Mathematik in der Grundschule wieder sicherzustellen. Aber da herrscht - bedingt durch den Geburtenrückgang nach 1968, der fast 50 % beträgt - Lehrerüberfluß. Die neuen Lehrer werden nicht eingestellt. Die Zwei-Fach-Lehrer blockieren die Planstellen.

2.3. Probleme der 70er Jahre

1972/73 war die Neue Mathematik verpflichtend eingeführt worden. 1974 wurde das Buch „Why Johnny Can‘t Add“ ins Deutsche übersetzt. Auch in Deutschland gibt es nun mit der Umsetzung der Reform Schwierigkeiten. Die Ärzte erklären: „Mengenlehre macht die Kinder krank.“
Köln hat 1974 ***3200 Studierende*** für das Lehramt (neben 900 Diplomanden). Es herrscht ***Lehrermangel***. Die Lehrer im Dienst können nicht zur Fortbildung beurlaubt werden. Die Zwei-Fächer-Ausbildung führt dazu, daß ***80 % der Junglehrer der Primarstufe Mathematik fachfremd unterrichten.***

2.4. Probleme der 80er und 90er Jahre

1981 gehören in Nordrhein-Westfalen Deutsch und Mathematik wieder zum Pflichtkanon der Ausbildung der Primarstufenlehrer. Da sie aber nicht eingestellt werden können, muß man noch 1995 feststellen: ***70 % der jetzt tätigen Grundschullehrer haben Deutsch oder Mathematik abgewählt.***
Die Folge ist: Die 1967 mit Begeisterung begonnene Reform des Mathematikunterrichts konnte nur ungenügend umgesetzt werden.

3. Pädagogische Aspekte

3.1. Der Paradigmenwechsel

1968 entdeckt man „unter den Talaren den Muff von 1000 Jahren“. Ein Neubeginn scheint nötig. Neben verschiedenen positiven Tendenzen setzt sich aber in weiten Bereichen die verheerende neomarxistische „Kritische Theorie“ der Frankfurter Schule durch.
Vor allem unter dem Einfluß von Herbert MARCUSE kommt es zu einem ***Paradigmenwechsel*** in der Pädagogik: Weite Teile der Pädagogenschaft wollen ihr Fach nicht mehr als geisteswissenschaftliche und hermeneutische Disziplin verstehen. Sie suchen Anschluß an die Kritische Theorie.
Aus „Pädagogik“ wird „Erziehungswissenschaft“: Erziehung ist jetzt nur

noch Sozialisation: eine Strategie, die Kinder an die gegebenen gesellschaftlichen Verhältnisse anzupassen.

3.2. Die Rechtfertigung von Gewalt

MARCUSE hat 1973 ein „Naturrecht“ auf Widerstand proklamiert. Störungen von Hochschulveranstaltungen, Hausbesetzungen, Beschädigung von Hochschuleigentum, Diebstahl und Gewaltanwendung gegen Andersdenkende sind die Folge. Bis heute zeigen beschmierte Wände, zerstörte Straßenlampen, Gewalt auf Schulhöfen und Erpressung unter Schülern das Fortwirken dieser Geisteshaltung.

3.3. Die Verteufelung der Leistung und die Etablierung des Lustprinzips

1976 fordert MARCUSE eine „Revolte gegen das Leistungsprinzip im Namen des Lustprinzips“. Die Entfremdungstheorie führt in der Pädagogik zum Lernziel „Arbeit ist ekelhaft“. Motivation und Anstrengungsbereitschaft werden desavouiert.
Siegbert SCHMIDT weist damals darauf hin, daß Interessen, Haltungen und Wertschätzungen das Lernen bestimmen, z. B. setzt das Argumentieren-***Können*** das Argumentieren-***Wollen*** voraus.
Auch auf die Schulpolitik legt sich der „geistige Nebel“ der Kritischen Theorie: 1972 wird die ***„Differenzierte Mittelstufe“*** eingeführt. Sie dünnt den naturwissenschaftlichen Unterricht um 20 % aus. 1973 erfolgt die ***„Oberstufenreform“***. Sie erlaubt sogar Deutsch, Mathematik und die zweite Fremdsprache abzuwählen. 1975 wird die ***5-Tage-Woche*** eingeführt.

3.4.Die Auflösung der Moral

Nach MARKUSE sind moralische Normen willkürliche gesellschaftliche Festlegungen. 1970 erklären die SPD-Kultusminister: „Schule hat nicht zu erziehen, sondern nur Wissen zu vermitteln.“ Die „Kopfnoten“ für Betragen, Fleiß und Beteiligung am Unterricht werden abgeschafft.
Ehe- und Sexualmoral lösen sich auf. Die Familienstrukturen erodieren. Die Folge: Dem eminenten Bedürfnis von Kindern und Jugendlichen nach Sicherheit, Verläßlichkeit, Zuwendung und Anerkennung wird der Boden entzogen.

Bedenkt man dies alles, dann werden die PISA-Ergebnisse verständlicher.

Literatur beim Autor: b.picker@gmx.de

Guido PINKERNELL, Lingen

„Mehrwertaufgaben“ - Kleine, weittragende Unterrichtsideen für den Rechnereinsatz

Der Einsatz eines CAS oder GTR ist mittlerweile vielerorts verpflichtend. Das teure Gerät wird aber von manchen Lehrenden immer noch als einfacher Rechenknecht eingesetzt, der sich so gesehen von einem handelsüblichen Taschenrechner nicht wesentlich unterscheidet. Warum also diese technische Aufrüstung? „Mehrwertaufgaben“ können vielleicht überzeugen: Kleine Unterrichtsideen, die ohne Aufwand die besonderen Möglichkeiten eines CAS oder GTR nutzen und dabei eine tragfähige Grundlage für zu erlernende Methoden und Begriffe bilden können.

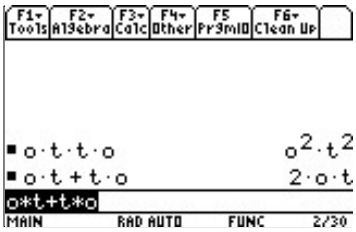
Im Folgenden werden eine Reihe von Aufgabenideen vorgestellt, deren methodische Feinplanung dem Leser überlassen wird.

1 Rechnen mit Termen

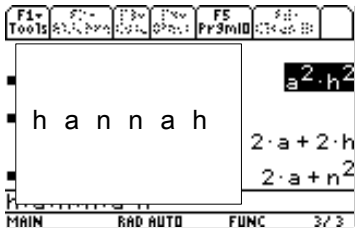
Dass ein CAS hierzu einiges bieten kann ist naheliegend. Aber auch eine einfache Tabellenkalkulation kann genutzt werden, um die Erstbegegnung mit der Algebra sinnvoll zu gestalten.

1.1 „Mach' den Otto zur Null“

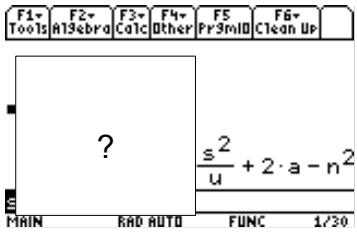
Viele dürften gleich nach Aushändigung der neuen CAS-Rechner ihre Schüler dabei beobachtet haben, wie sie die alphanumerische Eingabe dazu benutzen ihre Namen oder andere Texte in das Gerät zu schreiben. Diese Neugier auf die Möglichkeiten des Rechners lässt sich für ein exploratives Erkunden der Blackbox „CAS“ nutzen:



1. Gib deinen eigenen Namen ein.
2. Finde einen Eingabeterm, bei dem sich besonders viel ändert.



3. Wie lautet der Eingabeterm?
4. Kann man aus „Hannah“ auch eine 0, 1 oder 2 erzeugen?



5. Wie lautet der Name?
6. Erfinde eigene Rätsel.
7. Formuliere Regeln, nach denen der Rechner umformt.

Erst die siebte Frage thematisiert Termumformungsregeln. Dass die Systematisierung erst spät erfolgt, ist als eines der wesentlichen Prinzipien der „Blackbox-Aufgabe“ seit langem hinreichend bekannt: Mittels Trial-and-Error-Strategien wird ein Gefühl für die verborgenen Regeln und

Gesetze entwickelt, die erst nach dem Bewußtmachen der intuitiv erarbeiteten Zusammenhänge formuliert werden (Meissner 1979).

1.2 Rechenmauern

Beim „Otto“ gehorchen die Regeln, nach denen die Buchstabenterme umgeformt werden, den bekannten arithmetischen Rechengesetzen. Dass jeder Buchstabe aber für eine Zahl steht ist bei diesem Ansatz zunächst nicht im Vordergrund. Das ist bei der folgenden Aufgabe anders. Es handelt sich hier um eine Umsetzung des bekannten Aufgabenformats „Zahlenmauer“ in einer Tabellenkalkulation und ist daher auf verschiedenen Handhelds sowie PCs realisierbar. Dabei sind die Verknüpfungen zwischen den „Mauersteinen“ in Form von Zellbezügen flexibel definierbar, wie das folgende Beispiel zeigt.

SO1	A	B	C
1	1	1	2
2	2	3	
3	7		
4			
5			
6			

A3: =A2+B2+C1 Menu

1. Gebe Zahlen in den Eingabezellen A1, B1 und C1 so ein, dass in Ausgabezelle A3 eine 10 erscheint.
2. Beschreibe, wie die Ausgabezelle mit den Eingabezellen zusammenhängt.
3. Finde eine Formel für A3 in Abhängigkeit von A1, B1 und C1.
4. Programmiere eigene Rechenmauern.

Das Rechnen mit Variablen stellt sich hier dar als ein Rechnen mit Zelleinträgen. Die Zellnamen sind die Zahlvariablen, und sie werden beim Ausprobieren auch als solche wahrgenommen: B1 steht für jede Zahl, die ich in das gleichnamige Feld eingeben kann. Außerdem: Dass die Zellbezüge sichtbar sind (siehe Abbildung: A3:= A2+B2+C1) ermöglicht neben intuitiven Analysen einer Rechenmauer auch algebraische, z.B. mittels Einsetzungsverfahren.

2 Zielwerfen

In den 70er Jahren des vergangenen Jahrhunderts wurde schon einmal die Verwendung neuer Technologien in den Schulen diskutiert. Damals war es der Taschenrechner, und auch damals wurden Aufgabenideen vorgeschlagen, die unseren „Mehrwertaufgaben“ für CAS und GTR sehr ähnlich sind. Als Beispiel sei hier das „Zielwerfen“ beschrieben, das von Meissner (1979) für den Arithmetikunterricht der Grundschule entwickelt wurde. Es kann als Grundlage für die Formulierung von Aufgaben auch für CAS und GTR dienen:

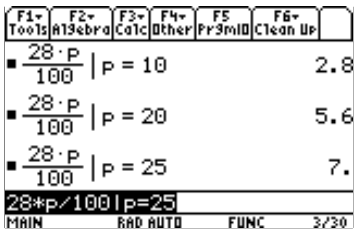
Viele Taschenrechner erlauben bei zweimaliger Eingabe der Additionstaste (auch Multiplikationstaste etc.) die Programmierung eines versteckten Operators, z. B. die Tastenfolge 7 + + weist der = -Taste den Operator „+ 7“ zu. Jeder Schüler bekommt einen solchermaßen präparierten Taschenrechner (oder programmiert selbst einen solchen für den Banknachbarn)

und soll herausfinden, welche „Rechnung“ sich hinter der = -Taste verbirgt. Das geschieht im Anfangsunterricht natürlich durch Ausprobieren, so dass sich ein Gefühl für Größenverhältnisse von Zahlen entwickelt.

Für uns ist beim Zielwerfen dabei folgendes bemerkenswert: Nicht die exakte Berechnung der Lösung ist Zweck der Aufgabe, sondern ihre Näherung durch sinnvolles Schätzen. Dabei gibt ein falscher Schätzwert Hinweise für eine Verbesserung der Aufgabe.

2.1 Anteile schätzen

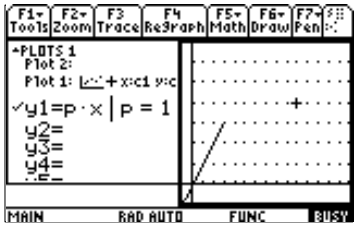
Eine einfache Variation des Zielwerfens im Rahmen der Prozentrechnung könnte so aussehen. Der Lehrer stellt die folgende Aufgabe: „6 von 28 Schülern der Klasse haben schon einmal geraucht. Wie viel Prozent sind das etwa?“



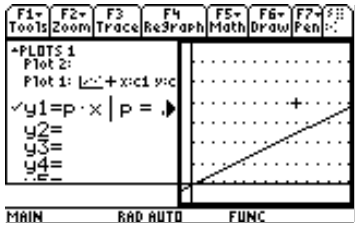
Schätzwerte werden vom Lehrer in den Rechner eingegeben, dessen Eingabefenster mittels Projektion für die Klasse einsichtig ist. 10% ist offensichtlich zu klein, 20% besser, und 25% etwas zu hoch. Wie beim Zielwerfen ist hier die exakte Lösung nicht gefragt, sondern ein guter Schätzwert. Der Rechner insbesondere liefert nicht die Lösung, sondern wird so eingesetzt, dass er Hinweise für eine Verbesserung des Schätzwerts gibt.

2.2 Kanonenschießen

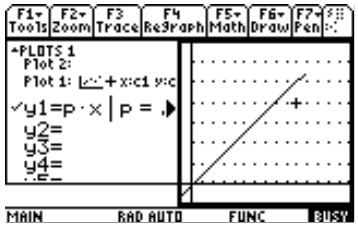
Nach demselben Prinzip funktioniert das „Kanonenschießen“. Es kann im Rahmen einer Einführung in lineare Graphen eingesetzt werden. Der Graph einer proportionalen Funktion wird hier als die Flugbahn eines Geschosses interpretiert, deren Kanone im Ursprung des Koordinatensystems platziert ist. Ein Kreuz (erzeugt durch den Plot eines Datenpunktes) markiert das Ziel. Auf Zuruf modifiziert der Lehrer den Parameter p im Funktionsterm, mittels dessen – wie den Schülern bald klar wird – die Flugbahn des Geschosses gesteuert werden kann.



p=1



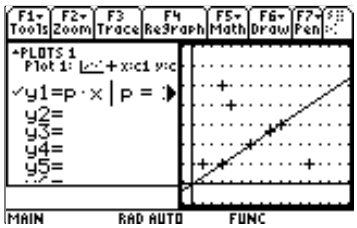
p=0,25



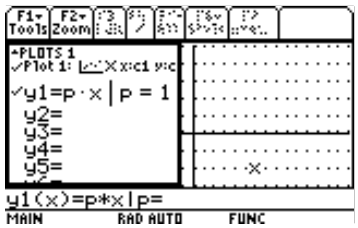
p=0,5

Offensichtlich liefert auch hier der Rechner Hinweise auf eine Verbesserung der anfänglich noch unsicheren Schätzwerte. Bald wird auch der Zusammenhang zwischen einem passenden p und den Zielpunktkoordinaten deutlich. Die sind den Schülern bekannt, wenn sie vom Lehrer – auf dem Display von den Schülern beobachtbar – bei jedem Durchgang neu eingibt.

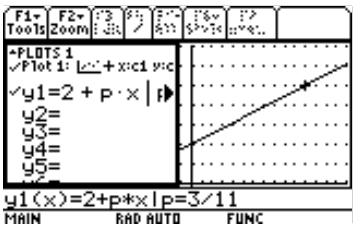
Weitere Variationen sind möglich:



Was haben alle getroffenen Zielkoordinaten gemeinsam?



Fallen heißt „negativ steigen“.



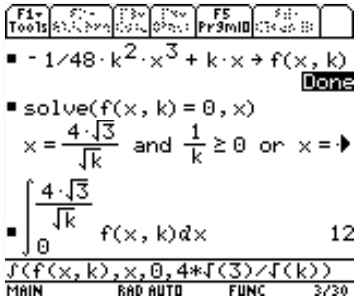
p ist nicht mehr unmittelbar als y/x berechenbar.

3 Rechnerprotokolle

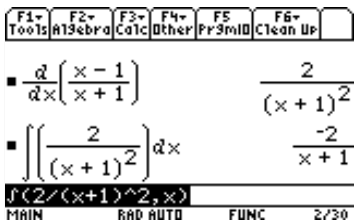
Die rechts abgebildeten Aufgaben sind entstanden nach dem Prinzip der Aufgabenumkehrung: Die Rechnungen sind erfolgt – wie lautet eine passende Aufgabenformulierung? Beim CAS und GTR können diese Aufgaben noch ein zusätzliches Ziel erfüllen, nämlich das der Anfertigung einer angemessenen Dokumentation. Wird dem Schüler ein fertiges Rechnerprotokoll vorgelegt, so soll ihm deutlich werden, dass zusätzliche Erklärungen notwendig sind. Es reicht zum Nachvollzug einer Aufgabenbearbeitung eben nicht, die Rechnereingaben wie (oft beobachtet) abzuschreiben und mit einem Antwortsatz abzuschließen.

```
25000*5/100
                    1250
1250/360*150
          520.8333333
25000+520.83
               25520.83
```

Formuliere eine Aufgabe.
(Idee: R. Berding)



Schreibe eine nachvollziehbare Dokumentation der Lösung.



Kommentiere!
(Idee S. Stachniss-Carp)

```
(-2)^3
                    -8
-2^3
                    -8
(-2)^4
                    16
-2^4
                   -16
```

Kommentiere!

4 „Kommentiere!“

Die Schüler sind mit einem Begriff oder einer Regel vertraut gemacht worden. Man darf im Idealfall erwarten, dass sie wesentliche Eigenschaften wiedererkennen, auch wenn sie nicht explizit auf den Sachverhalt aufmerksam gemacht werden. Der Rechner ist ein Reservoir mathematischer Begriffe und Regeln. Werden diese gezielt abgerufen, dann kann die Aufgabenstellung kurz ausfallen (siehe rechts).

Literatur

Meissner, Hartwig (1979): Das operative Prinzip als Einbahnstraße, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 271-274

Renate RASCH, Landau

Frühes operatives Denken beim Bearbeiten von Textaufgaben

In den Klassenstufen 1 und 2 erwerben Lernende grundlegendes Wissen: Die Zahlbegriffe werden erarbeitet, die ersten Zahlenräume erschlossen, Verständnis für die Grundrechenoperationen wird vermittelt und auf wichtige Rechenstrategien aufmerksam gemacht. Eigentlich scheint damit die Zeit für mathematisches Lernen im Anfangsunterricht mehr als ausgefüllt. Und doch gibt es Bereiche, die nicht intensiv genug angesprochen werden und deren Potenzial für mathematische Bildung nicht ausreichend genutzt wird. Dazu gehören m. E. geometrische Inhalte und das Sachrechnen (Stern 2005; Rasch 2001, 2003; Winter 1992).

Gründe für das Projekt

Textaufgaben bzw. Sachaufgaben, wie sie in der Grundschule genannt werden, bezieht man in der Regel im Zusammenhang mit den Rechenoperationen, die gerade betrachtet werden bzw. wurden, in den Mathematikunterricht ein. Eher selten begegnen den Erst- und Zweitklässlern Textaufgaben mit ungewohnten operativen Anforderungen. So wird das Sachrechnen für die Lernenden zu einer weiteren Form des Rechnens – einer Form, die durch die Einbettung mathematischer Beziehungen in Text erschwert wird. Textaufgaben können jedoch darüber hinaus zu mathematischer Auseinandersetzung mit sonst beim Rechnen weniger im Mittelpunkt stehenden Zahlbeziehungen führen und auf solche Zusammenhänge schon frühzeitig aufmerksam machen. Untersuchungen wiesen mehrfach darauf hin, dass das Sachrechnen fast ausschließlich, die durch das Rechnen ohnehin trainierten Beziehungen wieder aufgreift und andere Beziehungen, z. B. solche, die sich aus Vergleichssituationen ergeben, vernachlässigt (Stern 2005).
Auf dem dargestellten Hintergrund ergeben sich folgende Fragestellungen:

- Welche operativen Anforderungen können Grundschulkinder zu verschiedenen Zeitpunkten in Textaufgaben bewältigen?
- Welche Anforderungen bewältigen sie (noch) nicht bzw. mit Hilfsmitteln?
- Können Arbeitsmittel lösungsunterstützend eingesetzt werden?

Die Textaufgaben

Zu Beginn der Klassenstufe 1 (3./4. Schulwoche) bearbeiteten Erstklässler im Rahmen von Einzelinterviews jeweils die folgenden Textaufgaben:

1) Franz und Anna spielen mit kleinen Autos. Franz hat 2 und Anna hat 6. Wie viele haben sie zusammen?

2) Aus dem Märchen von den 7 Geißlein: Als der Wolf kommt, versteckt sich das kleinste Geißlein im Uhrenkasten, die anderen holt der Wolf. Wie viele Geißlein hat er gefunden?
3) Aufräumen, sagt Mutti – alles wieder dahin, wo es war. Wo sind die Würfel? 6 waren es, jetzt sind nur noch 2 in der Schachtel. Die restlichen finde ich unter dem Bett. Wie viele lagen dort?
4) Jan und Paula bauen mit Legosteinen. Jan steckt 5 Steine zusammen. Paula baut mit 7 Steinen. Wie viele Bausteine hat Paula mehr?
5) Teilen fällt nicht immer leicht. Ich esse gern Schokolade. 8 Schokoladenriegel soll ich mit meiner Schwester teilen. Wie viele muss ich abgeben (wenn es gerecht sein soll)?
6) Beim Spiel „Mensch ärgere dich nicht“ hat Vera zweimal hintereinander eine 6 gewürfelt. Um wie viele Felder konnte sie vorrücken (wenn alle Spielsteine schon eingesetzt waren)?
7) Heute hatte ich Glück. Ich habe drei Münzen gefunden: 2 Cent, 1 Cent und 5 Cent. Wie viele Cent habe ich gefunden?
8) Kaffeetrinken bei den 7 Zwergen hinter den 7 Bergen: Jeder Zwerg isst zwei Stücken Kuchen. Wie viele Kuchenstücke wurden gegessen?

Als besonders anspruchsvoll erwiesen sich die Aufgaben 4, 7 und 8. Die Aufgabe 4, bei der die Differenz zwischen zwei Vergleichsmengen zu ermitteln war und die Aufgabe 7, bei der Anzahl und Wert miteinander in Beziehung gesetzt werden mussten, waren bei den Schulanfängern noch mit Verstehensdefiziten verbunden. Die Aufgabe 8 war von der Sachsituation her den Schülern gut verständlich; das Problem bestand hier darin, eine Verknüpfung zu erschließen, durch die sich die geschilderte Situation abbilden ließ.
Die acht Aufgaben, die in Klassenstufe 2 zum Halbjahr eingesetzt wurden, waren ähnlich. Dort wurden teilweise größere Zahlen verwendet und anstelle der Aufgabe 6 wurde eine Vergleichsaufgabe einbezogen, bei der beide Vergleichsmengen zu bestimmen waren (s. unten). Die operativen Anforderungen in den Aufgaben 4, 7 und 8 stellten im Halbjahr der Klassenstufe 2 schon keine besondere Schwierigkeit mehr dar. Multiplikative Beziehungen und solche des Teilens wurden allerdings in der Regel noch auf die einfacheren, vertrauten Operationen Addition und Subtraktion zurückgeführt.

Lösungsprozesse und Schlussfolgerungen

Schon in Klasse 1 konnte man beobachten, wie wichtig für operative Überlegungen das Nutzen verschiedener Repräsentationsebenen (gedankliche und handelnde Ebene) und der Wechsel zwischen diesen ist. An dem Vor-

gehen von Alex beim Bearbeiten der Aufgabe 8 soll dies verdeutlicht werden:
Alex (6 Jahre) antwortete nach dem Hören der Aufgabe fragend „2?“. Der Sachverhalt wurde noch einmal vorgetragen. Er überlegte kurz und zählte dann an den Fingern bis 7, zählte weiter, brach aber die Zählaktivitäten ab. Er überlegte wieder und nahm die Stäbchen. In diesem Moment hatte er scheinbar schon ein fertiges Konzept vor Augen: Zielgerichtet legte er am unteren Blattrand 7 Stäbchen für die Zwerge und packte für jeden Zwerg darüber zunächst eins und darüber jeweils noch ein Stäbchen. Er zählte anschließend die oberen beiden Stäbchenreihen aus und vergewisserte sich erstaunt „14?“. Bei Alex fiel auf, dass er schon während des Interviews die Beweglichkeit, mit der er die Arbeitsmittel nutzte, erhöhen konnte.

Die schriftliche Ebene wurde mit dem Auftrag „Notiere deine Lösungszahl.“ angeregt. Bei den *Zweitklässlern* konnte diese schon deutlich umfangreicher genutzt werden, indem die Schüler auch ihre Rechenüberlegungen notierten. Das Vorgehen der Kinder machte darauf aufmerksam, dass sie sich (bei Vorhandensein eines Grundverständnisses für die Situation) sofort auf die Rechenaktivitäten konzentrierten und im Kopf und teilweise unter Zuhilfenahme des Materials eine Lösungszahl ermittelten. Wir bekräftigten diese Reihenfolge, ließen also erst das Ergebnis und dann die Rechenüberlegungen notieren. Ein Zweitklässler betonte, dass Letzteres schwierig sei. Wenn man verfolgt, wie intensiv die Lösung hergeleitet wurde (teilweise über mehrere noch sehr bewusst ausgeführte Rechenschritte), kann man gut nachvollziehen, dass das Ableiten einer Rechenaufgabe für Zweitklässler schon eine recht hohe Abstraktionsleistung ist. Bei der Aufgabe zum Teilen *(Ich esse gern Schokolade. 26 Schokoladenriegel soll ich mit meiner Schwester teilen. Wie viele muss ich abgeben, wenn es gerecht sein soll?*) stellte ein Schüler seine Überlegungen folgendermaßen dar: „Ich habe mit der 10 begonnen, denn unter 10 kann’s ja nicht sein, 10 und 10 ist 20, dann 11 und 11 ist 22, 12 und 12 ist 24 und 13 plus 13 ist 26.“ Er notierte nach längerem Überlegen die Aufgabe ‚26-13=13’.

In Klasse 2 regte nur die Vergleichsaufgabe auch leistungsstarke Kinder zu bewusstem operativen Denken an und ließ auch diese Schülergruppe zu Material greifen:
Max und Vera haben zusammen 10 Sammelbilder. Max hat 4 mehr als Vera. Wie viele Sammelbilder hat Max, wie viele hat Vera?
Ein Teil der Kinder äußerte sofort nach dem Hören der Aufgabe „Die ist zu schwer.“ Andere waren erstaunt, dass mit solch kleinen Zahlen eine wirklich knifflige Aufgabe entstehen kann. Anspruch im Mathematikunterricht war für die Kinder bisher nur mit „schweren Rechenaufgaben (mit großen

Zahlen)“ verbunden. Bei der Vergleichsaufgabe griff auch *Valentin* (8 Jahre), der zuvor alle anderen Textaufgaben schnell und sicher im Kopf bearbeiten konnte, zu Arbeitsmitteln. Zunächst versuchte er es jedoch ohne Material:

V: Er hat 14. (I für Interviewerin, V für Valentin)
I: Die haben aber zusammen 10 – mehr haben sie nicht.
V: 9 und 5.
I: 9 und 5 ist schon nicht schlecht, denn da sind 4 Unterschied. Das hast du schon gut gemacht. Aber die haben ja nur 10 und bei deiner Rechnung jetzt, 9 und 5, da hätten sie ja 14.
V: (überlegt)
I: Willst du dir die Klötzchen nehmen?
V: (Zählt 10 Klötzchen ab und legt sie in eine Reihe. Schaut eine Weile darauf.) Der Max hat 7.
I: (Bestätigt seine Antwort.)
V: (Nimmt den Stift und notiert ‚7 und 3’.)
I: Kannst du mir erklären, warum das so sein muss?
V: Weil 3 plus 3 ist gleich 6 und dann hat der Max auch 3, dann bleiben noch 4 übrig, dann 4 plus 3 ist gleich 7.

Valentin machte deutlich, dass das Gefühl für Zahlbeziehungen und die Flexibilität beim Aneinanderreihen von Rechenschritten wichtige Komponenten für anspruchsvolles operatives Denken sind. Andere Schüler zeigten, dass diesbezügliche Defizite teilweise mit Arbeitsmitteln (bzw. mit Zähltechniken) ausgeglichen werden können. Das Nutzen von Material kann darüber hinaus den Arbeitsspeicher entlasten. Lösungsstrategien, die Lernende im Anfangsunterricht mit Arbeitsmaterial entdecken, können evtl. später skizzenhaft oder durch weitere schriftliche Repräsentationsformen zur Lösungsunterstützung herangezogen werden. Diese lösungsbegleitenden Arbeitsweisen sind mit Lernprozessen verbunden, zu denen Mathematikunterricht in der Grundschule anregen sollte.

Literatur

Rasch, R. (2003): 42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren. Seelze: Kallmeyer.
Rasch, R. (2001): Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Hildesheim: Franzbecker.
Stern, Elsbeth (2005): Kognitive Entwicklungspsychologie des mathematischen Denkens. In: v. Aster, M/J. H. Lorenz (Hrsg.).Rechenstörungen bei Kindern. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Winter, H. (1992). Zur grundsätzlichen Problematik des Sachrechnens. Sachunterricht und Mathematikunterricht in der Primarstufe, 20, 8, 350-369.

Sebastian REZAT, Gießen

Mathematikschulbücher – Struktur und Nutzungsmöglichkeiten

Aus einer soziokulturellen Perspektive sind die Artefakte, die im Zusammenhang mit dem Lehren und Lernen von Mathematik verwendet werden, von besonderem Interesse. Ein Artefakt, dessen Bedeutung für das Lehren und Lernen von Mathematik vielfach betont wird, ist das Mathematikschulbuch (vgl. Chambliss & Calfee 1998; Glatfeld 1981; Hacker 1980; Keitel *et al.* 1980; Love & Pimm 1996; Newton 1990; Stodolsky 1989; Sträßer 1979; Valverde *et al.* 2002). Aus einer soziokulturellen Perspektive geht es nicht darum, das Schulbuch isoliert zu betrachten und zu analysieren. Vielmehr ist von Interesse, wie das Schulbuch in die Systeme von Tätigkeiten wie z. B. ‚Unterrichten von Mathematik' und ‚Lernen von Mathematik' integriert ist. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Modalität des Artefakts Einfluss auf seine Verwendung hat und damit u. a. auch die Tätigkeitssysteme strukturiert, in die es integriert ist (Rabardel 2002, S. 128ff).

Vor diesem Hintergrund soll in diesem Beitrag die Struktur der Lerneinheiten von 7 Mathematikschulbüchern für die Sek. I und 5 Mathematikschulbüchern für die Sek. II aus den Jahren 2001 bis 2004[1] analysiert werden, um anhand der Ergebnisse Hypothesen über mögliche Verwendungsweisen aufzustellen.

Die Struktur der Lerneinheiten von Mathematikschulbüchern

Auf der Ebene der Lerneinheiten werden in Mathematikschulbüchern verschiedene Strukturelemente unterschieden. Für die Untersuchung der Strukturelemente in Mathematikschulbüchern wurden die Erläuterungen der Struktur des Buches zugrunde gelegt, die sich am Anfang der meisten deutschen Mathematikschulbücher für die Sek. I und II befinden[2]. Wenn in den jeweiligen Lehrerhandbüchern ergänzende Beschreibungen der Strukturelemente gefunden werden konnte, wurde auch diese hinzugezogen.

Anhand der Kriterien ‚inhaltliche, sprachliche, visuelle Merkmale', ‚Funktionen', ‚erwartete Handlungen' und ‚Verwendungszusammenhänge', las-

[1] Aus Platzgründen konnte diesem Beitrag keine Liste der untersuchten Bücher beigefügt werden. Die Liste wird auf Nachfrage an sebastian.rezat@math.uni-giessen.de aber gerne zur Verfügung gestellt.

[2] Eine Ausnahme stellen hier die Mathematikschulbücher für die Hauptschule dar, in denen die Beschreibung der Struktur des Buches so rudimentär ist, dass sie bei dieser Untersuchung vernachlässigt werden mussten.

sen sich die Strukturelemente, die in den untersuchten Schulbüchern unterschieden werden, vergleichen. Dieser Vergleich der Strukturelemente zeigt einerseits, dass sich hinter der Vielfalt von Bezeichnungen, die verschiedene Schulbücher für die einzelnen Strukturelemente wählen, jeweils analoge Strukturelemente verbergen. Darüber hinaus lässt sich erkennen, dass die Anordnung der einzelnen Strukturelemente in den verschiedenen Mathematikschulbüchern nahezu identisch ist. Die Strukturen der Lerneinheiten von deutschen Mathematikschulbüchern für die Realschule und das Gymnasium sind weitestgehend kongruent. Mit Ausnahme von *Mathematik Real* (Cornelsen 2004) fangen die Lerneinheiten in allen untersuchten Schulbüchern mit Aufgaben oder Arbeitsaufträgen an und enden mit Übungsaufgaben. Ebenso enthalten die Lerneinheiten in allen Schulbüchern ein Musterbeispiel und eine optisch hervorgehobene Zusammenfassung der wesentlichen Inhalte. Die Reihenfolge von Zusammenfassung und Musterbeispiel kann dabei alternieren. Die einzige Ausnahme stellt das Buch *Mathematik Analysis* (Cornelsen 2001) dar, in dem neben Lösungen zu ausgewählten Einstiegsaufgaben keine Musterlösungen für die Übungsaufgaben gegeben werden. In *Elemente der Mathematik 8* (Schroedel 2004) sind Musterbeispiele nicht ein fixes Element innerhalb der Struktur der Lerneinheiten, sondern flexibel als Hinweise zu Aufgaben oder Regeln in die Mikrostruktur integriert.

Neben den vier Strukturelementen ‚Einstiegsaufgaben', ‚Musterbeispiel', ‚Zusammenfassung' und ‚Übungen', die das Grundgerüst einer Lerneinheit bilden, enthalten manche Schulbücher noch Informationstexte und weitere, in die Struktur integrierte Aufgaben. *Mathematik plus* (Volk und Wissen 2001) fügt unter der Überschrift „Aufgaben zur Wiederholung" (Mathematik plus, Volk und Wissen 2001, Vorsatz) kapitelübergreifende Aufgaben in die Mikrostruktur ein.

Vergleicht man die Funktionen der Strukturelemente von Lerneinheiten deutscher Mathematikschulbücher mit den Funktionen der „formalen Stufen des Unterrichts" (Rein *et al.* 1903, S. 124) der Herbartianer Rein, Pickel und Scheller, zeigen sich auffallende Parallelen. Die Parallelen bestehen sowohl in den Funktionen der Strukturelemente der Lerneinheiten und den Funktionen von einzelnen Stufen des Stufenmodells der Herbartianer als auch in der Abfolge der Funktionen innerhalb einer Lerneinheit und der Abfolge der Funktionen des Stufenmodells der Herbartianer. Diese Analogien zeigen, dass sich in der Struktur der Lerneinheiten von Mathematikschulbüchern Stufen- und Phasenschemata widerspiegeln. Dabei ist die Frage, welches Stufen- oder Phasenschema den Lerneinheiten zugrunde

liegt, nicht entscheidend. Entscheidend ist, dass sich die Struktur der Lerneinheiten offenbar an Stufen- und Phasenmodelle des Unterrichts anlehnt.

Allerdings ist zu bedenken, dass Stufen- und Phasenschemata Modellierungen von Prozessen sind: Rein, Pickel und Scheller (1903) leiten aus dem „regelrechte[n] Verlauf des Lernprozesses […] Art und Gang der Lehrtätigkeit“ (Rein *et al.* 1903, S. 124) ab. Hilbert Meyer verallgemeinert: „Stufen- und Phasenschemata sind theoretisch begründete Modellierungen des Bildungs- bzw. Lernprozesses“ (Meyer 1987, S. 158).

Ein Prozess ist ein zeitlicher Vorgang. Der Modalität des Artefakts ‚Buch’ ist jedoch inhärent, dass die Inhalte eines Buches simultan repräsentiert sind. Das bedeutet, die Phasen des Prozesses, die zeitlich voneinander getrennt sind, sind im Buch gleichzeitig zugänglich. Die zeitliche Dimension des Prozesses ist im Buch in eine räumliche Anordnung übertragen. Auch wenn durch das Lesen die räumliche Repräsentation in eine zeitliche zurückübersetzt wird, ermöglicht die simultane Repräsentation der Inhalte dem Leser, innerhalb des Buches zu springen und damit die Linearität des Prozesses zu durchbrechen. Durch die Übertragung der zeitlichen Dimension des Unterrichtsprozesses in die räumliche Dimension sind die Lerneinheiten in Schulbüchern ‚gefrorener Unterricht’.

Konsequenzen für die Nutzung – ein Beispiel

Welche Konsequenzen sich daraus ergeben, dass die Struktur der Lerneinheiten als ‚gefrorener Unterricht’ zu betrachten ist, soll am Beispiel der Einstiegsaufgaben und der Zusammenfassung erläutert werden.

Die Einstiegsaufgaben, die dazu dienen sollen, an ein Thema heranzuführen und die Zusammenfassung, die die Ergebnisse der Erarbeitung enthält, sind im Schulbuch simultan abgebildet. Durch diese Simultanrepräsentation wird die Aufmerksamkeit des Lesers von den Einstiegsaufgaben direkt auf die optisch hervorgehobene Zusammenfassung gelenkt. Love und Pimm beschreiben das daraus resultierende typische Schülerverhalten: „Unsurprisingly, students are often impatient with the exposition and skip to the ‘essential’ results“ (Love & Pimm 1996, S. 387).

Die Folge ist entweder, dass die Schüler die Einstiegsaufgaben mit Hilfe der Zusammenfassung bearbeiten, deren Inhalt das in den Einstiegsaufgaben erarbeitete ist. D. h. die intendierte Nutzung einzelner Strukturelemente entspricht nicht unbedingt der Nutzung, die sich aus dem gleichzeitigen Nebeneinander mehrerer Strukturelemente ergibt.

Oder der Lehrer kann nur Einstiegsaufgaben aus Büchern verwenden, die den Schülern nicht zur Verfügung stehen. Denn Hacker beschreibt, dass die

Methode, die Einstiegsaufgaben aus dem eingeführten Buch zwar zu verwenden, das Buch dabei aber nicht aufzuschlagen, wenig erfolgsversprechend ist: „Zudem sind zuweilen solche in Büchern abgedruckte [sic!] Merksätze dem Lehrer ein Ärgernis, da fixe Schüler sie sehr schnell dort herausholen und sich damit die gedankliche Erarbeitung ersparen“ (Hacker 1980, S. 26).

Schlussfolgerung

Die Gestaltung von Lerneinheiten im Mathematikschulbuch in Anlehnung an Stufen- und Phasenmodelle des Unterrichts erweist sich als problematisch. Es zeigt sich, dass die Simultanrepräsentation im Buch dazu führen kann, dass sich Funktionen von Strukturelementen gegenseitig beeinträchtigen können. Die Nutzung der Strukturelemente der Lerneinheiten entspricht daher nicht immer der intendierten Nutzung.

Literatur

Chambliss, M. J. & Calfee, R. C. [1998]: Textbooks for Learning - Nurturing Children's Minds. Malden: Blackwell.

Glatfeld, M. (Hg.) [1981]: Das Schulbuch im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Vieweg.

Hacker, H. [1980]: Didaktische Funktionen des Mediums Schulbuch. In: H. Hacker (Hg.): Das Schulbuch. Funktion und Verwendung im Unterricht. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Keitel, C.; Otte, M. & Seeger, F. [1980]: Text Wissen Tätigkeit. Königstein: Scriptor.

Love, E. & Pimm, D. [1996]: 'This is so': a text on texts. In: A. J. Bishop; K. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick & C. Laborde (Hg.): International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer.

Meyer, H. [1987]: Unterrichtsmethoden. Frankfurt a. M.: Cornelsen Scriptor.

Newton, D. P. [1990]: Teaching with Text. Choosing, Preparing and Using Textual Materials for Instruction. London: Kogan Page.

Rabardel, P. [2002]: People and Technology: a cognitive aproach to contemporary instruments. Abgerufen am 28.07.2005 von http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/ShowArticle.asp?NumArt=99&Act_Group=1 http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/ShowArticle.asp?NumArt=100&Act_Group=1.

Rein, W.; Pickel, A. & Scheller, E. [1903]: Theorie und Praxis des Volksschulunterrichts nach Herbartischen Grundsätzen. Das erste Schuljahr. Leipzig: Verlag von Heinrich Bredt.

Stodolsky, S. S. [1989]: Is Teaching Really by the Book? In: P. W. Jackson & Haroutunian-Gordon (Hg.): From Socrates to Software: The Teacher as Text and the Text as Teacher. Chicago: University of Chicago Press.

Sträßer, R. [1979]: Schülerbücher. In: D. Volk (Hg.): Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht. München: Fink.

Valverde, G. A.; Bianchi, L. J.; Wolfe, R. G.; Schmidt, W. H. & Houang, R. T. [2002]: According to the Book - Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Dordrecht: Kluwer.

Bettina RÖSKEN & Katrin ROLKA, Duisburg
Peter LILJEDAHL, Vancouver, Kanada

Veränderung mathematischer Beliefs – Dokumentation in Lerntagebüchern

Die Bedeutung von Beliefs wird in der Literatur als ein einflussreicher Parameter für das Lehren und Lernen von Mathematik diskutiert (Leder, Pehkonen & Törner, 2002). Der Fokus dieser Arbeit liegt in der Veränderung mathematischer Beliefs von Lehramtsstudierenden. Durch ihre eigenen Erfahrungen als Mathematiklernende haben diese bereits vielfältige Beliefs über Mathematik sowie das Lehren und Lernen von Mathematik entwickelt (Ball, 1988; Feiman-Nemser et al., 1987). Diese Beliefs bilden das Fundament für die zukünftige Praxis als Mathematiklehrende (Skott, 2001). Eine Aufgabe der Lehrerausbildung muss demzufolge nach Green (1971) darin liegen, inadäquate Bilder über Mathematik zu verändern. In dieser Studie wird anhand von Lerntagebüchern dokumentiert, in welcher Weise sich die Beliefs kanadischer *Preservice Elementary School Teachers* durch die Teilnahme an einem mathematikdidaktischen Kurs verändert haben.

Mathematische Beliefs

Beliefs können als ein Konstrukt bestehend aus verschiedenen Komponenten charakterisiert werden (Dionne, 1984; Ernest, 1991). Grigutsch, Raatz und Törner (1997) greifen diese Ansätze auf und differenzieren nach Werkzeug-, System-, Prozess- und Anwendungsaspekt. Im Werkzeugaspekt wird Mathematik als eine Ansammlung von Regeln, Formeln und Prozeduren verstanden. Mit dem Systemaspekt wird Mathematik durch logische Strenge, exakte Definitionen und eine präzise mathematische Sprache beschrieben. Der Prozessaspekt hingegen betont die konstruktiven und kreativen Prozesse bei der Auseinandersetzung mit Mathematik. Im Anwendungsaspekt wird die Nützlichkeit der Mathematik herausgestellt.

Veränderung mathematischer Beliefs bei Lehrenden

Einmal erworbene Beliefs gelten als stabil und schwierig zu verändern, wie Schommer-Aikins (2004) nachfolgend ausführt: „They are like old clothes; once acquired and worn for awhile, they become comfortable. It does not make any difference if the clothes are out of style or ragged. Letting go is painful and new clothes require adjustment" (S. 22). Dennoch gibt es verschiedene Ansätze, die darauf ausgerichtet sind, mathematische Beliefs zu verändern. Feiman-Nemser et al. (1987) beispielsweise fordern Beliefs von Lehramtsstudierenden heraus, um *unbewusste* Beliefs *bewusst* zu machen.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, zukünftige Lehrende als Mathematiklernende in eine konstruktivistische Lernumgebung einzubinden (Ball, 1988; Liljedahl, 2005).

Lerntagebücher

Seit einiger Zeit wird der Einsatz von Lerntagebüchern in der Mathematikdidaktik diskutiert (Chapman, 1996; Dougherty, 1996). Lerntagebücher begleiten den mathematischen Lernprozess und bieten ein effizientes Mittel, diesen zu reflektieren (Mewborn, 1999). Darüber hinaus haben sich Lerntagebücher als geeignete Methode zur Erhebung mathematischer Beliefs erwiesen, selbst wenn nach diesen nicht explizit gefragt wurde (Koirala, 2002; Liljedahl, 2005).

Methodologie

Im Rahmen dieser Studie nahmen 39 kanadische *Preservice Elementary School Teachers* an dem Kurs *Designs for Learning Elementary Mathematics* teil, der vom dritten Autor durchgeführt wurde. Während des Kurses erhielten die Teilnehmenden die Möglichkeit, sich über herausfordernde Aufgaben aktiv mit Mathematik auseinanderzusetzen. Ihren Lernprozess dokumentierten sie in Lerntagebüchern und reflektierten hierbei insbesondere ihre Beliefs über Mathematik sowie das Lehren und Lernen von Mathematik, jeweils zu Beginn und Ende des Kurses. Diese Einträge wurden von den Autoren unabhängig voneinander anhand der oben angeführten Beliefskategorien kodiert. Zur Verdeutlichung der Kodierung werden im Folgenden zwei Beispiele gegeben:

- Werkzeugaspekt (Beliefs über Mathematik): „My first impression is that math is numbers, quantities, units. In math there is always one right answer. […] Math is about [...] memorizing formulas that yield the right answer“.
- Prozessaspekt (Beliefs über das Lehren und Lernen von Mathematik): „I think to teach mathematics you need to let the thinking be put in your students' hands. You need to give them ownership of ideas and let them feel safe and free within the classroom“.

Ergebnisse

Wie die folgenden Diagramme dokumentieren hatte der Kurs einen starken Einfluss auf die Beliefs der Teilnehmenden. Für die Beliefs über Mathematik ergibt sich die nachstehende Verteilung:

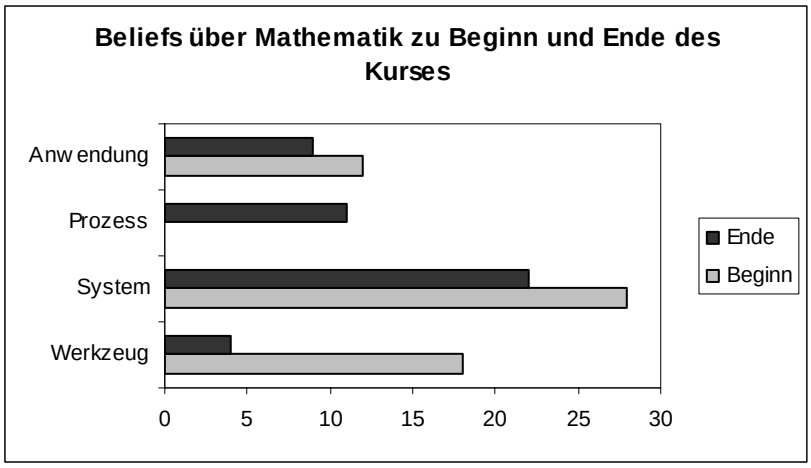


Diagramm 1

Zu Beginn des Kurses dominiert der Systemaspekt, gefolgt vom Werkzeug- und Anwendungsaspekt. Die auffälligste Veränderung besteht darin, in welchem Ausmaß der Prozessaspekt am Ende des Kurses an Bedeutung gewonnen hat.

Für die Beliefs über das Lehren und Lernen von Mathematik ergibt sich die nachstehende Verteilung:

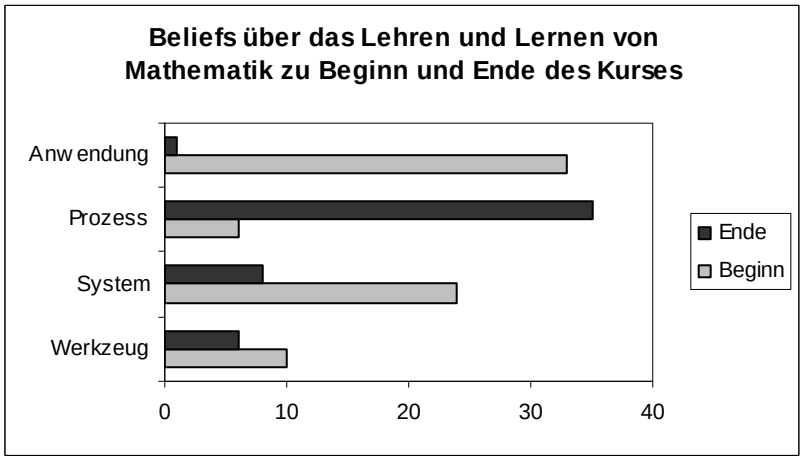


Diagramm 2

Diagramm 2 zeigt eine noch stärkere Veränderung in Richtung des Prozessaspektes für die Beliefs über das Lehren und Lernen von Mathematik.

Reflexion

Die Daten belegen in beeindruckender Weise den Einfluss des Kurses auf die mathematischen Beliefs der Teilnehmenden. Durch ihre Erfahrung während des Kurses gelangen die meisten Teilnehmenden zu einer veränderten Sicht auf Mathematik sowie das Lehren und Lernen von Mathema-

tik. Es stellt sich allerdings auch die Frage, wie nachhaltig diese Veränderungen sind. Hierzu formuliert eine Teilnehmerin treffend: „I must remember not to revert back to what is familiar to me, that is, what I grew up with“.

Literatur

Ball, D. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 40-48.

Chapman, K. (1996). Journals: Pathways to thinking in second-year algebra. *The Mathematics Teacher, 89*(7), 588-590.

Dionne, J. J. (1984). The perception of mathematics among elementary school teachers. In J. M. Moser (Ed.), *Proceedings of 6thConference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 223-228). Madison (WI): University of Wisconsin: PME-NA.

Dougherty, B. (1996). The write way: A look at journal writing in first-year algebra. *The Mathematics Teacher, 89*(7), 556-560.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Hampshire, UK: The Falmer Press.

Feiman-Nemser, S., McDiarmid, G., Melnick, S., & Parker, M. (1987). *Changing beginning teachers' conceptions: A description of an introductory teacher education course*. Paper presented at American Educational Research Association, Washington, DC.

Green, T. (1971). *The activities of teaching*. New York, NY: McGraw-Hill.

Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1997). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik, 19*(1), 3-45.

Koirala, H. (2002). Facilitating student learning through math journals. In A. D. Cockburn & E. Nardi (eds.). *Proceedings of the 26th International Conference for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 217-224). Norwich, United Kingdom.

Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Liljedahl, P. (2005). AHA!: The effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2-3), 219-236.

Mewborn, D. (1999). Reflective thingking among preservice elementary mathematics teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(3), 316-341.

Schommer-Aikins, M. (2004). Explaining the epistemological belief system: Introducing the embedded systemic model and coordinated research approach. *Educational Psychologist, 39*(1), 19-29.

Skott, J. (2001). The emerging practices of novice teachers: The roles of his school mathematics images. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(1), 3-28.

Katrin ROLKA, Duisburg & Stefan HALVERSCHEID, Bremen

Die Mathematik im Bild – Zeichnungen zur Erforschung mathematischer Weltbilder

1. Einleitung

Die Bedeutung mathematischer Weltbilder wird in der Literatur als ein einflussreicher Parameter für das Lehren und Lernen von Mathematik diskutiert (Leder, Pehkonen & Törner, 2002; Schoenfeld, 1992). Es hat sich durchgesetzt, mathematische Weltbilder mit Hilfe von Fragebögen zu erheben. In unserer Studie hingegen wurden Bilder, Texte und Interviews verwendet, um mathematische Weltbilder von Schülerinnen und Schülern zu erfassen. Diese Daten wurden in Beziehung zu bereits existierenden Theorien über mathematische Weltbilder gesetzt.

2. Mathematische Weltbilder

Mathematische Weltbilder bezeichnen vereinfacht gesprochen verschiedene Sichtweisen auf Mathematik (Dionne, 1984; Ernest, 1989; 1991). Ernest (1989; 1991) etabliert die drei Sichtweisen *instrumentalist view*, *Platonist view* und *problem-solving view*. Im Folgenden wird zusammengefasst, was Ernest unter den jeweiligen Sichtweisen versteht:

- *Instrumentalist view*: Hierbei wird Mathematik als eine nützliche, aber unverbundene Ansammlung von Fakten, Formeln und Prozeduren angesehen.
- *Platonist view*: Hier ist Mathematik als ein statisches System von Wissen gekennzeichnet, in dem allerdings verbindende Strukturen eine wichtige Rolle spielen.
- *Problem-solving view*: Hier wird Mathematik als ein dynamisches und lebendiges Forschungsfeld verstanden, das sich ständig weiter entwickelt. Bei dieser Sicht auf Mathematik wird kreativen und konstruktiven Prozessen eine besondere Bedeutung beigemessen.

3. Methodologie

In Anlehnung an Bulmer und Rolka (2005) erhielten die Schülerinnen und Schüler zunächst ein DIN-A4-Blatt mit folgender Aufgabenstellung:

> *Stelle dir vor, du bist Künstler/in oder Schriftsteller/in und sollst auf diesem Blatt zeigen, was für dich Mathematik ist!*

Die Bearbeitungsdauer für diese Aufgabe betrug 1 Woche. Nach Anfertigung ihres Werkes wurde den Schülerinnen und Schülern ein weiteres DIN-A4-Blatt mit folgendem Arbeitsauftrag gegeben:

Erläutere dein Werk, indem du folgende Fragen beantwortest:

- *Wie zeigt sich Mathematik in deinem Werk?*
- *Warum hast du diese Art der Darstellung gewählt?*
- *Gibt es etwas, was du gern gezeigt hättest, aber nicht ausdrücken konntest?*

Der Bearbeitungszeitraum für diese Aufgabe betrug 5 Tage. Währenddessen kodierten die beiden Autoren unter Verwendung der oben angeführten mathematischen Sichtweisen unabhängig voneinander zunächst die Bilder. Nach Bearbeitung der 2. Aufgabe wurden die von den Schülerinnen und Schülern verfassten Texte ebenfalls zur Kodierung hinzu gezogen. Falls die Klassifikation der Bilder und Texte den Autoren immer noch schwierig erschien, wurden in einigen Fällen zusätzlich Interviews durchgeführt.

Die beiden Aufgaben wurden 84 Schülerinnen und Schülern aus den Jahrgangsstufen 5, 9 und 11 gestellt, wobei in 61 Fällen Bilder und Texte angefertigt wurden. Für diesen Artikel beschränken wir uns auf die 28 Fünftklässler, von denen 26 ein Bild einreichten. Diese Schülerinnen und Schüler weisen überaus interessante und individuelle Lerngeschichten auf, da sie aus 21 verschiedenen Grundschulen stammen.

4. Ergebnisse

Bei der Kodierung allein der Bilder konnten 11 Bilder zugeordnet werden, mit Hilfe der Texte zusätzlich 8 und die Interviews ermöglichten die Klassifikation weiterer 5 Bilder, so dass insgesamt 24 der 26 eingereichten Bilder klassifiziert werden konnten. Dies verdeutlicht, dass die Berücksichtigung vielfältiger Datenquellen die empirische Basis der Kodierung erheblich verbessert.

Im Folgenden werden jeweils typische, den Bildern und Texten innewohnende Merkmale beschrieben, die den Ausschlag für die Einordnung der Werke in die entsprechende Sichtweise gegeben haben.

4.1 Instrumentalist view (14 von 26)

Hier wurden Schülerinnen und Schüler eingeordnet, in deren Werke Mathematik mit Hilfe von unverbundenen Objekten dargestellt wurde. Weiterhin wurden weder mathematische Aussagen getroffen noch ist eine dynamische Komponente von Mathematik ersichtlich. Darüber hinaus wird von einigen Schülerinnen und Schülern die Nützlichkeit von Mathematik im täglichen Leben erwähnt.

4.2 Platonist view (5 von 26)

Hier wurden Schülerinnen und Schüler eingeordnet, die in ihren Werken mathematische Objekte bzw. Gebiete repräsentieren und Zusammenhänge zwischen einzelnen Aspekten darstellen. Auch in diesen Werken wird weder eine dynamische Sicht auf Mathematik deutlich, noch sind eigene mathematische Aktivitäten erkennbar. Häufig werden in diesen Werken mathematische Tätigkeiten an Autoritäten und Figuren der Mathematikgeschichte verankert, indem etwa auf Einstein verwiesen wird.

4.3 Problem-solving view (5 von 26)

Hier wurden Schülerinnen und Schüler eingeordnet, in deren Werke beispielsweise Objekte skizziert sind, die als Ausgangspunkt für mathematische Tätigkeiten genutzt werden. Das unten stehende Bild sowie der zugehörige Text stellen ein Beispiel dar, die Sichtweise des *problem-solving view* auszudrücken. Eine andere Herangehensweise bedient sich in den untersuchten Bildern animistischer Darstellungen von Zahlen, die sich zusammentun und Aufgaben bilden.

Der Schüler, 11, schreibt: „Ich wollte in diesem Bild verschiedene Brüche darstellen wie zum Beispiel $\frac{7}{9}$ bei dem Geodreieck oder $\frac{9}{10}$ bei der Schere. Wenn man sich Brüche nämlich nicht ganz vorstellen kann, kann man sich einfach irgendeinen Gegenstand zeichnen, der nicht ganz zu Ende gemalt ist. Dadurch ist es einfacher sich einen schwierigen Bruch zu merken. […] Ich finde diese Darstellung eigentlich ganz gut, weil sie hilft, sich zu orientieren, und weil sie einem auch Mathe erleichtert.“

5. Fazit

Die meisten der hier untersuchten Schülerinnen und Schüler wurden in die Sichtweise des *instrumentalist view* eingeordnet. In dieser Kategorie ist das gesamte Leistungsspektrum vertreten, während in der Kategorie *problem-*

solving besonders Schülerinnen und Schüler mit guten Noten vertreten sind. Die Schülerinnen und Schüler aus der Kategorie *Platonist view* fallen durch ein großes Interesse an Geschichte der Mathematik sowie der Naturwissenschaften auf.

Darüber hinaus ist möglicherweise gerade für jüngere Schülerinnen und Schüler diese Vorgehensweise zur Erforschung mathematischer Weltbilder geeigneter als herkömmliche Methoden etwa in Form von Fragebögen. Das Ausfüllen eines Fragebogens erfordert ein hohes Maß an Konzentration und Aufmerksamkeit, was angesichts des Alters der hier untersuchten Schülerinnen und Schüler nicht unproblematisch ist. Auch lassen sich Bilder verglichen mit Fragebögen leichter als Ausgangspunkt für einen Dialog über Mathematik in den Unterricht integrieren.

Das verwendete Untersuchungsdesign deutet auf eine viel versprechende Möglichkeit hin, die Sicht auf Mathematik zu dekodieren. Hierbei werden von den Schülerinnen und Schülern kreative Tätigkeiten, nämlich die Anfertigung von Bildern und Texten, gefordert. Diese Art von Tätigkeiten werden oftmals im alltäglichen Mathematikunterricht vernachlässigt, so dass unser Ansatz nach Schoenfeld (1983) das „rein Kognitive überschreitet“.

Literatur

Bulmer, M., & Rolka, K. (2005). The “A4-Project” – Statistical world views expressed through pictures. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 193-200). Melbourne, Australia: PME.

Dionne, J. J. (1984). The perception of mathematics among elementary school teachers. In J. M. Moser (Ed.), *Proc. 6th Annual Meeting of the North American Chapter of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 223-228). Madison (WI): University of Wisconsin: PME.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching, 15*(1), 13-33.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* Hampshire, UK: The Falmer Press.

Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Schoenfed, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*, 7, 329-363.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In A. D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Jürgen ROTH, Würzburg

Computerwerkzeuge – Ein Thema für Lehrerfortbildungen?!

Bei Computerwerkzeugen (CW) handelt es sich um Software, die flexibel für unterschiedlichste Zwecke einsetzbar ist. So gesehen sind CW also computergestützte Universalwerkzeuge, bei denen der Anwender jeweils entscheidet, welche der vielen Funktionen er wozu einsetzt. Die im Mathematikunterricht (MU) eingesetzten CW sind im Wesentlichen Tabellenkalkulationsprogramme (TKP), dynamische Geometriesoftware (DGS), Computeralgebrasysteme (CAS) und dynamische Mathematiksoftware (DMS). Eigene Erfahrungen zeigen, dass Lehrerfortbildungsangebote zum Einsatz dieser CW im MU intensiv genutzt werden. Vor diesem Hintergrund wurde in einer empirischen Untersuchung im Rahmen zweier semesterlanger Lehrerfortbildungen im Wintersemester 2005/06 folgenden Fragen nachgegangen:

- Mit welchen Erfahrungen (u. a. im Umgang mit dem Werkzeug) und mit welchen Erwartungen kommen Lehrkräfte in Seminare zu CW?
- Wie schätzen Lehrkräfte ihren Kompetenzzuwachs nach einem semesterlangen Fortbildungsseminar zu einem CW ein?

Grundlage der empirischen Untersuchung

Eine der Fortbildungen richtete sich an Realschullehrkräfte und bezog sich auf die DGS EUKLID DynaGeo. Die Zielgruppe der anderen Fortbildung waren Gymnasiallehrkräfte. Hier war der Einsatz der DGS/DMS[1] GeoGebra als CW im Mathematikunterricht Thema der Fortbildung. Von den insgesamt ca. 50 teilnehmenden Lehrkräften haben 40 sowohl zu Beginn als auch am Ende des Semesters jeweils einen Fragebogen ausgefüllt. Die damit erhobenen Daten sind Grundlage der vorliegenden Untersuchung. Von den genannten 40 Lehrkräften haben sich 25 aufgrund der persönlichen Einschätzung ihres Vorwissens im Hinblick auf das CW für einen Grundkurs und 15 für einen Fortgeschrittenenkurs entschieden. Auf diese Weise ergaben sich vier Teilgruppen mit jeweils getrennten Veranstaltungen.

Erwartungen und Erfahrungen der Lehrkräfte (Eingangsfragebogen)

In einem Eingangsfragebogen zu Beginn der Veranstaltungen wurden die Erwartungen und Erfahrungen der teilnehmenden Lehrkräfte erfragt. Die Ergebnisse werden hier aus Platzgründen nur kurz skizziert: Die frei for-

[1] Der Autor von GeoGebra deklariert das Programm als dynamische Mathematiksoftware, weil Konfigurationen damit sowohl geometrisch als auch algebraisch manipuliert werden können. Viele Lehrkräfte nehmen es aber hauptsächlich als DGS wahr.

mulierten Erwartungen der Teilnehmer an die Veranstaltung lassen sich in vier Kategorien einteilen:

1. Erwerb von Werkzeugkompetenz
   Hier geht es um Vertrautheit mit den Funktionen des CW, einen Überblick über die Möglichkeiten, die das CW bietet, Sicherheit im Umgang mit dem CW und darum, Tipps & Tricks zur Handhabung kennenzulernen.
2. Erwerb von methodischer Kompetenz
   Wo und wie kann das CW sinnvoll im Unterricht eingesetzt werden?
3. Kennenlernen und Erstellen von Unterrichtsmaterialien
   Wo findet man Unterrichtsmaterialien zum CW und wie kann man eigene Unterrichtsmaterialien erstellen?
4. Kooperation mit Kolleginnen und Kollegen
   Genannt werden gegenseitige Unterstützung, Beratung und Erfahrungsaustausch sowie der Austausch von Unterrichtsmaterialien.

Die frei formulierten Antworten der Lehrkräfte auf die Frage, warum ihrer Meinung nach DGS im Unterricht eingesetzt werden sollte, decken insgesamt eine enorme Bandbreite ab, die sich in sechs Kategorien (Perspektiven) einteilen lassen:

1. Mathematische Perspektive
   Die Verzahnung von Geometrie und Algebra wird unterstützt, Funktionale Abhängigkeiten treten in den Mittelpunkt und ein anderer Zugang zu mathematischen Problemen wird möglich.
2. Werkzeugperspektive
   Mit dem DGS kann man leicht Sonder- und Grenzfälle betrachten, Fallunterscheidungen erkennen und durchführen, Variationen von Konfigurationen vornehmen und experimentieren.
3. Perspektive der Unterrichtsmethodik
   DGS eignet sich gut für Partner- bzw. Gruppenarbeit und erleichtert die individuelle Förderung und Differenzierung.
4. Lehrerperspektive
   Die Lehrkraft kann mit Hilfe des DGS Entwicklungen darstellen, Sachverhalte veranschaulichen, Aufgaben flexibel stellen bzw. variieren und im Unterricht Zeit sparen.
5. Schülerperspektive
   Das DGS unterstützt bei den Schülerinnen und Schülern das entdeckende Lernen, das problemlösende Denken, die Selbsttätigkeit, die Kreativität und das Herausbilden anschaulicher Vorstellungen.
6. Motivationale Perspektive
   Der Einsatz von DGS ist zeitgemäß und motiviert Schüler.

Auffällig ist die Verteilung der Lehrerfahrung der Fortbildungsteilnehmer gemessen in Berufsjahren. Die meisten Lehrkräfte stehen entweder am Beginn (0 bis 5 Jahre Berufserfahrung) oder im letzten Drittel ihres Be-

rufslebens (mehr als 20 Jahre Berufserfahrung). Die Vorerfahrungen der Lehrkräfte mit dem Werkzeug wurden in Form von Ratingskalen erhoben (vgl. Tabelle 1). Die Möglichkeit zusätzliche Aspekte zu nennen und zu bewerten haben die Lehrkräfte nicht wahrgenommen.

Bisheriger Einsatz von DGS	**sehr häufig**	**häufig**	**etwas**	**wenig**	**gar nicht**
persönlich	4	16	13	3	4
Unterrichtseinsatz (UE)	1	9	14	8	8
Bisheriger UE in der Geometrie	**s. h.**	**häufig**	**etwas**	**wenig**	**g. n.**
Konstruieren	1	10	10	8	11
Begriffsbildung	1	0	14	3	22
Beweisen	1	1	9	9	20
Abbildungen	4	8	4	10	14
Bisheriger UE in der Algebra	**s. h.**	**häufig**	**etwas**	**wenig**	**g. n.**
Terme	1	0	4	9	26
Funktionen	4	8	4	5	19
Extremwertaufgaben	1	6	7	3	23
Gleichungen	0	0	5	9	26
Bisheriger UE in der Sek. II[2]	**s. h.**	**häufig**	**etwas**	**wenig**	**g. n.**
Analysis	1	2	4	1	17
analytische Geometrie im $\mathbb{R}^2$	0	0	4	1	20
Stochastik	0	0	0	1	24
Bisheriger Art des UEs von DGS	**s. h.**	**häufig**	**etwas**	**wenig**	**g. n.**
Demonstration im Lehrervortrag	2	10	9	3	16
Demonstration i. Unterrichtsgespräch	1	10	12	2	15
Partnerarbeit	1	4	11	11	13
Hausaufgaben	1	1	5	7	26
Wochenaufgaben	0	0	4	3	33
kleinere Projekte	0	0	5	6	29

Tabelle 1: Tabelleneinträge geben jeweils die absoluten Anzahlen der Lehrkräfte an.

Konzeption und Durchführung der Fortbildungen

Die Grundkurse und die Fortgeschrittenenkurse wurden völlig unterschiedlich konzipiert und durchgeführt. In den *Grundkursen* (*GK*) erfolgte jeweils eine Einführung in wesentliche Aspekte der Werkzeugnutzung und der Unterrichtsmethodik anhand von unterrichtspraktischen Beispielen, die auf Teilnehmerwünschen basierten. Diese wurden gemeinsam diskutiert und anschließend in Partner- und Gruppenarbeit umgesetzt und gesichert. Zur Vertiefung gab es nach jeder Sitzung Hausaufgaben in Form von Wochenaufgaben. Nach zwei Dritteln des Semesters wurden grundsätzliche Einsatzmöglichkeiten von DGS im Mathematikunterricht vorgestellt und diskutiert. Anschließend wurden vorhandene, auf DGS basie-

[2] Die Fragen zur Sek. II wurden nur den Gymnasiallehrkräften gestellt.

rende dynamische Arbeitsblätter gemeinsam gesichtet, bewertet und schließlich auf dieser Grundlage von den teilnehmenden Lehrkräften selbst dynamische Arbeitsblätter für ihren Unterricht erstellt. Im Gegensatz dazu sollten die Lehrkräfte der *Fortgeschrittenenkurse* (*FK*) von Anfang an gemeinsam dynamische Arbeitsblätter konzipieren, erstellen, diskutieren, verbessern, im eigenen Unterricht einsetzen und sie evaluieren. Grundlage waren ausschließlich die Interessen der Teilnehmer. Der Kursleiter machte keinerlei Vorgaben, sondern übernahm die Moderation, machte bei Bedarf aber auch Vorschläge und gab Hilfestellungen sowie Rückmeldungen.

Ergebnisse der Fortbildungen (Abschlussfragebogen)

Im Abschlussfragebogen gaben alle Teilnehmer an, dass ihnen der Austausch mit den Kollegen, der deutliche Bezug zu eigenen Interessen und die selbstständige Entwicklung von Unterrichtsmaterial am wichtigsten waren. Dies entspricht internationalen Erfahrungen, von denen Jaworski et al. (1999, S. 205) aus anderen Untersuchungen berichten. Daneben waren den Teilnehmern der GK die mündlichen und schriftlichen Anleitungen des Kursleiters sehr wichtig. Ferner sollten sie auf einer fünfstufigen Ratingskala ihren eigenen Kompetenzzuwachs im Hinblick auf das DGS einschätzen. Alle geben dabei an, sowohl für sich selbst, als auch für ihren Unterricht viel oder sogar sehr viel dazugelernt zu haben. Sie schätzen also sowohl den Fortschritt hinsichtlich ihrer Werkzeugkompetenz als auch ihrer methodischen Kompetenz als groß ein. Interessant sind auch die Angaben zu den mit DGS erstellten Lernumgebungen (LU) in entsprechenden Ratingskalen. Teilnehmer der GK geben an, *vor der Fortbildung* fast nicht oder gar nicht in der Lage gewesen zu sein LU zu erstellen, die Teilnehmer der FK konnten dies mit Einschränkungen. *Nach der Fortbildung* geben alle Teilnehmer aus FK und GK an, LU relativ problemlos erstellen zu können. Für den GK scheint sich diese Aussage aber nur auf die Werkzeugkompetenz zu beziehen, da hier die Mehrheit angebt, LU auch nach der Fortbildung nur mit Einschränkungen hinsichtlich ihrer Qualität beurteilen zu können. Den Teilnehmern des FK gelingt dies hingegen nach eigener Einschätzung nun ebenfalls relativ problemlos. Trotzdem ist bei allen Lehrkräften der Wunsch nach weiterführenden Fortbildungen zum selben (!) CW ungebrochen. Die FK führen ihre Arbeit sogar geschlossen in zwei Arbeitskreisen weiter, deren Ergebnisse im Internet unter der Adresse www.juergen-roth.de/dynama/ veröffentlicht werden.

Literatur:

JAWORSKI, Barbara; WOOD, Terry; DAWSON, Sandy: Mathematics Teacher Education – Critical International Perspectives. Studies in Mathematics Education Series: 12, Falmer Press, London, Philadelphia, 1999

Bożena ROŻEK, Kraków

Kinderinterpretationen der Multiplikation in Anlehnung an die Zeilen-Spalten-Anordnung

Begründung

Seit einigen Jahre untersuche ich das Verständnis der Kinder[1], das ihre Vorstellung der regelmäßigen geometrischen Anordnungen betreffen. Diese Formation wurde die Zeilen-Spalten-Anordnung (ZSA) genannt. Bisher haben die Kinder z. B. mit der folgenden ZSA gearbeitet (Abb. 1-3), wo die verschiedene Bedeutungsaspekte dominieren. Semadeni (2002) spricht über die Natur der Mathematik und er unterscheidet dabei drei Ebenen der Auffassung von mathematischen Begriffen: Tiefenideen, Oberflächlichenformen, formale Modelle. Den Begriff der ZSA kann man als eine Tiefenidee auffassen, wo die Definition nicht am wichtigsten ist.

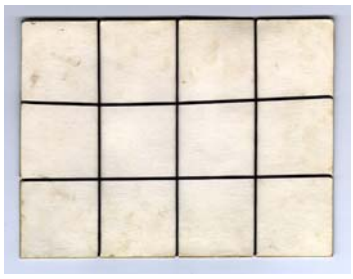


Abb. 1: Linearaspekt

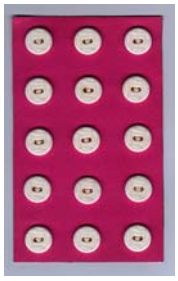


Abb. 2: Punktaspekt

Abb. 3: Deckungsaspekt

Die bisherigen Untersuchungen (Outhred & Mitchelmore, 2002; Rożek, 2002) zeigen, wie schwer für Kinder im Alter 6 bis 9 Jahren das Reproduzieren der ZSA auf den Zeichnungen war. Die Kinder hatten viele Schwierigkeiten mit der vertikalen und horizontalen Koordination (Abb. 4-6).

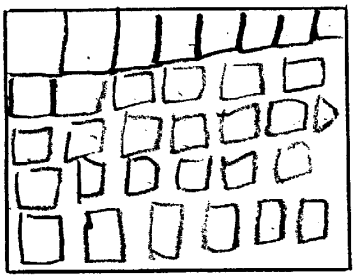


Abb. 4: Ula – 7 Jahre

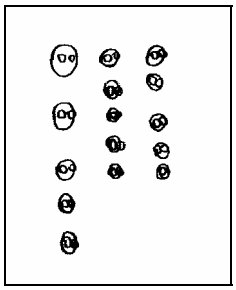


Abb. 5: Michał - 6 Jahre

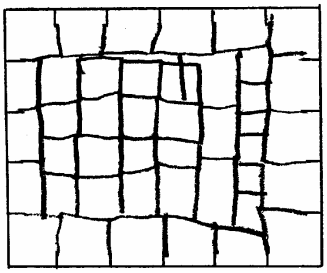


Abb. 6: Łukasz – 7 Jahre

Das Verstehen der Zeilen-Spaltenstrukturen spielt eine große Rolle bei der Einführung des Feldbegriffs (Outhred & Mitchelmore, 2002). Mit dem

[1] Die letzte Untersuchungen wurden teilweise von der Polnischen Forschungsgemeinschaft KBN in den Jahren 2003-2006 finanziert.

Punktmuster kann man viele Ebenen der Visuellen Strukturierungsfähigkeit entwickelt (Söbbeke E., 2003). Die geometrischen Muster eröffnen die Möglichkeiten, mathematische Aktivitäten zu entwickeln (Vogel, 2005).
Die verschiedenen Zeichnungen der Kinder machen den Forscher darauf aufmerksam, dass man ZSA als reiche Struktur betrachten kann und verschiedene Konfigurationsstrukturen unterscheiden (Abb. 7-9).

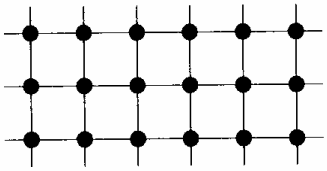


Abb. 7: Zeilen-Spalten-Struktur

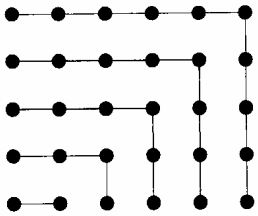


Abb. 8: Eckstruktur

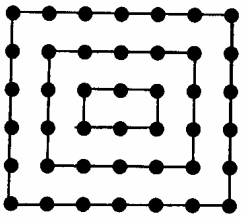


Abb. 9: Randestruktur

Im Kontext dieser Überlegung wurde nicht nur die Beobachtung der Kinderzeichnungen, sondern auch der Prozess des Zählens der Elemente der Zeilen-Spalten-Anordnung interessant. Das Verstehen der Multiplikation in Anlehnung an die ZSA verlangt die Wahrnehmung der Struktur: *k* Zeilen – in jeder *n* Elemente oder *n* Spalten – in jeder *k* Elemente. Jetzt entstehen die folgende Fragen: *Welche Arten der Konfigurationsstrukturen dominieren bei den Kindern im Prozess des Zählens der Elemente der Zeilen-Spalten-Anordnung? Welche Interpretationen der Multiplikation kann man bei den Kinder vorfinden?* Hier wird einige Episode aus der Forschungsuntersuchungen neun- bis elfjähriger Schüler beschreiben. Die Hauptuntersuchungsmethode waren der diagnostischen Aufgaben, die das Kind individuell bei dem Forscher bearbeitet hat.

Aufgabenbeschreibung

Aufgabe 1. *Mit den bunten Steckern wurde ein Muster* (Abb.10) *erstellt. Wie viele Stecker wurden in diesem Muster gebildet?*

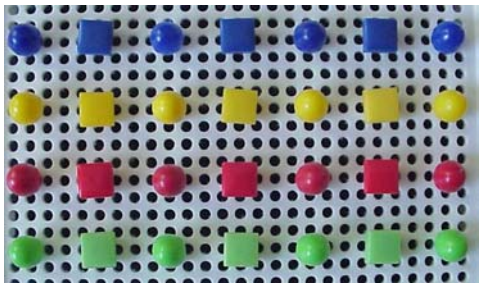


Abb. 10

Aufgabe 2. Die Kinder erhalten folgende Kärtchen: $4 \cdot 7$ $7 \cdot 4$ $7 + 4$ $4 + 7$ $3 \cdot 7$ $7 \cdot 3$ $4 \cdot 6$ $6 \cdot 4$. *Das sind Kärtchen mit verschiedenen Grundrechnungsarten. Lies diese Aufgaben. Suche die Grundrechnungsaufgaben, mit*

deren Hilfe die Anzahl der Stecker berechnet werden kann, und lege sie zum Muster. Lege die Aufgabe beiseite, die zum Muster nicht passen.

Aufgabe 3. *Stelle ein eigenes Muster so dar, dass die Anzahl der Stecker mit Hilfe von diesen Grundrechnungsarten berechnet werden kann* (Die Kinder erhalten folgende Kärtchen: $5 \cdot 3$, $3 \cdot 5$).

Aufgabe 4. *Erstelle irgendein Muster. Dann schreib die Grundrechnungsarten mit deren Hilfe die Anzahl der Stecker im Muster berechnet werden kann auf.*

Bei der Analyse der Lösungen von Aufgabe 3 kann man einige wichtige Merkmale des Kinderverhaltens unterscheiden. Diese Merkmale zeigen, wie große Bedeutung die Eckstruktur und die Randestruktur spielen.

Bedeutung der Eckestruktur (die erste Zeile und erste Spalte)

- Kamil (10 Jahre, 9 Monate) baut in der dritten Aufgabe die linke Spalte mit 5 Stecker und dann füllt er in jede Zeile 3 Stecker (Abb. 11). Nach einer kurzen Pause spricht er: *Schlecht. Es gibt 5 Reihen und in jeder sollten 3 Stecker sei. Und ich habe in jeder 4*. Kamil hat selbst seinen Fehler bemerkt. Beim zweitem Versuch hat er die letzte Spalte weggenommen und er hat eine passende Anordnung erstellt.
- Łukasz (10 Jahre, 5 Monate) ordnet *3* Stecker vertikal und *5* horizontal an (Abb. 12). Dann füllt er das auf diese Weise festgelegte Rechteck mit den *15* Stecker auf. Auf die Frage: *Warum findest du, dass dein Muster zu der Rechenart 5·3 passt?* antwortet er: *Hier sind 5* (die obere Zeile) *und hier 3* (die linke Spalte) und er behauptet, dass 15 Stecker sind. Dann zählt er die einzelnen Elemente und er spricht weiter: *Oh! Es ist schlecht!* Dann nimmt Łukasz die erste Spalte und die untere Zeile weg.

Abb. 11: Kamil

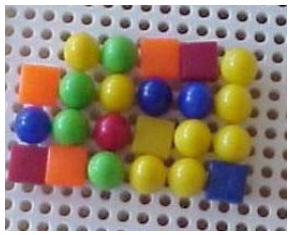


Abb. 12: Łukasz

Abb. 13: Malwina

Abb. 14: Justyna

Bedeutung der Randestruktur

- Malwina (10 Jahre, 11 Monate) bildet zwei Spalten mit jeweils *3* Quadratstecker und zwei Zeilen oberhalb und unterhalb mit jeweils *5* weiteren Stecker (Abb. 13). Auf diese Weise hat sie den Rahmen eines Rechtecks geordnet. Sie findet, dass ihre Muster zu der Rechenart *3·5* passt: *Hier*

sind 3 (sie zeigt die Quadrate) *und hier 5* (sie zeigt auf die obere Zeile) *und das ist 3·5.* Dann zählt Malwina die Stecker in diesem Muster und sie multipliziert sie *3·5.* Sie bekommt verschiedene Ergebnisse, aber sie ist nicht im Stande dieses Muster korrigieren.

- Justyna (10 Jahre; 5 Monate) ordnet in der vierten Aufgabe den Rahmen des Quadrates (Abb. 14). Jede Seite des Quadrates ist aus *7* Stecker gebaut. Quadrat hat *4* Seiten. Deshalb schreibt sie die folgende Grundrechnungsarten: $4 \cdot 7 = 28,\ 7 + 7 + 7 + 7 = 28,\ 7 \cdot 4 = 28.$

Bemerkungen

Die Multiplikation in Anlehnung an die Zeilen-Spalten-Anordnung bedeutet für Kinder sehr oft eine Regel, die sie automatisch verwenden. Die Zeilen-Spalten-Anordnung ist für Kinder die geometrische „Situation", die sie sehr einfach erkennen und bei der immer zu multiplizieren ist. Den Kindern fällt es in der dritten Aufgabe schwer, alle Zusammenhänge zwischen der Multiplikation und der Struktur des Musters zu erfassen. Sie haben sehr oft nur an die Eckstruktur oder Randstruktur gedacht, dabei haben sie die Elemente der ersten Spalte und die ersten Zeile gezählt und multipliziert. Sie können sehr oft richtige Ergebnisse erzielen, obwohl ihnen das Verständnis der Bedeutung dieser Zahlen nicht bewusst ist. Es ist schwierig eindeutig festzustellen, ob dem Kind bei dem Zählen der Elemente in der ersten Spalte bewusst ist, dass es auf diese Weise gleichzeitig die Zeilen gezählt hat. Es ist wahrscheinlich, dass das Kind bei der Multiplikation in dieser Anordnung die Situation „so viel mal so viel" nicht erkannt hat.

Literatur

Outhred, L. & Mitchelmore, M. (2002) Across the great divide: From counting to subdivision of rectangular area, In R. Nata (Ed.) *Progress in Education*, Vol 5. New York: Nova Science Press

Rożek, B. (2002) Denkschema eines Zeilen-Spalten-Anordnungs bei Kindern im Alter von 6 bis 9 Jahren, *Beiträge zum Mathematikunterricht,* Franzbecker, 427-430

Rożek, B. (2004) Kinderschwierigkeiten beim Verstehen des Kommutativgesetz*, Beiträge zum Mathematikunterricht,* Franzbecker, 485-489

Semadeni, Z. (2002) Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24,** 41-92

Söbbeke E. (2003) Grundschulkinder deuten Strukturen in Anschauungsmittel hinein – Qualitative und epistemologisch orientierte Analyse der „Visuellen Strukturierungsfähigkeit", *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker, 605-608

Vogel, R. (2005) Muster – eine Leitidee mathematischen Denkens und Lernens, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker, 585-588

Franziska RUDOLPH-ALBERT und Stephan KESSLER, München

Problemlösekompetenzen von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 7

Die PISA-Studie erhebt neben den drei fachbezogenen Bereichen Lesen, mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung auch fächerübergreifende Kompetenzen. Im Erhebungszyklus 2003 stand dabei das fächerübergreifende Problemlösen im Mittelpunkt.

Probleme werden von Polyà (1949) als Aufgaben unbekannten Typs definiert, bei denen die notwendigen Schritte zur Lösung ebenfalls unbekannt sind. In der Mathematikdidaktik wird häufig zusätzlich gefordert, dass eine „Barriere“ vorhanden sein muss (vgl. Dörner, 1976).

Problemlösen und Mathematik werden vielfach als Begriffspaar verwendet. Nach Schoenfeld (1992) erfordert mathematisches Problemlösen allerdings neben den allgemeinen und lehrstoffbezogen „Problem-Solving Strategies“ eine so genannte „Knowledge Base“, eine Wissensbasis aus z.B. Begriffen, Fakten und algorithmischen Prozeduren.

Im Rahmen von PISA wurde untersucht, wie gut Schülerinnen und Schüler am Ende der Pflichtschulzeit darauf vorbereitet sind, anwendungsbezogene fächerübergreifende Problemstellungen zu lösen. Vordergründig geht es demzufolge um die Anwendung von Denk- und Problemlösestrategien allgemeinerer Art auf komplexe, fächerübergreifende Problemstellungen. Der internationale Test zum analytischen Problemlösen unterscheidet drei Arten von Problemstellungen, nämlich a) Entscheidungen treffen, b) Systeme analysieren und entwerfen und c) Fehler suchen. Ein Beispiel für die Kategorie Entscheidungen treffen stellt die Aufgabe „Kinobesuch“ dar. Hier liegt die Anforderung darin, unter Berücksichtigung der zeitlichen Bedingungen von drei Schulfreunden einen Kinobesuch zu planen, wobei hier alle nötigen Informationen gegeben sind. Der Problemtyp Systeme analysieren zeichnet sich dadurch aus, dass nicht alle Alternativen vorgegeben sind. Bei der Aufgabe Bibliothek geht es zum Beispiel um den Ausleihbetrieb zweier Schulbibliotheken. Das Problem besteht darin mittels eines Flussdiagramms ein Regelsystem mit der kleinstmöglichen Anzahl von Kontrollschritten zu entwerfen.

Die Ergebnisse des internationalen Tests zum analytischen Problemlösen zeigen, dass die mittlere Problemlösekompetenz der Fünfzehnjährigen in Deutschland deutlich und statistisch signifikant oberhalb des OECD-Durchschnitts liegt (vgl. PISA-Konsortium Deutschland, 2004). Die mittlere mathematische Kompetenz in Deutschland unterscheidet sich hingegen nicht signifikant vom OECD-Durchschnitt. Betrachtet man die Beziehung zwischen der mathematischen und der Problemlösekompetenz so ergibt sich auf indivi-

dueller Ebene eine latente Korrelation von r = 0.90 (national) bzw. r = 0.89 (international). In Bezug auf die Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums ist die latente Korrelation (national) r = 0.80. Es könnte daher sein, dass beide Kompetenzbereiche einen gemeinsamen Fokus auf kognitive Grundfähigkeiten haben, insbesondere auf die Fähigkeit zum schlussfolgernden Denken. Weiterhin wird aus dem überdurchschnittlichen Abschneiden im Problemlösen gefolgert, dass bei den deutschen Schülerinnen und Schülern noch ungenutztes Potential für die Entwicklung mathematischer Kompetenz vorhanden ist.

Ziele und Design der Untersuchung

Forschungsleitend für unsere Untersuchung waren die Fragen:

- Wie bearbeiten Schülerinnen und Schüler Problemaufgaben zum schlussfolgernden Denken, bei denen die Begründung der Lösung gefragt ist?
- Welche Beziehung gibt es zwischen den Problemlösefähigkeiten und der Beweiskompetenz?
- Kann die Problemlösekompetenz als ein Prädiktor für mathematische Argumentationsfähigkeiten angesehen werden?

An der Untersuchung nahmen ca. 1150 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe sieben aus 45 Klassen verschiedener Gymnasien in München und Augsburg teil. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiteten einen Test zur Beweiskompetenz als Vor- und Nachtest im Rahmen einer Unterrichtseinheit und einen Test zum deduktiven Problemlösen zum Zeitpunkt des Vortests. Die Leistungstests zum Beweisen und Begründen bestanden einerseits aus Aufgaben zu Basisqualifikationen im Bereich der Geometrie und andererseits aus Aufgaben zum Argumentieren und Begründen. Der Test zum analytischen Problemlösen bestand aus fünf Aufgaben, wobei drei dem Aufgabentyp Entscheidungen treffen und zwei dem Typ Systeme analysieren und entwerfen zuzuordnen sind. So wurde beispielsweise eine Aufgabe analog zur PISA-Aufgabe „Kinobesuch“ konstruiert. Unter der Beachtung von Bedingungen, die vier Freunde an einen gemeinsamen Kinobesuch stellten, sollten mögliche Kinofilme angegeben werden. Weiterhin wurde eine Aufgabe mit dem Namen „Stadtbad“ entwickelt, welche ähnlich zur Aufgabe „Bibliothekssystem“ bei PISA gestaltet ist. Das Problem bestand darin ein Flussdiagramm für die Programmierung eines Ticketautomats zu entwerfen. Zudem enthielt der Test zwei Detektivaufgaben, bei denen die gegebenen Informationen zur Identifizierung des oder der Täter logisch kombiniert werden mussten. Bei drei der fünf Aufgaben waren die Schülerinnen und Schüler explizit aufgefordert ihre Lösung zu begründen.

Ergebnisse

Das Bild, das sich bei der deskriptiven Analyse der Schülerantworten ergibt, sei an einer Beispielaufgabe verdeutlicht. In der Aufgabe Banküberfall müs-

sen aus drei möglichen Tätern diejenigen angegeben werden, die als Täter in Frage kommen. Dazu sind die Tatzeit, der Tatort und die zwei angrenzenden Städte mit den entsprechenden Fahrzeiten dorthin aufgeführt. Mit zwei Zeugenaussagen können dann zwei mögliche Täter ausgeschlossen werden, so dass nur eine Person als Täter in Frage kommt. Dabei wird explizit nach einer Begründung gefragt. Obwohl 83,3 % die Aufgabe korrekt beantworten und damit den möglichen Täter erkennen, fällt den Schülerinnen und Schülern die Begründung sichtlich schwer (vgl. Tabelle 1).

Art der Begründung, richtiger Täter	N	%
Keine Begründung oder naive Begründung	636	67;2
Begründung mit kleinen Mängeln	211	22,3
Vollständige Begründung	99	10,5

Tabelle 1: Begründung Banküberfall

Ebenso bestätigen die anderen Aufgaben das Ergebnis, wonach es den Schülerinnen und Schülern weniger Probleme bereitet die richtige Lösung zu finden, als vielmehr diese adäquat zu begründen. Man erhält also eine Situation, wie sie sonst typisch für die mathematische Kompetenz der Schülerinnen und Schüler ist: Einfache Routineaufgaben werden gut gelöst, hingegen scheitern sie häufig bei Aufgaben, die eine Begründung erfordern. (Heinze & Reiss, 2004)

Den Tests zur Beweiskompetenz liegt ein dreistufiges theoretisches Kompetenzmodell zugrunde. Dabei umfasst die Kompetenzstufe I Items, die ein einfaches Anwenden von Regeln und elementares Schlussfolgern erfordern. Den Kompetenzstufen II und III sind Aufgaben zugeordnet, die eine ein- bzw. mehrschrittige Begründung verlangen. Das Kompetenzmodell konnte in mehreren Studien empirisch bestätigt werden (Heinze & Reiss, 2004).

Betrachtet man nun den Zusammenhang zwischen dem Test zum Beweisen und Argumentieren und dem Test zum deduktiven Problemlösen so ergeben sich sowohl für den Vortest als auch den Nachtest Korrelationen, die statistisch hochsignifikant sind ($r = 0.340$ bzw. $r = 0.316$, $p < 0,01$). Eine Auswertung der zu begründenden Problemlöseaufgaben in Bezug auf die drei Kompetenzstufen des Leistungstest ergibt, dass die Problemlösekompetenz durchaus als ein Prädiktor für mathematische Argumentationsfähigkeiten angesehen werden kann (vgl. Tabelle 1 auf der folgenden Seite).

So lösen Schülerinnen und Schüler, die Problemlöseaufgaben vollständig Begründen, Aufgaben zum mehrschrittigen Argumentieren zu 40 % richtig, wohingegen Probanden, die keine Begründung angeben, Aufgaben der Kompetenzstufe III nur zu 15 % lösen. Auffällig ist auch hier wieder, dass nur 7,3% der Lernenden ihre Lösungen vollständig Begründen, während 18% gar keine Begründung angeben.

	N = 1128	%	K-Stufe I	K-Stufe II	K-Stufe III
keine Begründung	204	18,1	,70	,49	,15
teilweise Begründung	842	74,3	,76	,57	,24
vollständige Begründung	82	7,3	,85	,66	,40

Tabelle 2: Begründetes Problemlösen in Bezug auf mathematische Kompetenzen

Um Unterschiede im Problemlösen in Abhängigkeit vom individuellen Kompetenzniveau zu untersuchen, wurden auf Basis des Mathematiktest gebildete Leistungsdrittel herangezogen. Hier zeigen sich hochsignifikante Unterschiede in der Problemlösekompetenz (nach Scheffé-Test).

Diskussion

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass allgemeine Problemaufgaben, die schlussfolgerndes Denken fordern, im Prinzip häufig korrekt gelöst werden. Die argumentative Begründung der Lösung dieser Aufgaben wird nur von wenigen Schülerinnen und Schülern geleistet. Die Problemlösefähigkeiten und die Beweiskompetenz korrelieren eher mäßig, dennoch deuten die Ergebnisse daraufhin, dass die Problemlösefähigkeit ein Prädiktor für mathematische Argumentationsfähigkeiten sein könnte. Weiterhin zeigen sich Unterschiede im Problemlösen in Abhängigkeit vom individuellen Kompetenzniveau. Die Schülerinnen und Schüler zeigen ähnlich wie in der Mathematik ein eher intuitives Wissen, das nicht hinreichend begründet werden kann. Dieses Wissen ermöglicht die erfolgreiche Bearbeitung nicht allzu komplexer Aufgabenstellungen. Der im Rahmen von PISA beschriebene deutliche Zusammenhang zwischen Mathematikleistung und Problemlösen lässt sich in Bezug auf die Argumentationsfähigkeit nicht bestätigen.

Literatur

Dörner, D. (1976*). Problemlösen als Informationsverarbeitung*. Stuttgart: Kohlhammer.

Heinze, A. & Reiss, K. (2004). Mathematikleistung und Mathematikinteresse in differentieller Perspektive. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung*. Münster: Waxmann.

PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.) (2004). *Pisa 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs*. Münster: Waxmann.

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens*. Bern und München: Francke.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws, (ed.). Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan. pp. 334-370.

Herwig SÄCKL, Regensburg

Albrecht Altdorfer (ca. 1480 -1538): Künstler, Baumeister, Stadtpolitiker - Nutzung einer historischen Situation für den Mathematikunterricht und die Mathematiklehrerausbildung

Im schulischen Mathematikunterricht und in der Lehrerausbildung wird ein Bild von Mathematik angestrebt, zu dem drei Aspekte beitragen können (vgl. [1]):

- Mathematik als nützliche und brauchbare Wissenschaft
- Mathematik als formale Strukturwissenschaft
- Mathematik als historisch gewachsene und kulturell eingebettete und auf Kreativität beruhende Wissenschaft

Im vorliegenden Beitrag zum dritten Aspekt wird versucht, wichtige Teile der Mathematik um 1500 an den prominenten Zeitgenossen Albrecht Altdorfer als Assoziationskern zu binden, um die Gesichtspunkte der Beziehungshaltigkeit und der Anschlussfähigkeit zu stärken und auch personal zu nutzen. Die Behandlung der historischen Situation im Zusammenhang bietet sich in der Lehrerausbildung im Rahmen eines Seminars an, als Projekt ist das Thema auch für die Arbeit in einer Schulklasse gut geeignet, etwa am Ende der Sekundarstufe I.

Die Geschichte um 1500 wird häufig als eine „Zeit der Wende“ charakterisiert. Damit fasst man suggestiv eine Fülle von Erscheinungen und Vorgängen zusammen, die das Menschenbild betreffen: verstärkte Diesseitsorientierung, der Humanismus nimmt den Menschen als Individuum in den Blick, sodann Wissenschaft und Weltbild: Kopernikanische Revolution, zunehmende Akzeptanz des empirischen Vorgehens als Erkenntnismittel, Buchdruck, Entdeckung der Neuen Welt, schließlich Staatswesen und Kirche: Niedergang von Bauern- und Ritterstand, Aufstieg der Städte, Reformation, schwieriges Verhältnis zwischen kaiserlicher Zentralgewalt und Territorialherrschaften.

Die Bezeichnung „Zeit der Wende“ trifft auch auf die Mathematik um 1500 zu:

- Die indisch-arabischen Zahlen und das schriftliche Rechnen setzen sich durch, die Rechenzeichen nehmen ihre heutige Form an.

- Die Entwicklung der Algebra erlaubt die mathematische Formulierung und Lösung vieler Probleme.

- Die Mathematik dehnt sich über den mittelalterlichen Rahmen des Quadriviums (Arithmetik, Geometrie, Astronomie, Musik) aus.

- Ausgehend von Wirtschaft und Kunst beginnt die Mathematisierung der Wissenschaften.

- Eine vielfältige mathematische Literatur entsteht; das mathematische Wissen kann sich dank des Buchdrucks explosionsartig ausbreiten.

Der Regensburger Künstler, Baumeister und Stadtpolitiker Albrecht Altdorfer ist durch seine Arbeit vielfältig in der Wendezeit um 1500 verankert. Als Künstler hat er den Umbruchscharakter mit seinem neuen Verständnis von Landschaft als erlebter Umgebung des Menschen, die eigenständige künstlerische Betrachtung und Gestaltung verdient, mitgeprägt. Über die Nutzung der Zentralperspektive in zahlreichen Arbeiten ist er in einem zu seiner Zeit ganz aktuellen Zweig der praktischen Mathematik aktiv beschäftigt. Ein auch allgemeinhistorisch interessantes Beispiel aus seinem Werk ist seine einer perspektivischen Analyse gut zugängliche Darstellung der jüdischen Synagoge in Regensburg in zwei Kupferstichen aus dem Jahr 1519 (vgl.[4]). Diese Stiche hat Altdorfer mit Zeichnungen vor Ort vorbereitet, wenige Stunden bevor die Synagoge zerstört und die jüdische Gemeinde aus Regensburg vertrieben wurde. An dieser rechtswidrigen Zerstörung und Vertreibung war Altdorfer als Mitglied des die Entscheidung treffenden „äußeren Rats“ der Stadt direkt beteiligt.

1520 wurde Altdorfer zum Beisitzer des städtischen „Hansgrafenamtes“ berufen, das für die Überwachung des Handels und der Geschäfte zuständig war, mithin eines Bereichs, in dem vielfältige mathematische Anforderungen auftreten. Dabei geht es um Waren und ihre Preise, Berechnen von Gewinnen und Verlusten, Geldwechsel zwischen den verschiedenen Währungen, Umrechnen von Maßen und Gewichten, Zins- und Diskontrechnung bei Darlehen und Wechseln. Solche Probleme wurden in den dank des Buchdrucks verbreiteten Rechen- und Handelsbüchern ausführlich behandelt. Auch der Übergang vom „Rechnen auf der Linien“ mit dem Abakus zum „Rechnen mit der Federn“, dem schriftlichen Rechnen mit den indisch-arabischen Zahlen, lässt sich in den Rechenbüchern der Wendezeit nachvollziehen. Eines der ersten gedruckten Rechenbücher ist die *Behennde vnnd hübsche Rechnung auff allen Kauffmanschafften* von Johannes Widman, das in vier Auflagen zwischen 1489 und 1526 erschienen ist. (vgl. [5], 206-207) Mit den Rechenbüchern

von Widman verbreiten sich auch die Rechenzeichen + und - , die in einer handschriftlichen Algebravorlesung von Widman aus dem Jahr 1486 zum ersten Mal auftauchen. Widman hielt diese „erste bekannte Algebravorlesung im deutschen Sprachraum“ ([5], 207) als Mathematikprofessor an der Universität Leipzig. Mit diesem Status gehört er der gelehrten Welt an, als Verfasser von Rechenbüchern aber auch zur Welt der mathematischen Praktiker; da zeigt sich eine durchaus seltene Doppelmitgliedschaft.

1526 steigt Altdorfer in den „inneren Rat“ von Regensburg auf, das höchste Gremium der Stadt, und im selben Jahr wird er zum Stadtbaumeister berufen. Als Inhaber dieses Amtes und als mit den Gesetzen der Zentralperspektive vertrauter Künstler ist er sicher mit dem Inhalt des ersten in deutscher Sprache gedruckten Geometriebuchs vertraut, der *Geometria deutsch* ([6]), das der Regensburger Dombaumeister Matthäus Roriczer 1486 in seiner eigenen Druckerei (der ersten in Regensburg) veröffentlicht hat. In diesem Geometriebuch stellt Roriczer lange mündliche Traditionen nun gedruckt zur Verfügung. Sieben verschiedene Konstruktionen werden anschaulich und ausführlich beschrieben, jeweils die

- eines rechten Winkels,
- eines regulären 5-Ecks mit fester Zirkelöffnung,
- eines regulären 7-Ecks,
- eines regulären 8-ecks mit fester Zirkelöffnung,
- der Läge einer Kreislinie,
- des „verlorenen“ Kreismittelpunkts,
- eines Quadrats, das einem gegebenen gleichseitigen Dreieck flächengleich ist.

Die erste und die vorletzte Konstruktion sind genau, die anderen sind Näherungskonstruktionen, die den praktischen Erfordernissen völlig genügen. Dass sich Roriczer des Unterschieds bewusst war, ist auf Grund des Textes nicht anzunehmen. Die ausführliche Beschreibung der Konstruktionen ist an der elementaren Ausbildung der Adressaten, Steinmetze an Dombauhütten, orientiert. Die *Geometria deutsch*, das erste in deutscher Sprache gedruckte „Bauhüttenbuch“ ist als interessante geometrische Quelle sowohl in der Lehrerausbildung als auch im Klassenzimmer mit Gewinn einsetzbar.

Albrecht Dürer (1471 – 1528), von Albrecht Altdorfer sehr geschätzter Nürnberger Kollege, wendet sich mit seinem berühmten Geometriebuch *Unterweisung der Messung* ([7]) auch an die Praktiker. Maler, Goldschmiede, Bildhauer, Steinmetze und Schreiner werden in der Eingangs-

widmung ausdrücklich als Adressaten genannt. Sein Ansatz ist aber stark theoretisch, wie man schon am einleitenden Satz vermuten kann: „Der aller scharff sinnigst Euclides hat den Grundt der Geometrie zusamen gesetzt." Dürer bietet ein überaus reiches Angebot an Problemen, z.B. die Konstruktion von Rollkurven, Spiralen und Kegelschnitten, die er mit vielfältigen Illustrationen attraktiv gestaltet. Immer wieder bezieht er sich auf Euklid, verbindet dessen Geometrie mit seiner handwerklichen und künstlerischen Erfahrung und kann so durchaus als Mittler zwischen der gelehrten Welt und der Welt der Praktiker verstanden werden. Dürer selbst drückt eine gewisse Skepsis bezüglich des Nutzens für die Praktiker aus, wenn er in der Widmung schreibt, dass natürlich niemand gezwungen sei, sein Buch zu nützen; wenn man sich aber dazu entschließe, sei täglicher Gebrauch nötig, um den Inhalt zu verstehen.

Mit Johannes Aventinus Turmair begegnet uns zum Schluss noch ein Zeitgenosse und Regensburger Mitbürger von Albrecht Altdorfer. Bekannt als Geschichtsschreiber hat er 1517 auch eine der ersten Enzyklopädien der Philosophie verfasst, die *Encyclopedia Orbisque Doctrinarum* ([8]) („Enzyklopädie und Kreis der Bildungsfächer"). Vor ihm veröffentlichte nur noch der Karthäusermönch Gregor Reisch ab 1503 seine *Margarita Philosophica* ([9]) („Die Perle der Gelehrsamkeit"), die mit wunderbaren Holzschnitten illustriert ist. In beiden Enzyklopädien ist die Mathematik noch im traditionellen Quadrivium (Vierweg) dargestellt, Aventinus erweitert aber mit dem Hinweis auf Optik und Perspektive die hergebrachte Struktur. Zur Astronomie nimmt er ausdrücklich die Astrologie auf, damit in pythagoreischer Nachfolge auf die arithmetische Verschlüsselung der Welt verweisend.

Literatur:

[1] Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung an der Schwelle zu einem neuen Jahrhundert. Erklärung, verabschiedet 1998 von DMV, GDM, MNU e.a.
[2] Heymann, H.W.: Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim u. Basel 1996
[3] Krichbaum, J.: Albrecht Altdorfer – Meister der Alexanderschlacht. Köln 1978
[4] Winzinger, F.: Albrecht Altdorfer – Holzschnitte, Kupferstiche, Radierungen. München 1963
[5] Folkerts, M. e.a. (Hrsg.): Maß, Zahl und Gewicht – Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung. Ausstellungskatalog, Wolfenbüttel 2001 (2)
[6] Roriczer, M.: Das Büchlein von der filialen Gerechtigkeit und Die Geometria Deutsch. Faksimile der Originalausgaben. Regensburg 1486 und 1487, Wiesbaden 1965
[7] Dürer, A.: Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit. Faksimile der Originalausgabe. Nürnberg 1525, Zürich 1966
[8] Aventinus, J.: Encyclopedia orbisque doctrinarum. Ingolstadt 1517
[9] Reisch, G.: Margarita Philosophica. Straßburg 1504 (2)

Ildar Safuanov, Naberezhnye Chelny, Russia

GENETIC APPROACH IN THE SOVIET MATHEMATICAL EDUCATION

The principle of genetic approach in teaching mathematics requires that the method of teaching a subject should be based, as far as possible, on natural ways and methods of knowledge inherent in the science. The teaching should follow ways of the development of knowledge. That is why we say: «genetic principle», «genetic method».

Probably, the first who used the expression «genetic teaching» was prominent German educator F.W.A.Diesterweg (1790-1866) in his published in 1835 «Guide to the education of German teachers»: «...The formal purpose requires genetic teaching of all subjects that admit such teaching because that is the way they have arisen or have entered the consciousness of the human …Though a pupil covers in several years a road that took millenniums for the mankind to travel. However, it is necessary to lead him/her to the target not sightless but sharp-eyed: he/she must perceive truth not as a ready result but discover it. The teacher must supervise this expedition of discoveries and, hence, to be present not only as a mere spectator...

The correct method of teaching is not only the external form imposed to a subject: it arises from its nature, makes its essence. If the method really matches a nature of individual pupil it matches also the essence of a science...

The method of teaching of each subject should match its source or principle… Otherwise the method will be arbitrary, borrowed from the outside, not following from the nature of a subject, and rather being contradicting prescription …» (Diesterweg, 1962).

Earlier the similar ideas were put forward by the philosopher Hegel (1959, p. 15): «Separate individual should also substantially pass through stages of formation of universal spirit, but as the forms already left by spirit, as stages of the road already developed and smoothed... Things that in earlier epoch concerned spirits of gentlemen are reduced to knowledge, exercises and even games of teenagers, and in pedagogical successes we acknowledge the history of education of the whole world as though outlined in a compressed sketch». Certainly, ideas of genetic principle had been expressed prior to Hegel, too. For example, much earlier G.W. Leibnitz (1880) expressed a similar idea: “I tried to write in such way that a learner could always see the inner foundation of things studied, that he could find the source of the discovery and, consequently, understand everything as if he invented that by himself”.

In 20th century F.Klein (1987) used the term «Genetic discourse» in his famous book «Elementary mathematics from the higher point of view»: “One could characterise the way of teaching that dominates in majority of our schools by words «visually» and “genetically”. It means that subject matter develops gradually on the basis of well-known, visual representations. This is the radical difference from the logical and systematic method of teaching that dominates at universities”.

Thus, the genetic approach to mathematics teaching has a long history.

The genetic teaching of mathematics is opposite to formal teaching based on merely logical order of the presentation of concepts and theorems.

The weakness of the formal method of teaching was evident for Russian educators as early as in the middle of 19-th century. At that time very popular in Russian gymnasiums and schools was the method of arithmetic teaching developed by German educator Grubbe, and his method was based on rot learning , mechanical repetition and formal memorisation. The first Russian educator who protested against Grubbe’s formal style of teaching mathematics was famous writer L. Tolstoy. He taught elementary mathematics to children in his village Yasnaya Polyana. L. Tolstoy argued that learning of mathematics should be based on the practical experience of pupils. Prominent mathematicians Lobachevsky, Ostrogradsky and other looked for more effective and natural ways of teaching university mathematics.

In the end of 19-th century and in the beginning of the 20-th century, research in the field of mathematics education rapidly developed in Russia. Several Congresses of mathematics teachers had been organised. One of the leading figures in this development was Semyon Shohor-Trotsky, author of mathematical textbooks for elementary mathematics. He invented the «Method of expedient tasks» which was essentially similar to genetic method. He wrote in one of his methodical guidebooks for mathematics teachers:

«The true method consists in that we should put a child in conditions at which human mind started inventing arithmetic, we should make him a witness of that invention. But it is not sufficient today. Nowadays we should aim at putting a child in conditions at which she/he would become not only a witness but rather the active participant of that invention» (Shohor-Trotsky, , p. 7).

After the October Revolution the method of S. Shohor-Trotsky was rediscovered by prominent mathematics educators A.V.Lankov and K.F.Lebedintsev as a *concrete-inductive* method.

Generally, in twenties of the 20-th century, when post-revolutionary Russia searched for new effective methods for mass education, the attention of the mathematics educators of was attracted to the genetic approach.

In the "Minimal curriculum of uniform labour school of the 2-nd level" (Leningrad, 1925) it was recommended "to widely use the genetic method of teaching" (p. 37). This tendency was also reflected in guidebooks, widespread at that time, on methods of teaching mathematics.

Prominent mathematics educator N. A. Izvolsky demonstrated his original and deep understanding of the genetic approach (not reduced to the historical one) in a book «Methods of teaching geometry» published in 1924:

"In the usual course of teaching neither the text-book, nor the teacher do not make anything in order to answer (in some form) the question about the origin of the theorems. Only in rare instances we see exceptions: some teachers in this or that form pay their attention to the origin of the theorems; for the pupils of this teacher the geometry course accepts other character and ceases to be the mere set of the theorems. Moreover, sometimes some of the pupils, independently of both a text-book and the teacher, half-consciously come to the idea that a theorem has appeared not because of the wish of the author of a text-book or the teacher, but rather because it gives the answer to the problem that has naturally arisen during the previous work... Perhaps this idea of the development of the content of geometry does not reflect to a great extent the historical path of this development, but this view is the answer to the naturally arising question: how the development of the content of geometry could be explained? For the teaching of geometry to have such view of the subject-matter is extremely valuable..." (p. 8).

Izvolsky expresses the essence of the genetic approach by the following sentence: "A view of geometry as a system of investigations aiming at finding answers to the consequently arising questions" (p. 9).

The authors of textbooks A.V.Lankov and K.F.Lebedintsev used this approach. In particular, A.V.Lankov (1925) refers to the biogenetic law (p. 40). Close to the genetic method is offered by K.F.Lebedintsev (1925) concrete-inductive method originating, in turn, from the method of expedient tasks introduced by S.I.Shohor-Trotsky.

Such prominent mathematics educators of the post-war period as V.M.Bradis and N.M. Beskin also applied the genetic approach in methods of teaching geometry.

V.M.Bradis, considering the genetic principle in the teaching of mathematics, wrote:

"The experience of the teaching definitely shows that the quality of mastering of a mathematical subject matter will essentially win if each new concept, each new proposition is introduced so that its connection with things already familiar to the pupil is clear and the expediency of its study is visible. For pupil, most convincing justification of each new concept and proposition is a practical activity close, whenever possible, to their experience « (Bradis, 1949, p. 44-45).

N.M.Beskin (1947) wrote: «... It is necessary to show geometry to the pupils not in a complete, crystallised but in the process of development. The method, which we recommend, is called genetic. This method makes each pupil the active creator of geometry: we put before her/him a problem, the process of its solving gives rise to separate theorems and entire sections of geometry».

Thus, we see that in Russian and Soviet mathematics education many researchers, mathematicians as well as mathematics educators, strongly contributed to the development of the genetic teaching of mathematics.

References:

Beskin, N.M. (1947). *Didactics of Geometry.* M.-L. Uchpedgiz (Russian)..
Bradis, V.M. (1949). Methods of teaching mathematics at secondary school. M. Uchpedgiz (Russian)..
Diesterweg, F.A.W. (1962). *Wegweiser zur Bildung fuer deutsche Lehrer und andere didactische Schriften*. Berlin.
Hegel, (1959). *Works, v. 4.* M. (Russian).
Izvolsky, N. A. (1924). *The didactics of geometry.* SPb (Russian).
Klein, F. (1987). *Elementary mathematics from the higher point of view.* M. Nauka (Russian).
Lankov, A.V. (1925). On the history of progressive ideas in Russian didactics of Mathematics. M. (Russian).
Lebedintsev, K.F. (1925). *Introduction to the modern didactics of mathematics*. Kiev, GIU (Russian).
Leibnitz, G.W. (1880). *Mathematische Schriften.* Berlin.
Shohor-Trotsky, S. (1915). *Didactics of arithmetics.* SPb. (Russian).

Jutta SCHÄFER, Pforzheim
Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule

Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule

„Rechenschwäche“ in der Hauptschule ist ein Phänomen, dem bisher wenig Beachtung geschenkt wurde, obwohl seitens ausbildender Betriebe seit Jahren über gravierende Mängel der Auszubildenden in grundlegenden Rechenfertigkeiten geklagt wird. Die internationale Vergleichsstudie PISA 2000 zeigte auf, dass die Leistungen im Bereich „Mathematische Grundbildung“ bei mehr als 17 % der 15-jährigen HauptschülerInnen noch *unterhalb* der ersten Kompetenzstufe[1] liegen. Insgesamt ist bei *jedem vierten Jugendlichen* in Deutschland der erfolgreiche Übergang in eine berufliche Ausbildung und Tätigkeit durch Mängel in der mathematischen Grundbildung gefährdet.[2]

Das Promotionsprojekt „Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule“ ist eingebettet in das interdisziplinäre Forschungs- und Nachwuchsprojekt „Brennpunkt Hauptschule“ der Pädagogischen Hochschule Freiburg, das aus Mitteln des Landes Baden-Württemberg finanziert wurde. Im Rahmen der explorativen Studie wurden Erkenntnisse darüber gewonnen, an welchen Stellen die Lernprozesse so genannter rechenschwacher SchülerInnen bereits in der Eingangsstufe der Hauptschule behindert oder blockiert sind. Außerdem wurden anhand halbstandardisierter Interviews Einstellungen und „innere Bilder“ rechenschwacher und nicht rechenschwacher SchülerInnen zur Mathematik erhoben sowie Wahrnehmungsleistungen im Bereich der sprachfreien auditiven Wahrnehmung und der schnellen, nichtzählenden Anzahlerfassung (Simultanerfassung/subitizing bzw. Quasisimultanerfassung) untersucht und mit einer gleichaltrigen Kontrollgruppe ohne Lernstörungen verglichen.[3]

Ergebnisse der Lernstandsanalyse

Zur Lernstandsanalyse bei rechenschwachen SchülerInnen des fünften Schuljahrs wurde eigens ein diagnostisches Instrument entwickelt, das detaillierte und individuelle Lernstandsanalysen im Bereich arithmetischer Kenntnisse und Fertigkeiten ermöglicht.

Überprüft wurden Zahlverständnis bei zweistelligen Zahlen, verbale Zählfertigkeit im Zahlenraum von 1–1500, Operationsverständnis sowie Rechenfertigkeit in den Grundrechenarten. Dazu wurden insgesamt fünf *Auf-*

[1] Kompetenzstufe 1: Rechnen auf Grundschulniveau.

[2] Vgl. Baumert et al. (2001). PISA 2000. Basiskompetenzen von Schüler/innen im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich; S. 168.

[3] Schäfer, J. (2005). Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Lernstand, Einstellungen und Wahrnehmungsleistungen – Eine empirische Studie. Hamburg: Dr. Kovač.

Jutta SCHÄFER, Pforzheim

Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule

gabenserien mit bis zu vier *Aufgabengruppen* konstruiert, die sich hinsichtlich der Anforderungen und des Schwierigkeitsgrades unterscheiden.
Beim Erfassen und Analysieren des Lernstands rechenschwacher Schulkinder muss berücksichtigt werden, dass das Voraussetzungsrepertoire – die „Lernbasis" – bei dieser Schülergruppe stark eingeschränkt ist. Man kann davon ausgehen, dass der Kenntnisstand rechenschwacher Kinder um bis zu vier Jahre vom aufgrund des Alters und der derzeit besuchten Klassenstufe zu erwartenden Lernstand abweicht. Um im unteren Leistungsbereich ausreichend zu differenzieren, wurden Aufgabengruppen konstruiert, die von der Mehrheit der HauptschülerInnen *ohne* Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht spontan und richtig gelöst werden.
Die Aufgabengruppen beginnen jeweils mit einer sehr einfachen, mit dem Wissen des Anfangsunterrichts zu bewältigenden Aufgabe im Zahlenraum 1–20 (*„Basisaufgabe"*). Die „leichten" Einstiegsaufgaben haben unter anderem die Funktion, den zu überprüfenden SchülerInnen Sicherheit und das Gefühl eigener Kompetenz in der prinzipiell verunsichernden Testsituation zu vermitteln. Außerdem zeigten die *„Basisaufgaben"* im Zahlenraum bis 20, inwieweit SchülerInnen im Bereich elementarer Rechenfertigkeiten im kleinen Zahlenraum (noch) kompetent sind.
Alle Aufgaben sind so konstruiert, dass die Lösungen mündlich bzw. halbschriftlich ermittelt werden können. Auf ein in dieser Klassenstufe mögliches Überprüfen des Beherrschens schriftlicher Rechenverfahren wurde verzichtet, da sich hierbei erfahrungsgemäß nicht zeigt, welche mathematischen Konzepte ein Kind sich angeeignet hat, sondern lediglich das Beherrschen prozeduraler Prozesse (Verfahren) überprüft wird.
Beim Überprüfen des Zahlverständnisses und der verbalen Zählfertigkeit wurde deutlich, dass ein beträchtlicher Teil der rechenschwachen Schulkinder noch im fünften Schuljahr kein sicheres Verständnis zweistelliger Zahlen erworben hat. Die verbale Zählfertigkeit ist bereits im Hunderterraum nur mangelhaft ausgebildet. Das Operationsverständnis der überprüften SchülerInnen ist vor allem im Hinblick auf das Multiplizieren und Dividieren kaum entwickelt. Mehr als die Hälfte der Versuchsgruppe verfügt über kein ausreichend entwickeltes Verständnis des Multiplizierens. Fast 90 % der überprüften rechenschwachen SchülerInnen fehlt bereits in den Basisaufgaben des *Dividierens* ein sicheres Verständnis. Das problematische Operationsverständnis des Dividierens erklärt u. a. die Tatsache, dass die Rechenfertigkeit der überprüften Kinder beim Dividieren bereits im Zahlenraum bis 20 nur mangelhaft ausgeprägt war. So wurde z. B. die Aufgabe *18 : 2* von weniger als 50 % der Versuchsgruppe korrekt gelöst. Häufigster Fehler dabei war, „einfach *die 1* vor das Ergebnis aus *8 : 2* zu hängen" und somit *14* statt *9* als Ergebnis zu erhalten.

Jutta SCHÄFER, Pforzheim

Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule

SchülerInnen, die nicht über ein sicheres Operationsverständnis in den Grundrechenarten verfügen, fehlen außerdem essentielle Voraussetzungen für das Verstehen und Bewältigen von Sachproblemen (z. B. von Schlussrechnungen). Ebenso wenig kann auf dieser Verständnisgrundlage erwartet werden, dass diese SchülerInnen in den folgenden Schuljahren erfolgreich Grundlagen des Bruchrechnens begreifen werden, die ihrerseits unverzichtbare Voraussetzung für Dezimal-, Prozent- und Zinsrechnen usw. sind.

Ergebnisse im Bereich Wahrnehmungsleistungen

Die Erfassung von Wahrnehmungsleistungen rechenschwacher Kinder erfolgte in Kooperation mit der Universität Freiburg (Arbeitsgruppe Optomotorik, vertreten durch Prof. Dr. Burkhart Fischer). Zur Messung von *sprachfreien auditiven Wahrnehmungsleistungen (SAW)* wurde ein standardisiertes subjektives Testverfahren herangezogen, das fünf voneinander unabhängige Low-Level-Funktionen überprüfte.[4] Bei fast 75 % der Versuchsgruppe zeigte sich, dass die *SAW* im Vergleich zur gleichaltrigen Kontrollgruppe ohne Lernstörungen nicht altersgemäß entwickelt sind. Dies gilt besonders für die Bereiche „Tonhöhe“ und „Zeitordnung“.
Zur Messung der *schnellen, nichtzählenden Wahrnehmung kleiner Anzahlen* (Simultanerfassung/subitizing) wurde eigens ein standardisierter Test konstruiert.[5] Im Testverlauf mussten die Kinder insgesamt 170 Punktemuster mit je 1–9 Items erkennen. Die Präsentationszeit der Punktbilder betrug 0,1 s. In dieser kurzen Zeitspanne ist es den Augen nicht möglich, Blicksprünge zu machen, so dass die gezeigte Anzahl tatsächlich „simultan“ auf die Netzhaut projiziert wird. Gemessen wurden die Reaktionszeiten sowie die prozentualen Anteile richtig erkannter Anzahlen. Die Ergebnisse zeigen, dass die Reaktionszeiten beim Bearbeiten der gestellten Aufgaben bei den überprüften rechenschwachen Schulkindern im Vergleich zur Kontrollgruppe signifikant länger sind ($p < 0{,}01$ für die Grundreaktionszeit bzw. $p < 0{,}001$ für die Reaktionszeit beim Erfassen von 2–4 Items). Gleichzeitig machten die untersuchten rechenschwachen Kinder deutlich mehr Fehler beim Bearbeiten der gestellten Aufgaben als die Kontrollgruppe ($p < 0{,}05$). Ob dieser Entwicklungsrückstand *kausal* zur Entstehung von Störungen beim Rechnenlernen beiträgt, ist jedoch bisher ungeklärt. Es wird aber angenommen, dass die verlangsamte Entwicklung der Sehfähigkeit zum simultanen Erfassen kleiner Anzahlen bereits bei Schuleintritt zu beobachten war, aber nicht beachtet wurde, und möglicherweise dazu führ-

[4] Gemessen wurden: Lautstärke, Tonhöhe, Lückenerkennung, Zeitordnung und Seitenordnung.
[5] Vgl. Fischer, B./Schäfer, J. (2002). Die Entwicklung der Simultanerfassung bei Rechenschwäche. In: Akzente 3/2002, S. 50-52.

Jutta SCHÄFER, Pforzheim

te, dass betroffene Kinder die im Erstrechnen eingesetzten Arbeitsmittel, die nichtzählendes Erfassen von 3–4 Elementen zumeist voraussetzen, nicht gewinnbringend nutzen konnten.
Fischer et al. konnten inzwischen zeigen, dass bei 75 % der Kinder durch gezieltes Training eine Verbesserung dieser Wahrnehmungsleistung möglich ist.[6] Weitere Untersuchungen, z. B. kontrollierte Studien zum Einfluss des Trainings auf die Rechenfertigkeit, sind dringend vonnöten.

Kritik an diagnostischen Kriterien

Das Kriterium der in der Diagnostik üblichen Unterscheidung in *„isolierte Rechenstörung“* bzw. *„kombinierte Störungen“* (mit gleichzeitiger Lese- und/oder Rechtschreibschwäche, AD(H)S, usw.) erwies sich als ungeeignet in Bezug auf Lösungsstrategien, Fehlerhäufigkeit und Fehlertypen rechenschwacher Kinder. Die Hypothese, dass sich die beiden Gruppen hinsichtlich der gemessenen Wahrnehmungsleistungen signifikant unterscheiden, wurde ebenfalls verworfen. Dagegen zeigen sich bei einer Unterscheidung in *„zählend“* bzw. *„nichtzählend“* rechnende SchülerInnen gravierende Unterschiede. *Zählend rechnende SchülerInnen* haben ein deutlich schlechteres Operationsverständnis als nichtzählend rechnende, lösen signifikant weniger Aufgaben korrekt als diese und verfügen kaum über effiziente Lösungsstrategien. Beim Messen der Leistungen der Simultanerfassung zeigten sich dagegen *keine* signifikanten Unterschiede zwischen zählend bzw. nichtzählend rechnenden SchülerInnen. Interessant, aber völlig ungeklärt, ist die Tatsache, dass bei den überprüften *nichtzählend* rechnenden Kindern die *SAW* signifikant schlechter entwickelt sind als bei zählend rechnenden. Auch hier sind Folgeuntersuchungen notwendig.

Ausblick

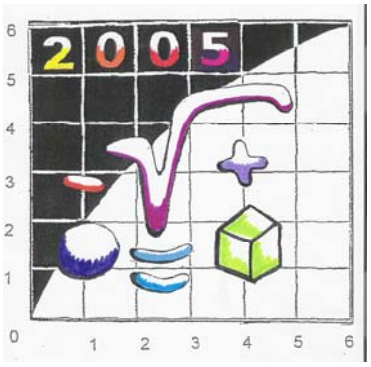
Die Entwicklung und Realisierung präventiver Maßnahmen in Kindergarten und Grundschule, sowie die Konzeption effektiver Förderkonzepte für bereits bestehende Störungen beim Rechnenlernen sind weitere mögliche Schwerpunkte nachfolgender Untersuchungen. Nicht genug betont werden kann auf der Basis der gefundenen Ergebnisse, dass in der LehrerInnen- (und ErzieherInnen-)ausbildung das Bewusstsein für die „zentrale, Weichen stellende Funktion des Anfangsunterrichts“[7] stärker als derzeit üblich ins Blickfeld gerückt werden muss, um allen Kindern einen gelingenden Einstieg in die „Welt der Mathematik“ zu ermöglichen.

[6] Fischer, B. (2003). Hören, Sehen, Blicken, Zählen: Teilleistungen und ihre Störungen. Bern: Hans Huber.
[7] Schipper, B. (2001). Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. Occasional Paper 182 der Universität Bielefeld.

Ulrike SCHÄTZ, München

Der TAG DER MATHEMATIK motiviert für Mathematik

1. Idee und Intention



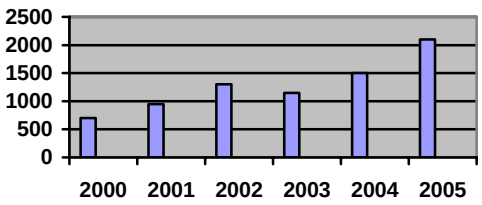
Möglichst viele Menschen, und zwar Kinder, Jugendliche und Erwachsene, für Mathematik zu interessieren und ihnen sowohl die Bedeutung wie auch die Attraktivität der Mathematik näher zu bringen war ein Anliegen, um dessen Verwirklichung es bei den Aktivitäten im World Mathematical Year 2000 ging. Aus meiner Erfahrung, dass Schülerinnen und Schüler durchaus zu interessieren und manchmal sogar zu begeistern sind, entstand in diesem WMY 2000 die Idee eines TAGs DER MATHEMATIK an der Ludwig-Maximilians-Universität München für Kinder und Jugendliche der Jahrgangsstufen 5 bis 10.

2. Programm

An diesem TAG DER MATHEMATIK sollten die Zehn- bis Sechzehnjährigen zum ersten Mal „Universitätsluft schnuppern“ und Vorlesungen von Mathematikprofessoren und -professorinnen im Hörsaal erleben, aber vor allem selbst mathematisch tätig werden können. So kam es zur Idee der Vorträge, Wettbewerbe und Workshops an diesem TAG DER MATHEMATIK. Wegen der unterschiedlichen mathematischen Vorkenntnisse der Teilnehmer und Teilnehmerinnen werden die Wettbewerbe in vier verschiedenen Altersgruppen (für die Jahrgangsstufe 5, für die Jahrgangsstufe 6, für die Jahrgangsstufen 7/8 und für die Jahrgangsstufen 9/10) angeboten. Die Bearbeitung der Wettbewerbsaufgaben erfolgt in Teams aus drei oder vier Personen; dadurch soll die Fähigkeit und die Bereitschaft zur Zusammenarbeit, aber auch das Gespräch und der Gedankenaustausch über mathematische Probleme gefördert werden. „Mathematik zum Anfassen“ ermöglichen die Workshops und die Mathematik-Rallye.

3. Entwicklung der Teilnehmerzahl

Anzahl der Teilnehmer



Der Einladung des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik zum TAG DER MATHEMATIK folgten im Jahr 2000 etwa 700, im Jahr 2004 etwa 1500 und im Jahr 2005 etwa 2100 Schülerinnen und Schüler nicht nur aus München (und Umgebung),

sondern auch aus anderen Teilen Bayerns. Dabei nehmen Jahr für Jahr etwa gleich viele Jungen und Mädchen am TAG DER MATHEMATIK teil; etwa die Hälfte aller Teilnehmenden kommt aus 5. und 6. Klassen.

4. Wettbewerbe

Für jede der vier Altersgruppen werden jeweils 15 dem Vorwissen entsprechende Wettbewerbsaufgaben von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad gestellt, die dann (bei richtiger Lösung) mit drei, vier bzw. fünf Punkten bewertet werden. Beim Lösen dieser Aufgaben geht es weniger um das Anwenden von gängigen mathematischen Methoden und um formales Rechnen als vielmehr um das Finden und Umsetzen von Lösungsstrategien, um Kreativität und mathematisches Verständnis. Dabei wird jeweils eine der 15 Aufgaben für alle vier Altersgruppen gleichlautend gestellt. So wurde z. B. im Jahr 2004 als gemeinsame Aufgabe für alle Altersgruppen die folgende Aufgabe gewählt:

> Alle natürlichen Zahlen von 1 bis 50 werden nebeneinander geschrieben und bilden so die Riesenzahl 123456789101112 … 484950.
>
> Wie viele Stellen hat diese Riesenzahl und welchen Wert hat ihre Quersumme ?

Dabei ergab sich, dass diese Aufgabe von den Fünftklässlern kaum weniger gut gelöst wurde als von den Zehntklässlern.
Jedes Jahr stellt man wieder fest, wie begeistert und aktiv die Schüler und Schülerinnen – wegen der großen Teilnehmerzahlen auf etwa zwanzig verschiedene Räume verteilt – die Wettbewerbsaufgaben bearbeiten; sie diskutieren, knobeln und suchen mit hochroten Köpfen nach den richtigen Lösungen. Die Bearbeitungen, die in Teams zu drei oder vier Personen erfolgen, zeigen unterschiedliche Strategien und auch unterschiedliches Vorgehen beim Lösen der Wettbewerbsaufgaben. Einige teilen sich die Aufgaben untereinander auf; meist bearbeiten sie jedoch die Aufgaben im Team.

Schülerinnen und Schüler aus 5. Klassen (links)
Schülerinnen einer 8. Klasse (rechts)

5. Workshops und Mathematik-Rallye

Nach der Mittagspause, in der sich die Kinder und Jugendlichen mit Getränken, Obst und belegte Semmeln stärken können, finden Workshops, die wegen des Andrangs jeweils zweimal nacheinander durchgeführt werden, und eine Mathematik-Rallye statt.

Workshops

Kreisel	Zauberhafte Zahlen
Dodekaeder	Platonische Körper
Seifenblasen besonderer Art	Falten eines Kaleidozyklus
Spiegelbilder	Geometrie als Spiel
Zerrbilder	Origami-Kreisel
Origamiwürfel	Magische Quadrate
Multimedia-Kopfrechen-Show	Falten eines Hexaflexagons
Virtuelle Welten am Computer	Denksportaufgaben mit Münzen und Streichhölzern

Wegen der großen Anzahl der Teilnehmenden können nicht alle Kinder und Jugendlichen einen Workshop besuchen. Für sie besteht die Möglichkeit, einen mathematischen Vortrag zu hören oder an einer Führung durch das Museum „Reich der Kristalle“, das sich im gleichen Haus wie das Mathematische Institut befindet, teilzunehmen.

Vorträge

Merkwürdige Linien im Dreieck
Von denkenden Kaffeetassen, Internetfernsehen und anderer Computerzukunft
Wie Daten aus dem Web automatisch abgeholt werden können
Wege pflastern

6. Bewertung der Wettbewerbsaufgaben

Nach Beendigung der Wettbewerbe hängen die Lösungen der Wettbewerbsaufgaben in Schaukästen aus, so dass sich die Kinder und Jugendlichen über die richtigen Lösungen informieren können. Während der Mittagspause und in der Zeit, in der die Workshops stattfinden, werden die Wettbewerbsaufgaben aller Teams korrigiert und bewertet. Dies erfolgt durch sechzig Lehrkräfte und Studierende, die die Bearbeitungen korrigieren, beurteilen und bewerten, nochmals überprüfen und dann nach erreichter Punktzahl ordnen und so die Siegerteams der vier Altersgruppen ermit-

teln. Um die Bewertung der Lösungen der Wettbewerbsaufgaben möglichst gerecht zu gestalten, wird jede einzelne der insgesamt (vier mal fünfzehn, also) sechzig Wettbewerbsaufgaben jeweils von derselben Person korrigiert, der außerdem noch ein Bewertungsschlüssel für diese Aufgabe vorliegt.

7. Preisverleihung

Den Abschluss und Höhepunkt des TAGs DER MATHEMATIK bildet die Verleihung der (Geld-) Hauptpreise und der Buchpreise.
Alle Teilnehmer und Teilnehmerinnen erhalten eine Urkunde; die drei besten Teams in jeder Altersgruppe Geldpreise:

1. Preis 250 €
2. Preis 150 €
3. Preis 100 €

An die nächstbesten Teams werden Buchpreise verliehen.
Die beste teilnehmende Schule wird mit einem Geldpreis von 500 € ausgezeichnet.

8. Zusammenfassung

Jüngere Schüler und Schülerinnen die Mathematik vielseitig und positiv erleben zu lassen und ihre Neugier zu wecken und zu erhalten ist die Grundintention des TAGs DER MATHEMATIK. Das Interesse an diesem Tag, zu dem ein anspruchsvoller mathematischer Wettbewerb und die Beschäftigung mit Mathematik bei den Vorträgen und in den Workshops wesentlich beitragen, hat von Jahr zu Jahr zugenommen; die Begeisterung der Mädchen und Jungen an diesem Tag ist für alle sichtbar und spürbar. Eine Schülerin hat dies so zusammengefasst:
„Ich nehme heuer zum dritten Mal am Tag der Mathematik teil. Warum ? Ich denke vor allem wegen der tollen Atmosphäre und dem Spaß an der Mathematik; das Knobeln beim Wettbewerb ist spannender als die Mathematik in der Schule. Auch herrscht ein tolles Wettkampffeeling, ohne dass man verbissen sucht, zu gewinnen. Es gibt nicht nur den Wettbewerb, auch Workshops und Vorlesungen in den Hörsälen, sodass man sich schon fast fühlt wie ein Student an der LMU.“ Kathrin 9 b

Christine SCHERRES, Universität Bremen

Erfassung der Qualität von Arbeitsprozessen bei natürlicher Differenzierung: Erste Einblicke in eine qualitative Fallstudie

Funktioniert natürliche Differenzierung wirklich?

Angesichts der steigenden Bewusstheit für die Heterogenität der meisten Lerngruppen gewinnen Konzepte zur inneren Differenzierung eine zunehmende Bedeutung in Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts. Während in eng geführten Ansätzen der Binnendifferenzierung die Lehrkraft einzelnen Schüler(-gruppen) Aufgaben auf unterschiedlichem Niveau zuweist, setzt das Konzept der natürlichen Differenzierung auf die selbstdifferenzierende Wirkung bestimmter Aufgaben und Lernumgebungen, also darauf, dass die Schülerinnen und Schüler die gestellten Anforderungen jeweils auf ihrem Niveau bearbeiten (vgl. Wittmann et al. 1997, Heymann 1991).

Ein Blick auf die Forschungslage zeigt, dass einige empirische Untersuchungen zur Differenzierung bereits existieren, z.B. unterstreichen Weinert/Helmke (1996) die Wichtigkeit von unterrichtsdifferenzierenden Maßnahmen in Bezug auf die Schulleistungsförderung und Lipowsky (1999) trifft Aussagen über Lernzeitnutzung und Konzentration in offenen Unterrichtssituationen.

Bisher gibt es allerdings noch keine empirischen Resultate zu der Frage, ob natürliche Differenzierung tatsächlich in dem beschriebenen Sinne niveaugerecht funktioniert, sich der selbstdifferenzierende Effekt also im intendierten Sinne einstellt. Zwar sind eindrucksvolle Beispiele bekannt, auf welchen unterschiedlichen Niveaus bestimmte Aufgaben bearbeitet werden können (z.B. Hengartner 1999), doch wie ist die Qualität der Arbeitsprozesse gemessen an der Leistungsfähigkeit der einzelnen Schülerinnen und Schüler wirklich?

Unter welchen Bedingungen natürliche Differenzierung niveaugerecht funktioniert, lässt sich somit nur durch eine Betrachtung der Qualität der Arbeitsprozesse ermitteln. Dies empirisch zu untersuchen erweist sich insofern als nicht einfach, als für die Erfassung der Qualität des Arbeitsprozesses, die im Wesentlichen durch die Qualität der Kooperation und der fachlichen Tiefe geprägt ist, bisher keine für diesen Untersuchungszweck angemessenen Mittel zur Verfügung stehen.

Daher wird zunächst eine Vorgehensweise entwickelt, um die Qualität eines Arbeitsprozesses angemessen zu beschreiben. Die Relationssetzung der Qualität des Arbeitsprozesses zum individuellen Leistungsvermögen eines Lernenden soll dann in einem nächsten Schritt eine Aussage über die Angemessenheit des Niveaus des Arbeitsprozesses zulassen. In einem weiteren Schritt können dann unterrichtliche Bedingungen ausgemacht werden, unter denen Arbeitsprozesse sich im Rahmen einer natürlichen Differenzierung möglichst niveaugerecht ansiedeln.

Untersuchungsdesign

Im Rahmen einer qualitativen Untersuchung werden Kategorien entwickelt, um die Qualität von Arbeitsprozessen zu erfassen. Das Datenmaterial für die empirische Untersuchung wurde durch videographierte Beobachtung einer offenen Lernsituation in einer 5. Gymnasialklasse gewonnen, die im Rahmen eines Stationenlernens an einer natürlich differenzierenden Aufgabe arbeitete: *Findet möglichst viele unterschiedliche Würfelnetze.*

Diese Aufgabe bietet eine Bandbreite möglicher fachlicher Bearbeitungstiefen, da Lösungsstrategien und Entdeckungen auf unterschiedlichen Niveaus möglich sind: Würfelnetze können recht „zufällig“ gefunden werden, es kann aber auch ein strategisches Vorgehen bevorzugt werden. Zwischen diesen beiden fachlichen Extrema sind unterschiedliche Abstufungen der fachlichen Tiefe denkbar. Hinsichtlich der Überprüfung von doppelten Würfelnetzen sind Vorgehensweisen denkbar, die das Überprüfen auf „doppelte Netze“ überhaupt nicht berücksichtigen, bis hin zu Lernenden, die zunächst ein gemeinsames Verständnis von „gleichen Würfelnetzen“ besprechen und dann eine Vorgehensweise erarbeiten, die eine systematische Überprüfung beinhaltet. Auch in der Argumentationsweise hinsichtlich der Frage, ob tatsächliche alle Würfelnetze gefunden wurden, lässt die Aufgabe qualitative Abstufungen zu. So können hier die Argumente recht pragmatisch sein, wie beispielsweise „Das Plakat ist voll.“ oder „Wir haben keine mehr gefunden.“. Die Antwort lässt sich aber auch durch eine systematische Vorgehensweise fachlich tiefer begründen, wenn systematisch alle Möglichkeiten eines Würfelnetzes ausgeschöpft werden.

Die videographierten Aufnahmen wurden mittels Szenenbeschreibungen inhaltlich gegliedert und zusammengefasst. Diese Sequenzen wurden codiert, wobei durch Vergleich der Szenen und der Paare untereinander Kategorien gebildet wurden. Die Kategorien sollen der sorgfältigen Analyse der einzelnen Arbeitsprozesse hinsichtlich ihrer Qualität dienen, aber auch einen Vergleich der Arbeitsprozesse untereinander ermöglichen.

Erste Beobachtungen

1. Die fachliche Tiefe des Arbeitsprozesses einer Aufgabe kann von der fachlichen Qualität des Lernergebnisses stark abweichen. Ein Rückschluss von der Qualität des Arbeitsergebnisses auf den dazugehörigen Arbeitsprozess ist somit nicht ohne weiteres zulässig.

   Beispiel: Ina und Agneta produzieren mit sieben unterschiedlichen Würfelnetzen ein Arbeitsergebnis, das lediglich einem durchschnittlichen Bewertungsbereich einzuordnen ist. Ihr Arbeitsprozess erreicht im Gegensatz dazu eine eindrucksvolle fachliche Tiefe: Sie haben einen Weg gefunden, um zu überprüfen, ob es sich tatsächlich um ein Würfelnetz handelt und führen diese Überprüfung auch konsequent bei jedem gefundenen Netz durch. Sie zeigen Verantwortung für die Aufgabenstellung, indem sie gleiche Netze vermeiden wollen. Hierfür führen sie stets einen Vergleich eines neu produzierten Würfelnetzes mit bereits vorhandenen Netzen durch und entwickeln dafür eine gemeinsame Vorstellung von der „Gleichheit“ von Würfelnetzen. Sie haben selbstständig eine Vorgehensweise gefunden, die von fachlicher Tiefe zeugt. Sie tauschen sich über Strategien bezüglich des Findens von Würfelnetzen aus und entwickeln eine systematische Vorgehensweise zum Finden von weiteren Würfelnetzen.

2. Ein Arbeitsprozess kann bezüglich seiner fachlichen Tiefe großen Schwankungen unterliegen.

   Beispiel: Peer und Lukas beginnen bei der Bearbeitung der Aufgabe mit einer relativen fachlichen Tiefe, indem sie auf doppelte Würfelnetze überprüfen und auch über die Definition von „doppelten Netzen“ explizit kommunizieren. Zum Ende der Lernzeit hin unterliegt ihre Produktion der Würfelnetze eher dem Zufall, auf „doppelte Netze“ wird nicht mehr überprüft.

3. Erste Beobachtungen lassen darauf schließen, dass Lernende bezüglich ihrer Arbeitsprozesse teilweise über- bzw. unterfordert sind, d.h. es gibt z.T. Diskrepanzen zwischen der Einschätzung des allgemeinen Leistungsvermögens und der Qualität der konkreten Arbeitsprozesse. Das Initiieren von niveaugerechten Arbeitsprozessen im Rahmen der natürlichen Differenzierung scheint also kein „Selbstgänger“ zu sein.

Fazit und Ausblick

Bereits erste Beobachtungen (vgl. Beobachtung 3) unterstreichen die Brisanz der Forschungsfrage, da insbesondere das Initiieren von *niveaugerechten Arbeitsprozessen* maßgeblich für das „Funktionieren“ von Differenzie-

rung ist. Auch die Diskrepanz der Qualität zwischen dem Arbeitsprozess und dem daraus resultierenden Arbeitsergebnis (vgl. Beobachtung 1) unterstreicht die Wichtigkeit der Forschungsfrage mit ihrer Fokussierung auf die Prozesse, denn eine reine Bewertung der Arbeitsergebnisse zur Einschätzung der Niveaugerechtheit würde zu kurz greifen.

Die Qualität der Arbeitsprozesse in ihrem Facettenreichtum adäquat zu erfassen, erfordert eine recht komplexe Betrachtungsweise. Die angestellte explorative, kategorienentwickelnde Analyse zeigt, dass dazu ganz unterschiedliche Aspekte einbezogen werden müssen: Argumentation, Kooperation, Begründung, Motivation, Durchhaltevermögen, Verantwortung, Präzision, Umgang mit Fehlern, Selbststeuerung, Selbstreflexion, Verantwortung, strategisches Vorgehen, Problembewusstsein, Arbeitsorganisation, Selbstständigkeit, Informationsbeschaffung, Ideenwanderung und Kreativität. Aus diesen Aspekten wird ein Kategoriensystem gebildet, mit dem eine Einordnung von Arbeitsprozessen möglich ist.

Ein solches Kategoriensystem ist auch für die Unterrichtspraxis von großer Relevanz, denn es unterstützt eine sensible Einschätzung von Arbeitsprozessen. Diese ermöglicht adaptives Handeln im Sinne von situationsgerechten, niveauregulierenden Impulsen, die ohne Kriterien zur Beurteilung von Arbeitsprozessen nur schwer möglich sind. Außerdem unterstützt es eine Beurteilung von differenzierenden Aufgaben hinsichtlich der von ihr initiierten Arbeitsprozesse. Auf der Basis eines entwickelten Kategoriensystems kann über die qualitative Einordnung von Arbeitsprozessen überprüft werden, ob ein Arbeitsprozess niveaugerecht stattfindet. Nur so können Bedingungen an das Differenzierungspotential offener Aufgaben hinsichtlich einer niveaugerechten Initiierung von Arbeitsprozessen formuliert werden.

Literatur

Lipowsky, Frank (1999): Lernzeit und Konzentration in: Die Deutsche Schule, 91 (2), S. 232-245

Hengartner, Elmar (1999): Mit Kindern lernen, Klett und Balmer Verlag, Zug

Heymann, Hans Werner (1991): Innere Differenzierung im Mathematikunterricht, in: Mathematik lehren 49, S. 63-66.

Weinert, Franz E./Helmke, Andreas (1996): Entwicklung im Grundschulalter, Psychologie Verlags Union, Weinheim.

Wittmann, Erich Ch. et al. (1997): Das Zahlenbuch im 4.Schuljahr. Lehrerband, Klett, Leipzig.

Wolfgang, SCHLÖGLMANN, Linz/Donau

Affekte und Mathematiklernen - Einige Anmerkungen

1. Einleitung

Die Beschäftigung mit Fragen des Mathematiklernens von Erwachsenen führte zu zahlreichen Gesprächen über deren Erfahrungen mit Mathematik in der beruflichen Tätigkeit im Alltag und auch mit dem schulischen Mathematikunterricht. Dabei berichteten beruflich durchaus erfolgreiche Personen, dass sie auch noch viele Jahre nach Beendigung ihrer Schulzeit Albträume hätten, in denen sie sich z.B. in Prüfungssituationen im Mathematikunterricht zurückversetzt fanden. In Berichten aus Mathematikkursen in der Erwachsenenbildung fanden sich auch Hinweise auf Lernblockaden, die bei einzelnen Lernenden auftraten und die das Lernen von Mathematik allgemein oder auch nur einzelne Teilgebiete betrafen. Nun gab es auch Erwachsene, die ihren Mathematikunterricht auch rückblickend durchaus positiv empfanden und sich darauf freuten sich wieder mit Mathematik zu beschäftigen, aber die negativen Berichte hinterließen einen stärkeren Eindruck, so dass ich mich im folgenden Beitrag vor allem diesen zuwenden werde.

2. Die phänomenologische Ebene

Affekte in Verbindung mit Mathematik bzw. Mathematiklernen können sich auf vielfältige und sehr unterschiedliche Weise manifestieren. Wie bereits erwähnt gibt es Berichte über positive oder negative Erlebnisse im Zusammenhang mit Mathematikunterricht, die auch eine hohe emotionale Färbung aufweisen können (siehe z.B. Ingleton & O'Regan, 2002). Besonders zahlreich finden sich in der Literatur Beobachtungen zum Problemlösen im Unterricht, die Hinweise auf die Freude über gelungene Problemlösungen, aber auch Frustration beim Scheitern liefern (Goldin, 2000). Es gibt aber auch Berichte über Lernblockaden, die einen erfolgreichen Lernprozess unmöglich machen. Eine besonders eindrucksvolle Darstellung einer Lernblockade findet sich in der Habilitationsschrift von S. Prediger (Prediger, 2004; 116-117). Jede Person, die Mathematik in einer Schule, einer Universität oder einem Mathematikkurs für Erwachsene unterrichtet hat, kennt emotionale Reaktionen z.B. in Prüfungssituationen. Geprüfte Personen können aufgrund ihrer Erregung die Kreide nicht mehr halten oder sie versagen bei Aufgabenstellungen, die sie in stressfreien Situationen problemlos bewältigen.

Bezüglich der hier nur angedeuteten Phänomene können wir, aufgrund der mit ihnen verbundenen Zeichen, erkennen, dass physiologische Vorgänge ablaufen, die Lernprozesse beeinflussen und über die Lernenden nur eine beschränkte Kontrolle haben. Affekte sind ein Thema, mit dem sich die Psychologie seit langer Zeit auseinandersetzt und auch zahlreiche Konzepte zu deren Klärung entwickelt hat. Affekte sind aber nicht nur ein individuelles Phänomen, sie sind auch ein Ausdruck der Persönlichkeit und Identität, was auf deren soziale Verankerung verweist. Seit etwa 25 Jahren beschäftigen sich auch die Neurowissenschaften verstärkt mit diesem Thema und verweisen auf die neurologischen und physiologischen Prozesse der Affekte und ihrer Einflüsse auf das Denken und Handeln von Personen (Schlöglmann, 2002).

3. Konzepte und Forschungsmethoden

McLeod (1992) beschrieb in seinem Übersichtsartikel zur Affektforschung in der Mathematikdidaktik drei Konzepte - Beliefs, Attitudes und Emotions - die sich vor allem durch ihre Intensität und Stabilität unterscheiden. Historisch gesehen wurden erstmals Attitudes zur Charakterisierung affektiver Einflüsse auf das Mathematiklernen verwendet. Diese erlangten besondere Bedeutung im Rahmen der Untersuchungen zu geschlechtsspezifischen Unterschieden in den Mathematikleistungen. So sah Fennema (1989) Affekte, die durch Geschlecht, soziale Gruppe etc. bedingt waren, als Verursacher der unterschiedlichen Ergebnisse bei Leistungstest. Als Messinstrument wurden die "Fennema-Sherman-Attitudes Scales" verwendet, bei denen Einstellungen und Haltungen in Bezug auf die Mathematik, die Sichtweisen der Person, der Eltern und der Lehrkraft sowie die Mathematikangst erhoben wurden.
Bezüglich der Beschreibung der Kategorie „Attitudes" herrscht keine einheitliche Sichtweise. Es wird einerseits eine enge Definition verwendet, die Attitudes nur als die emotionale Disposition gegenüber Mathematik sieht, während die weite Definition Beliefs als Teilkategorie der Attitudes verwendet und ihr damit eine stärkere kognitive Komponente zuweist (Di Martino & Zan, 2001).

Das in der mathematikdidaktischen Forschung meistverwendete Konzept ist das Beliefs-Konzept. Auch für dieses Konzept gibt es keine einheitliche Definition, wie Furinghetti und Pehkonen (2002) im Rahmen einer Evaluation der verschiedenen Konzeptdefinitionen durch Experten feststellen mussten. Sowohl bei der Untersuchung von Attitudes wie auch Beliefs werden verschiedene Methoden verwendet (Leder und Forgasz, 2002), wobei aber fragebogenbasierte Methoden dominieren. Dies bedeutet

aber, dass mit diesen Forschungsmethoden vor allem auf Wissen zurückgegriffen wird, das im expliziten Gedächtnis gespeichert ist (Schlöglmann, 2002). Das Konzept zu „Emotions", die als instabil und von hoher Intensität gesehen werden, stammt aus der Beobachtung von Problemlöseprozessen, bei denen es an verschiedenen Stellen der Prozesse zu intensiven emotionalen Reaktionen führen kann. Diese Reaktionen sind in den Kontext eingebettet und funktionsbedingt (Goldin 2000, 2002). Goldin (2002) fügte den drei Konzepten noch eine weitere Kategorie „Values" bei, die auf die Verankerung von Affekten im Wertesystem des Individuums, aber auch in die, dieses umgebende soziale Gruppe verweist.

4. Anmerkungen zu Entwicklungstendenzen

Wie schon im vorangegangenen Abschnitt angedeutet, wird in den letzten Jahren verstärkt an der Klärung der Konzepte gearbeitet. So wurden im Rahmen einer Konferenz die wichtigsten Aspekte des Beliefs - Konzeptes (Leder, Pehkonen und Törner, 2002) herausgearbeitet und an der Begriffsdefinition gearbeitet (Törner, 2002). Ähnliches gilt auch für das Attitudes - Konzept, wobei hier inzwischen auch dessen Verwendung durch Lehrkräfte untersucht wird (Polo & Zan, 2006).

Eine weitere Entwicklung zeigt sich in der Zusammenführung von Konzepten. So untersuchte Malmivuori (2001) die Dynamik, in der Selbstkonzepte auf Lernen und Verhalten einwirken. Komplexere Betrachtungsweisen, die mehrere Konzepte zur Klärung von Effekten einsetzen, bedeuten aber auch eine neue Herausforderung an die empirischen Forschungsmethoden. So werden heute in vielen Untersuchungen sowohl quantitative, wie qualitative Methoden eingesetzt, um mehr Einblick in die Phänomene zu erhalten. Dies bedeutet aber auch größere Schwierigkeiten bei der Interpretation der erhaltenen Ergebnisse.

Wurde in der Kognitionsforschung das Konzept der „Metakognition" eingeführt, so entwickelte Goldin (2002) das Konzept des „Meta-Affekts", um damit den Umgang mit Affekten im Denken und Handeln zu beschreiben.

Zentrales Element der Forschungen sind auch Veränderungsprozesse. Wenn Affekte Lernen behindern können, so ist es auch zentral zu verstehen, wie diese verändert werden können, um so den Lernprozess positiv zu beeinflussen (Hannula, 2004).

Insgesamt ist auch die stärkere Einbeziehung von Ergebnissen aus den Neurowissenschaften festzustellen, vor allem auch, da diese helfen können die verwendeten Konzepte besser zu verstehen.

5. Literatur

Di Martino, P. & Zan, R. (2001). Attitude toward mathematics: some theoretical issues. In: van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.) Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, University of Utrecht, Utrecht 2001/3, 209 – 216.

Fennema, E. (1989). The Study of Affect and Mathematics: A Proposal Generic Model for Research. In: McLeod, D.B./Adams, V.M. (Eds.) Affect and mathematical problem solving: A new perspective. New York, Springer, 205-219.

Goldin, G.A. (2000). Affective Pathways and Representations in Mathematical Problem Solving. Mathematical Thinking and Learning, 17(2), 209-219.

Goldin, G.A. (2002). Affect, Meta - Affect, and Mathematical Belief Structures. In: G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (2002): Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Dordrecht/ Boston/ London. Kluwer Academic Publishers. 59 – 72.

Hannula, M. (2004). Affect in Mathematical Thinking and Learning (2004). University of Turku.

Ingleton, C. & O'Regan, K. (2002). Recounting Mathematical Experiences: Emotions in mathematics learning. Literacy and Numeracy Studies 11/2, 95 - 107.

Leder, G. C. & Forgasz, H. J. (2002). Measuring Mathematical Beliefs and their Impact on the Learning of Mathematics: A New Approach. In: G.C. Leder, E. Pehkonen &G. Törner (2002): Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Dordrecht/ Boston/ London. Kluwer Academic Publishers. 95 – 114.

Leder G. C. Pehkonen, E. & Törner, G. (2002): Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Dordrecht/ Boston/ London. Kluwer Academic Publishers.

Malmivuori, M.-L. (2001). The Dynamics of Affect, Cognition, and Social Environment in the Regulation of Personal Learning Processes: The Case of Mathematics. Research Report 172, University of Helsinki.

Polo, M. & Zan, R. (2006). Teachers' Use of the Construct 'Attitude'. Preliminary Research Findings. To appear in Proceedings of CERME 4.

Prediger, S. (2004). Mathematiklernen als interkulturelles Lernen. Mathematikphilosophische, deskriptive und präskriptive Betrachtungen. Habilitationsschrift, Klagenfurt 2004.

Schlöglmann, W. (2002). Affect and mathematics learning, in: A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.): Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of East Anglia, Norwich 2002/4, 185 – 192.

Törner, G. (2002).Mathematical Beliefs – A Search for a Common Ground: Some Theoretical considerations on Structuring Beliefs, Some Research Questions, and Some Phenomenological Observations. In: G.C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (2002): Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education? Dordrecht/ Boston/ London. Kluwer Academic Publishers. 73 – 94.

Kathrin SCHNALLE & Inge SCHWANK, Osnabrück

Das Zahlen-Hochhaus [ZH]: Multiplikative Zusammenhänge im Hunderterraum

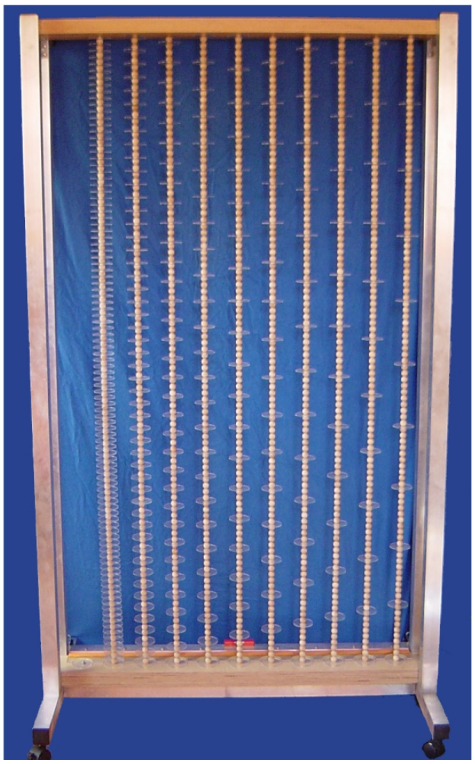


Abb. 1: Das Zahlen-Hochhaus [ZH]

Das Zahlen-Hochhaus (Abb. 1) ist eine mathematische Spielwelt zur Erforschung des Zahlenraums bis 100 unter besonderer Ausnutzung multiplikativer Zusammenhänge. Es besteht aus zehn sogenannten Treppenhäusern mit je 100 Perlen. Die Perlen sind pro Treppenhaus passend zu den 1x1-Reihen in konstanter Anzahl zusammengeleimt und die dadurch gebildeten, einzelnen Abschnitte durch Plexiglasscheiben – den Plattformen – hervor gehoben (Abb. 2). Nicht jedes Treppenhaus schließt mit einer Plattform ab; je nach 1x1-Reihe ergeben sich nach der letztmöglichen Plattform noch Reste: einzelne Perlen, die benötigt werden, um bis zur 100. Perle zu gelangen.

Abb. 2: Figur im 4er-Treppenhaus

Passend zu der Größe der Abschnitte in einem Treppenhaus gibt es Zahlenschuhpaare, die mit der Abschnittsgröße beschriftet sind. Das Tragen eines solchen Schuhpaares ermöglicht es einer Figur, sich in genau einem der Treppenhäuser von Plattform zu Plattform zu bewegen: in dem Treppenhaus, dessen Abschnittsgröße zur Beschriftung seines Zahlenschuhpaares passt. Können unterschiedlich beschuhte Figuren in ihren Treppenhäusern Plattformen auf gleicher Höhe erreichen, heißen sie dort Nachbarn und können Partys miteinander feiern. Eine Aufzugsvorrichtung im ZH erlaubt den Figuren, sich dann tatsächlich auf der Höhe ihrer Plattformen zu begegnen. Dieser Aufzug ist eine horizontal zu den Treppenhäusern bewegbare Leiste

mit Einbuchtungen entsprechend der Form der Plattformen. Er kann an jeder Etage des ZH angehalten werden und so durch Überprüfung, inwieweit einige der Einbuchtungen durch Plattformen geschlossen sind, z.B. zur Kontrolle für zu erforschende Teilerrelationen dienen. Im Unterrichtsverlauf hat es sich bewährt, dass die Kinder Lineale anhalten, auf denen die Figuren sich zu ihrer Party treffen können.

Das ZH kann im Unterricht in vielfältiger Art und Weise zur Anwendung kommen. Beispielhaft seien folgende mathematische Bereiche, die mit dem ZH erforscht werden können, genannt: Zahlraumverständnis, multiplikative Zusammenhänge, Division, kgV, ggT und Primzahlen. Bei der Arbeit mit dem ZH stehen die Idee der enaktiven Form des Wissenserwerbs wie auch insbesondere die Schulung und Vertiefung funktionalen Denkens im Vordergrund. Funktionales Denken als Gegenpol zum prädikativen Denken wird im herkömmlichen Grundschulunterricht häufiger vernachlässigt. Die Arbeit am ZH ermöglicht es, wichtige Beziehungen im Zahlenraum bis 100 als Prozesse zu veranschaulichen und durch eigenes Handeln darstellbar zu machen. Dieses soll obendrein auch die Entwicklung dynamischer mentaler Bilder unterstützen. Kinder, darunter insbesondere Mädchen, denen funktionale Denkweisen schwerer fallen, können so gezielt durch eigenes Handeln ihr bisher erworbenes Wissen um funktionale Einsichten erweitern.

Aufgabenbeispiele

Pro Treppenhaus können die Multiplikations- und Divisionsreihen erforscht werden: Welche Plattformen / Zahlen werden bei welchen Sprüngen konstanter Sprunghöhe erreicht? Wie viele Sprünge sind in welchen Treppenhäusern von einer Plattform / Zahl aus nötig, um im Erdgeschoss / bei Null zu landen? Von besonderem Interesse sind Fragen, die mehrere Treppenhäuser gleichzeitig betreffen. Zum Beispiel: In welchen Höhen können besonders große oder besonders kleine Partys gefeiert werden? Wie ist das Verhältnis der Anzahl der in verschiedenen Treppenhäusern benötigten Sprünge, um auf Plattformen in gleicher Höhe zu gelangen?

Auf zwei Aufgabenstellungen wird im folgenden noch etwas näher eingegangen. Zunächst sind Überlegungen zum kgV anzustellen (Abb. 3):

Drei Figuren laufen ihre Treppenhäuser hinauf. Sie starten gemeinsam im Erdgeschoss. Auf welcher Etage können sich die drei zum ersten Mal treffen, um gemeinsam eine Party zu feiern? Eine Figur hat die 2er-Zahlenschuhe an, eine die 3er-Zahlenschuhe und eine die 4er-Zahlenschuhe.

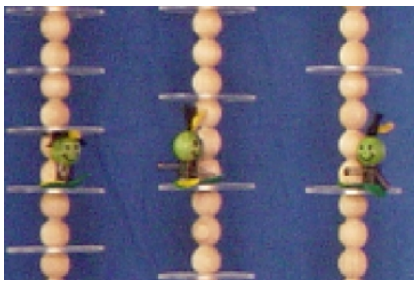


Abb. 3: kgV – so wenig hoch als möglich zur gemeinsamen Party

Das kgV wird im Rahmen einer Partyortsuche dreier Figuren erschlossen. Die Kinder erkennen anhand der Struktur des ZH recht schnell die multiplikativen Zusammenhänge der 2er-, 3er-, und 4er-Reihe. Sie haben mehrere Möglichkeiten zu einer Lösung zu gelangen. Beispielsweise können sie die Figuren – in angemessenen Sprüngen – von Plattform zu Plattform die Treppenhäuser hinauf bewegen, bis sie eine Etage gefunden haben, auf der tatsächlich alle drei Figuren Nachbarn sind. Eine andere Lösungsmöglichkeit wäre, sich visuell im ZH zu orientieren und die niedrigste Party-Etage zu lokalisieren, indem von unten her nach nebeneinander liegenden Plattformen Ausschau gehalten wird. In die Bestimmung des kgV können auch weiterreichende mathematische Argumentationen einfließen. Ein Kind der 3. Jahrgangstufe stellte z.B. folgende Überlegung an: „*Auf der zwölf – weil drei mal vier gleich zwölf. Da sind schon die drei und die vier dabei und zwei passt auf jede gerade Zahl.*“ Eine solche Aussage kann dann anhand des ZH für alle anderen Kinder demonstriert und auch überprüft werden.

Die vorgestellte Aufgabenstellung kann z.B. fortgeführt werden, indem hinterfragt wird, an welcher Stelle sich die Figuren wohl das nächste Mal, etwas höher im ZH treffen werden. Es bietet sich an, nach Begründungen und weiteren Ergebnissen und Mustern zu fragen, die dabei erkennbar werden.

Eine weitere Aufgabenstellung, die mit dem ZH erarbeitet werden kann, lautet:

Wie gelangt eine Figur über möglichst viele Treppenhäuser auf eine Plattform in der 56. Etage des Zahlen-Hochhauses?

Bei dieser Aufgabenstellung spielen sowohl die Anwendung und Ausnutzung multiplikativer Zusammenhänge als auch ein gut entwickeltes Zahlraumverständnis eine große Rolle. Alle 1x1-Reihen werden in dieser Aufgabenstellung spielerisch thematisiert, ohne dabei reproduktiven Charakter zu haben. Damit eine Figur ein Treppenhaus wechseln kann, muss sie auch ihre Schuhe wechseln. Der Einfachheit halber kann die Aufgabenstellung auch mit unbeschrifteten Schuhen durchgeführt werden. Auszunutzen sind bei der Lösung diejenigen Plattformen, von denen aus in ein anderes Treppenhaus gewechselt werden kann, also diejenigen, die sich im ZH auf gleicher Höhe befinden. Zwei verschiedene solcher Plattformen

können mit unterschiedlicher Sprunghöhe erreicht werden, die Zahl die für die Plattformhöhe steht, hat beide Sprunghöhen als Teiler. Beispielhaft soll hier die Bearbeitung eines Kindes der 3. Jahrgangsstufe vorgestellt werden. In der angegebenen formalen Beschreibung (Abb. 4) stehen die Indizes für die besuchten Treppenhäusern, die größer gesetzten Zahlen für die erreichten Plattformhöhen.

0_0 ☞ 0_2 ☝ 2_2 ☞ 2_1 ☝ 3_1 ☞ 3_3 ☝ 6_3 ☞ 6_6 ☝ 12_6 ☞ 12_4 ☝ 16_4 ☞ 16_8 ☝ 24_8 ☞ ?

☞ 24_4 ☝ 28_4 ☞ 28_7 ☝ 35_7 ☞ 35_5 ☝ 40_5 ☞ 40_{10} ☝ 50_{10} ☞ ?

☞ 50_2 ☝ 52_2 ☞ 52_4 ☝ 56_4

Abb. 4: Ein Weg über die Plattformen vieler Treppenhäuser zu einer 56er-Plattform

Die Figur startet im Erdgeschoss des 0er-Treppenhauses und wechselt ins 2er-Treppenhaus, hier springt die Figur auf die 2er-Plattform und wechselt ins 1er-Treppenhaus, springt auf die 3er-Plattform, wechselt ins 3er-Treppenhaus usw. Ein erstes Problem ergibt sich, nachdem die Figur im 8er-Treppenhaus die 24er-Plattform erreicht hat. Wie soll es nun weitergehen? Der Weg über das 4er-Treppenhaus ermöglicht, die 28er-Plattform zu erreichen und von dort aus ins 7er-Treppenhaus zu wechseln, welches über die 35er-Plattform den Weg ins 5er-Treppenhaus und schließlich ins 10er-Treppenhaus ermöglicht. Es wird Zeit, sich um das Ziel, bei einer 56er-Plattform zu landen, genauer zu kümmern. Die bereits erreichte Nähe zu diesem Ziel erlaubt nur noch wenige Sprünge. Ein Wechsel ins 2er-Treppenhaus führt zur 52er-Plattform und ein letzter Wechsel ins 4er-Treppenhaus erlaubt schließlich den Sprung zu einer 56er-Plattform.

Man sieht anhand der Bearbeitung dieser Aufgabe, dass zur Lösung der Aufgabenstellung viele strategische Überlegungen angestellt worden sind und der sichere Umgang mit multiplikativen Zusammenhängen gefordert ist. Andererseits stellt die Aufgabe aber durch die Handlungsmöglichkeiten sowie die visuelle Unterstützung des Materials und die dadurch gegebene ständige Möglichkeit zur Selbstkontrolle keine Überforderung dar. Die hier dargestellte Lösung war der erste Lösungsansatz nach erstmaliger Konfrontation mit einer solchen Aufgabenstellung, und entstand nicht etwa, nachdem ähnliche Aufgabenstellungen mehrfach geübt worden waren. Tatsächlich hatten die Kinder der 3. Jahrgangsstufe zuvor erst 3 Stunden mit dem ZH in einer Kleingruppe gearbeitet.

Helmuth Schöne Köln

Über den Term $(P - x^2) / x$

Der Satz von John Wilson $(P - 1)! + 1 \equiv 0 \bmod P$ ist die einzige Möglichkeit (die bisher bekannt ist), unter den ungeraden Zahlen P , die „auszusieben“, die prim sind. Leider ist dieser Satz unpraktikabel. Denn schon für die Zahl 101 ist ein Test mit dem Wilsonschen Satz mit großem Rechenaufwand verbunden.

Der Term $(P - x^2) / x$ ermöglichte die Entwicklung eines Satzes, in dem dieser Aufwand enorm verringert ist.

Eine ungerade Nichtprimzahl P hat die Eigenschaft, nicht nur durch 1 und P teilbar zu sein, sondern auch mindestens durch eine ungerade Zahl $3 \le x \le \sqrt{P}$; dann aber auch durch P / x .

P ist als ungerade Nichtprimzahl so das Produkt von mindestens 2 Faktoren, denn die Teiler x und P / x müssen in der Zahl P enthalten sein:

$P = x \cdot P / x$; x soll dabei der kleinere von den 2 Faktoren sein.

Man kann also x aus P ausklammern.

Ebenso kann man dieses x ausklammern aus:

$(P \pm x)$; $(P \pm x^2)$; $(P \pm x^3)$; … ; $(P \pm x^{n-1})$; $(P \pm x^n)$

Letztlich kann man den allgemeinen Satz bilden:

$(P \pm x^n) \equiv 0 \bmod x$.

In der weiteren Analyse beschränken wir uns auf den Exponenten $n = 2$ von x und die Variante des Satzes mit dem Minuszeichen:

$(P - x^2) \equiv 0 \bmod x$.

Dieser Satz bedeutet:

Für jede ungerade Nichtprimzahl existiert ein x , welches den Term $(P - x^2)$ ohne Rest teilt, wobei $3 \le x \le \sqrt{P}$ und $P \ge 9$ ist.

Ist P eine Quadratzahl, dann ist $x = P / x$; $x^2 = P$ und $(P - x^2) = 0$; damit wird der Term $(P - x^2) / x = 0 / x$.

0 / x ist hier ganzzahlig, weil
$(P - x^2) = 0$; also $P = x^2$; damit $(x^2 - x^2) = 0$ oder $x (x - x) = 0$; somit ist $x \cdot 0 = 0$ und $0 / x$ wird zu $(x \cdot 0) / x$ und damit ist $0 / x$ hier ganzzahlig und erfüllt den Satz $(P - x^2) \equiv 0 \bmod x$.

Ist P eine Quadratzahl mit nichtprimen Wurzeln, so gibt es für den Term $(P - x^2)$ nicht nur ein $x = \sqrt{P}$; sondern auch ein $x < \sqrt{P}$.

Testen wir den obigen Satz mit den ungeraden Zahlen:

101 ; 111 ; 121

$(101 - 3^2) / 3 = (101 - 9) / 3 = 92 / 3 = 30{,}6$

$(101 - 5^2) / 5 = (101 - 25) / 5 = 76 / 5 = 15{,}2$

$(101 - 7^2) / 7 = (101 - 49) / 7 = 52 / 7 = 7{,}4$

$(101 - 9^2) / 9 = (101 - 81) / 9 = 20 / 9 = 2{,}2$

Alle in Frage kommenden x-Werte teilen $(101 - x^2)$ nicht.
Ergo: 101 ist eine Primzahl.

$(111 - 3^2) / 3 = (111 - 9) / 3 = 102 / 3 = 34$

Schon der erste in Frage kommende x-Wert teilt $(111 - x^2)$.
Ergo: 111 ist eine Nichtprimzahl.

$(121 - 3^2) / 3 = (121 - 9) / 3 = 112 / 3 = 37{,}3$

$(121 - 5^2) / 5 = (121 - 25) / 5 = 96 / 5 = 19{,}2$

$(121 - 7^2) / 7 = (121 - 49) / 7 = 72 / 7 = 10{,}2$

$(121 - 9^2) / 9 = (121 - 81) / 9 = 40 / 9 = 4{,}4$

$(121 - 11^2) / 11 = (121 - 121) / 11 = 0 / 11$

Alle in Frage kommenden x-Werte teilen $(121 - x^2)$ nicht. Aber
$121 - 11^2 = 0$; also ist $121 = 11^2$; damit ist 121 selber eine Quadratzahl.
Ergo: 121 ist eine Nichtprimzahl – eine Quadratzahl mit primen Wurzeln.

Der hier vorgestellte Satz $(P - x^2) \equiv 0 \bmod x$; entwickelt zum Auffinden von Nichtprimzahlen unter den ungeraden Zahlen P , bedeutet eine „Entschärfung“ des Wilsonschen Problems, die Unpraktikabilität des Satzes $(P – 1)! + 1 \equiv 0 \bmod P$; für die Zahl 111 z.B. ist $(P – 1)! = 110!$; damit ist der Rechenaufwand für das Testen der Zahl 111 mit dem Wilsonschen Satz um den Faktor 110! / 101! mal größer als für die Zahl 101 .

Der Satz $(P - x^2) \equiv 0 \bmod x$ ermöglicht einen Test der Zahl 111 im obigen Sinne mit geringstem Rechenaufwand – in Frage kommen nur die x-Werte 3 ; 5 ; 7 und 9 . Fängt man mit der 3 an, so ergibt schon die erste kleine Rechnung die nichtprime Eigenschaft der Zahl 111 ; beginnt man aber mit der 9 , so hat man bereits nach vier Rechnungen das Ergebnis.

Christof SCHREIBER, J.W. Goethe Universität Frankfurt

Projekt Lehr@mt - Medienkompetenz in der Lehrerbildung für die Primarstufe

Kurzfassung:

Seit Februar 2006 läuft das vom Kultusministerium Hessen in Kooperation mit der Universität Frankfurt initiierte Projekt „Lehr@mt“ mit dem Ziel, grundlegende Qualifikationen im Bereich der Medienkompetenz in allen Phasen der Lehrerbildung zu fördern. Dazu sollen Produkte für Aus- und Fortbildung erstellt und Aus- und Fortbildungsangebote durchgeführt werden. Kooperationsstrukturen aller an der Lehrerbildung Beteiligten sollen ausgebaut, sowie die mediendidaktische Unterrichtsforschung gefördert werden. In diesem Beitrag wird der Ansatz eines der 5 Teilprojekte, die medienpädagogischen Aktivitäten aus mathematik-didaktischer Perspektive für die Grundschullehrerausbildung präsentiert.

1. Ziele und Beteiligte

Unabhängig von der Fächerkombination sollen Lehramtsstudierende, Referendarinnen[1] und Lehrerinnen grundlegende Fähigkeiten im Bereich der Medienkompetenz erwerben, die sie befähigen, Medien zu nutzen, diese im Unterricht zielgerichtet einzusetzen, Unterrichtsszenarien zu entwickeln und zu betreuen sowie die Kompetenzen auch den Schülern weiterzugeben. Die Universität soll sich zusätzlich zur Ausbildung der Lehramtsstudierenden zunehmend an der 2. und 3. Phase der Lehrerbildung beteiligen und eigene Angebote für die Lehrerfortbildung entwickeln. Dazu soll die Kooperation mit Schulen und Studienseminaren ausgebaut werden, um bereits etablierte Ansätze zur Vermittlung von Medienkompetenz zu unterstützen und neue zu etablieren. Es wird dabei beabsichtigt, die mediendidaktische Fachunterrichtsforschung in alle Phasen der Lehreraus- und Lehrerfortbildung zu integrieren. Innerhalb von zweieinhalb Jahren soll ein universitätsweites Curriculum entwickelt, durchgeführt und evaluiert werden, so dass neben den Einzelprojekten auch eine universitätsweite Strategie umgesetzt werden kann.

Zur Umsetzung des Gesamt-Projektes gibt es eine breite Kooperation von Ministerien, der Universität Frankfurt, des Amtes für Lehrerbildung, Studienseminaren, Staatlichen Schulämtern und zahlreichen Schulen.

[1] Wegen der überwiegenden Zahl an weiblichen Referendarinnen und Lehrerinnen im Grundschullehramt benutze ich die weibliche Form. Männliche Kollegen sind hier ausdrücklich eingeschlossen. „Schüler“ steht durchweg für Schüler und Schülerinnen.

2. Das Teilprojekt

Auf der Tagung habe ich das Teilprojekt für die Ausbildung im Bereich Mathematik unter dem Titel „Medienpädagogische Aktivitäten aus mathematikdidaktischer Perspektive für die Grundschullehrerausbildung“ vorgestellt. Die Ausbildung im modularisierten Studiengang bezieht sich auf das 1. - 6. Schuljahr.

Das Teilprojekt am Institut für Didaktik der Mathematik unter Leitung von Götz Krummheuer legt besonderen Wert auf folgende 4 Aspekte:

- Nutzung neuer Medien für das Lehren und Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule
- Erziehungs- und Bildungsaufgaben neuer Medien im Mathematikunterricht der Grundschule
- Forschendes Lernen im Rahmen der Lehrerbildung
- Integrative Lehrveranstaltungsformen der drei Phasen der Lehrerbildung

Die geplante Umsetzung des Projektes habe ich auf der Tagung anhand des Entwurfs einer praxisorientierten Veranstaltung illustriert, die den Studierenden als Schulpraktisches Projekt und den Referendarinnen als Wahl-Pflicht Modul ab April 2006 angeboten wird. Es geht dabei um die Nutzung neuer Medien für das Lehren und Lernen und den projektorientierten Einsatz neuer Medien im Mathematikunterricht der Grundschule. Hierzu wurde in einer Pilotveranstaltung die WebQuest Methode für den Einsatz im Mathematikunterricht in der Grundschule vorbereitet, durchgeführt und ausgewertet.

3. Phasen - übergreifende Veranstaltung

Eine Phasen - übergreifende Veranstaltung habe ich als ein Beispiel für den projektorientierten Einsatz neuer Medien im Mathematikunterricht der Grundschule auf der Tagung vorgestellt. Sie findet zum Thema „WebQuests im Mathematikunterricht der Grundschule“ ab April 2006 statt. WebQuests wurden von Dodge und March 1995 als Unterrichtskonzept entwickelt, das von Lehrern verschiedener Schulstufen seitdem verwendet wird. Es wird dabei ein projektorientierter Umgang mit einem Thema angestrebt, der die neuen Medien integriert. Besonders vorteilhaft ist dabei die Möglichkeit des „Blended Learning“, in dem die neuen Medien genau dann genutzt werden, wenn es Vorteile gegenüber der Verwendung herkömmlicher Medien gibt. Wesentlich ist die vorgegebene Struktur, die WebQuests in Einleitung, Aufgabe, Vorgehen, Quellen, Bewertung und Fazit unterteilt. Für die Primarstufe sollten WebQuests angepasst und so nicht alle Aspekte dogmatisch umgesetzt werden. Etliche

WebQuest-Beispiele zum Mathematikunterricht finden sich bei Christine Bescherer unter http://www.mathe-webquests.de/, einige zum Mathematikunterricht der Primarstufe finden sich bei mir auf http://www.math.uni-frankfurt.de/~schreibe/SPP_WQ.htm. Weitere WebQuest-Beispiele sollen in kommenden Veranstaltungen folgen.

Die Zielgruppen der Veranstaltung sind neben den Studierenden auch Referendarinnen und Lehrerinnen aus der Grundschule. Die Besonderheiten der verschiedenen Arbeits- und Lernorte der Beteiligten (Uni, Studienseminar und Schule), unterschiedliche Zeitpläne und unterschiedlichen Beiträge der einzelnen beteiligten Gruppen zur Veranstaltung, erfordern die Konzeption der Veranstaltung als eLearning Veranstaltung, die teilweise in Präsenz, teilweise als online-betreute Gruppenarbeit stattfindet. Dies deckt sich - im Sinne doppelter Vermittlungspraxis - natürlich in hervorragender Weise mit den allgemeinen Zielen des Projektes.

In der Veranstaltung sollen die Teilnehmerinnen ein treffendes eLearning-Angebot für Grundschüler entwerfen, erproben und auswerten. Dabei sollen sie ihre Medienkompetenz und auch ihre methodisch-didaktische Kompetenzen erweitern. Jeder teilnehmenden Referendarin bzw. Lehrerin werden 2-3 Studierende zugeordnet, um dann in dieser Gruppe gemeinsam ein WebQuest für die betreffende Klasse zu erstellen, dort einzusetzen und den Einsatz zu dokumentieren. Es werden zuerst Veranstaltungen in Präsenz, dann online-betreute Gruppenarbeit, danach Veranstaltungen an den einzelnen Schulen und zuletzt wieder Veranstaltungen in Präsenz stattfinden. Die Teilnehmerinnen

- lernen WebQuest als Methode für einen projektorientierten Mathematikunterricht kennen,
- erstellen selbst in Gruppen WebQuests für den Einsatz in der eigenen Klasse,
- optimieren gegenseitig die erstellten WebQuests in der Gruppe,
- führen die WebQuests in den Klassen durch, protokollieren diesen Einsatz und werten ihn aus und
- optimieren wiederum die erprobten WebQuest Beispiele.

Um die Kooperation in den Gruppen zu unterstützen und die Begleitung durch den Veranstaltungsleiter zu gewährleisten, wird WebCt als online-Arbeitsumgebung eingesetzt. WebCt bietet dabei ein Forum zur Rückmeldung zu einzelnen Veranstaltungen und zum Austausch von Unterlagen, einen gemeinsamen Kalender zur Koordination aller Termine, Platz für Unterlagen zur Organisation der Veranstaltung und für

Materialien zur Arbeit in Gruppen. Zur Kommunikation sind eine interne Mailbox und ein Chatraum eingerichtet.

Die Nutzung neuer Medien für das Lehren und Lernen im MU der Grundschule und der Ansatz des forschenden Lernens wird verbunden, indem in 2-semestrigen Zyklen im ersten Semester WebQuests entwickelt werden, während in einem folgenden Semester der Einsatz forschungsorientiert dokumentiert und anhand von Forschungsfragen untersucht wird. Fragestellungen können dabei sein: Veränderungen der WebQuest-Methode für den Einsatz in der Primarstufe, Vergleich projektorientierter Arbeit mit und ohne Neue Medien, verändertes Bild der Mathematik durch den Einsatz von WebQuests, besondere Gruppen beim Einsatz von WebQuests (geschlechts-, leistungs-, altersspezifisch), geeignete und wenig geeignete Themen für WebQuests etc.

4. Ausblick

Die Produkte aus den Veranstaltungen – WebQuest Beispiele, Dokumentationen und Analysen – sollen im Netz zur Verfügung gestellt werden. So können diese von einem breiteren Kreis für unterrichtliche Zwecke genutzt oder in Lehreraus- und Lehrerfortbildung eingesetzt werden. Aus den Veranstaltungen sollen Erfahrungsberichte zur Anregung für die Unterrichtspraxis in einschlägigen Praxis-Zeitschriften für die Grundschule veröffentlicht werden (s. Meurer/Schneider/Schreiber 2006). Die Veranstaltung kann Vorlage für Veranstaltungen im Rahmen der Lehrerfortbildung und Fortbildungen an Universitäten sein: entsprechende Angebote, die sich an Lehrer aus umliegenden Schulen und Lehrende in der Hochschule richten, werden bereits von mir in der Innerbetrieblichen Weiterbildung der Universität Frankfurt gemacht.

Literatur

Bescherer, Christine (2003): WebQuests – eine Projektmethode für den Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht 4/2003, S. 28-32 Friedrich Verlag, Velber

Dodge, Bernie (2001) FOCUS: Five Rules for Writing a Great WebQuest. http://babylon.k12.ny.us/usconstitution/focus-5%20rules.pdf

Meurer, Mareike/ Schneider, Ana/ Schreiber, Christof (2006): WebQuests im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Sache Wort Zahl, Heft 76, S. 50-57

Moser, Heinz (2000): Abenteuer Internet, Lernen mit WebQuests. Auer Verlag, Donauwörth

Schreiber, Christof (2006): Medienkompetenz in der Lehrerbildung für die Primarstufe – Projekt Lehr@mt. In: Hinz, Renate/ Pütz, Tanja (Hrsg.): Qualitätssicherung und Schulentwicklung. Schneider Verlag: Hohengehren, im Druck

Marcus SCHÜTTE, Universität Frankfurt/ Hamburg.

Mathematiklernen im Grundschulunterricht einer sprachlich-kulturell heterogenen Schülerschaft

Einleitung

In der empirischen Untersuchung, die diesem Beitrag zu Grunde liegt, werden Arbeiten der interkulturellen Bildungsforschung und interaktionstheoretischer Ansätze der interpretativen Unterrichtsforschung der Mathematikdidaktik miteinander verbunden. Ziel ist es, die Bedingungen der Lernermöglichung im Grundschulmathematikunterricht einer sprachlich-kulturell heterogenen Schülerschaft in deutschen Schulen zu beschreiben. Hierfür werden

1. die verbalen Handlungen der Lehrperson mit denen sie den Unterricht gestaltet,
2. die Auswirkungen dieser verbalen Handlungen auf die Interaktionsmuster (vgl. [1] und [7]) im Mathematikunterricht und
3. das ‚aktive Teilnehmen' der Lernenden (vgl. [6]) am Unterricht.

untersucht. Die Analysen der verbalen Handlungen der Lehrpersonen stellen den Schwerpunkt des vorliegenden Beitrags dar.

Theoretischer Hintergrund und eigene Position

Um die verbalen Handlungen der Lehrperson im Unterricht dahingehend zu analysieren, wie sie den Unterricht einer mehrsprachigen Schülerschaft gestalten, wird ein Ansatz benötigt, der es ermöglicht, Verhaltensweisen der Lehrerschaft im Umgang mit Mehrsprachigkeit im Unterricht erklärbar zu machen. Die Verhaltensweisen der Lehrpersonen im Unterricht laufen zu einem nicht unerheblichen Teil unbewusst also habitualisiert ab. Sie lassen sich anhand des Ansatzes des monolingualen Habitus (im Folgenden MLH) der deutschen Schule und der in ihr arbeitenden Lehrerschaft von Gogolin [4] deuten. Das Konzept des MLH ermöglicht es, das sprachliche Selbstverständnis und die sprachlichen Strategien der Lehrpersonen anhand des geschichtlich gewachsenen Umgangs mit Mehrsprachigkeit im deutschen Schulsystem zu erklären. Nach Gogolin bildete das nationalstaatlich verfasste deutsche Bildungssystem im 19. Jahrhundert ein habituelles monolinguales Selbstverständnis unter der Lehrerschaft heraus, welches heute noch immer in der deutschen Schule wirkt, gerade dadurch, dass der Vorgang und die Ursache seiner Herausbildung längst vergessen ist. Diesem Selbstverständnis folgend wird durch die Lehrpersonen den „biographischen Lebenssituationen", in denen Schülerinnen und Schüler stehen, Ähnlichkeit unterstellt, was nur selten der Realität entspricht.

Da sich das Konzept des MLH auf die sensibilisierende Ebene der Untersuchung bezieht, lässt es sich nicht ohne weiteres auf empirischer Ebene rekonstruieren. Zur Rekonstruktion von Aspekten des MLH auf empirischer Ebene werden dem Konzept die Differenzierungen von „spoken" und

„written language“ von Halliday [5] zur Seite gestellt. Halliday nimmt eine Differenzierung von ‚lexikalischen’ („content words’) und ‚grammatischen’ („function words“) Wörtern vor. Lexikalische Wörter zeichnen sich dadurch aus, dass sie einen eigenen Inhalt haben, wie z.B. der Begriff „Würfel“. Neben Substantiven gehören zu den lexikalischen Wörtern auch Verben und Adjektive. Grammatische Wörter wie z.B. „und“ sind für sich betrachtet ‚inhaltsleer’ und ‚verweisen’ in Form einer „funktionalen Bedeutung“ auf etwas.

Es stellt sich die Frage, in welcher Weise die verbalen Handlungen der Lehrperson im Unterricht den normativen Ansprüchen der Schule gerecht werden, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, die komplexen Strukturen der Entschlüsselung und Produktion schulspezifischer Rede zu erlernen.

Beispiel „Die besonderen Ausdrücke“

Die Unterrichtssequenz spielt im Mathematikunterricht der vierten Jahrgangsstufe. Das Thema ließe sich mit der Einführung der Fachtermini der vier Grundrechenarten beschreiben. Die Lehrerin benennt anfangs Fachtermini der Addition und lässt diese von den Schülerinnen und Schüler einer Beispielaufgabe zuweisen. Dieses Vorgehen wird anschließend nahezu identisch für die Subtraktion durchgeführt. Hierauf ereignet sich Folgendes:

191 <L: so wer weiß bis jetzt noch alle/ sag mir ma die ganzen Wörter die du bei minus kennen musst\
192 >S: Minuend\
193 S: Minuend\ Subtraktzend#
194 #L: (schnell) aber nicht durcheinander\ wir melden uns und wer dran ist der macht das\ [L dreht sich
195 der Klasse zu] na Muri versuchs ma\
196 Muri: äh- Differenz\ #
197 #L: Differenz is was/
198 S: Unterschied\
199 L: der erste der zweite oder das Ergebnis/
200 <S: Ergebnisse\
201 <S: Ergebnis\
202 L: das Ergebnis ist die Differenz\ richtig\ wie heißt (..)#
203 Muri: Minuend/
204 L: mhh/
205 Muri: Minuend\
206 L: erster/ zweiter/
207 Muri: erster\
208 S: erster\
209 L: der Erste\ gut\ und der zweite/ wie heißt der den du abziehst/
210 S: der zehn/
211 S: subse-
212 Muri: Subt**ra**hend\
213 L: Subtrahend\ wie heißt die Rechenart/
214 Muri: minus\
215 L: minus ist nich äh is das Rechenzeich#
216 # >Sm: [Sm rufen rein]
217 >S: Subtraktion\
218 L: nochma Konsi/
219 Konsi: Subtraktion\
220 L: Subtraktion- und was was machen wir wenn wir das tun/
221 S: substantieren\
222 <S: minus rechnen\
223 <Sm: [Sm rufen rein]
224 L: **subtrahieren** das ist ganz schön schwierig ne/ so\ wir lesen die Wörter noch ma alle\ bisher\
225 <L: einfach nochma damit sie euch in Kopf gehen\

Zusammenfassung der Interpretation

Bevor die Lehrperson die Fachtermini der Subtraktion in <191> beginnt ‚abzufragen’, hat sie diese in für die Addition zuvor beschriebener Vorgehensweise benennen lassen. In <191> spricht die Lehrerin jedoch trotzdem selber von „minus“, obwohl sie an dieser Stelle auch den soeben eingeführ-

ten Begriff Subtraktion benutzen könnte. Das stützt die Deutung, dass die Lehrerin anscheinend die Fachtermini ausschließlich von den Schülerinnen und Schülern benannt haben möchte und sie die korrekten Bezeichnungen der Fachtermini wenn überhaupt nur verwendet, wenn eine Schülerin oder ein Schüler sie zuvor angegeben hat, wie in <196-197>, <212-213>, <217-220> zu sehen ist. Dieses Vorgehen entspricht in typischer Weise dem fragend-entwickelnden Unterricht. Handlungsspielraum liegt für die Schülerinnen und Schüler darin, die richtigen Fachtermini zur richtigen Zeit zu raten bzw. zu nennen. Die Lehrerin korrigiert und bestärkt bei diesem Vorgehen die Schülerinnen und Schüler ausschließlich auf der Ebene der Aussprache, nimmt aber nie Explikationen der Fachtermini im Sinne des Eingehens auf die Relationen, die zwischen den Fachtermini herrschen vor. Ebenso thematisiert sie nicht die hinter den gerade behandelten Fachtermini stehenden Verfahrensweisen, wie z.B. in <224-225> „subtrahieren\ das ist ganz schön schwierig ne/ so\ wir lesen die Wörter noch ma alle\ bisher\ einfach nochma damit sie euch in Kopf gehen\“ zu erkennen ist. Wörter gehen also durch lesen in den Kopf, was Vokabellernen entspricht.

Theoriegenese

In der Analyse dieses Transkriptes zeigt sich eine verbale Handlungsroutine der Lehrperson, die sich mit „Sagen = Verstehen“ betiteln lässt. Sie ist anhand zweier wesentlicher Merkmale zu charakterisieren:

- Fachtermini werden bei der Einführung von der Lehrperson nicht genannt, sondern sollen von den Schülerinnen und Schülern erraten werden.
- Eine Explikation in Bezug auf Relationen der Fachtermini zueinander oder den Verfahrensweisen der Fachtermini findet nicht bzw. kaum statt.

Zieht man die Differenzierungen Hallidays [5] hinzu, fällt auf, dass die beschriebenen ‚Belehrungsversuche’ der Lehrperson nahezu ausschließlich auf der Ebene von reinem Vokabeltraining lexikalischer Begriffe mit kleineren Exkursen von Lautierungsübungen stattfinden. Dies stellt sicherlich einen Aspekt von zu erlernender Fachsprachlichkeit dar. Die Ergebnisse von Gogolin, Kaiser und Roth [2] zeigen jedoch, dass nicht die Verwendung einer großen Anzahl von lexikalischen Begriffen zwischen bildungserfolgreichen und weniger bildungserfolgreichen Schülerinnen und Schülern als trennscharfer Indikator zu gebrauchen ist, sondern vor allem auch der Gebrauch von Satzverbindungen. Das bedeutet, *„...dass – vergleichbar der Syntax der mathematischen Formelsprache – eine hinreichende Anzahl präzise gebrauchter grammatischer Einheiten als Steuerungselement notwendig sind, um sachdienlich und zielgerichtet...“*([2] S. 76) vorgehen zu können. Nur durch die Einführung in den sinnvollen Gebrauch von grammatischen Einheiten sind alle Schülerinnen und Schüler somit fähig, den

beschriebenen normativen Anspruch an sie, in schulsprachlicher Kommunikation bewandert zu sein, zu erfüllen.

Die beschriebene Handlungsroutine der Lehrperson lässt sich auf das Konzept des MLH zurückführen. Sie folgt einer habituellen Vorstellung, dass die Schülerinnen und Schüler durch Lesen oder Sagen zu einer Art intuitivem Verständnis der Fachtermini und dahinterstehenden Konzepte gelangen können und diese korrekt anwenden. Diese Vorstellung lässt sich unter Hinzunahme des Konzepts des MLH so deuten, dass die Lehrpersonen dieser Handlungsroutine folgend habituell, also unbewusst, den Unterricht für eine monolingual deutsch aufwachsende Schülerschaft gestalten. Die Lehrperson scheint somit unbewusst vorauszusetzen, dass die Schülerinnen und Schüler durch ihr häusliches oder privates Umfeld in Sprachroutinen eingeführt werden, wodurch sie problemlos benannte Fachtermini in Verbindung zu dahinterstehenden Konzepten setzen können. Also im Stande sind Fachtermini korrekt anzuwenden. Das mag in Einzelfällen bei monolingual deutsch aufwachsenden Schülerinnen und Schülern, die aus einem bildungsnahen Umfeld stammen sogar zutreffen. Hat man es jedoch mit einem in zwei oder mehr Sprachen lebenden und lernenden Kind zu tun, muss dies kritisch hinterfragt werden. In diesem Fall ist sicherlich nur lernförderlich, wenn benötigte sprachliche Mittel zum Verbalisieren von Fachtermini und Verwenden von dahinterstehenden mathematischen Konzepten grundsätzlich und explizit gelehrt werden.

Literatur

[1] Bauersfeld, H. (1978, Hrsg): Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In: Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel Verlag KG.

[2] Gogolin, I./ Kaiser, G. / Roth, H-J. / Deseniss, A./ Hawighorst, B. und Schwarz, I.(2004): Mathematiklernen im Kontext sprachlich-kultureller Diversität. Hamburg (Universität Hamburg): Forschungsbericht an die DFG.

[3] Gogolin, I. (2001): Heterogenität und Bildungsgang. In Hericks, U/ Keuffer, J./ Kräft, H. C./ Kunze, I. (Hrsg.): Bildungsgangdidaktik – Perspektiven für Fachunterricht und Lehrerbildung. Opladen: Leske + Budrich.

[4] Gogolin, I. (1994): Der monolinguale Habitus der multilingualen Schule. Münster/ New York: Waxmann

[5] Halliday, M. A. K. (1989): Spoken and written language. Oxford: University Press. [6] Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001): Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule. Weinheim: Belz.

[6] Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001): Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule. Weinheim: Belz.

[7] Voigt, J. (1984): Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Weinheim und Basel: Beltz.

Stanislaw SCHUKAJLOW, Kassel

Schüler-Schwierigkeiten beim Lösen von Modellierungsaufgaben – Ergebnisse aus dem DISUM-Projekt

1. Modellierungsaufgaben – eine wichtige Komponente der neuen Aufgabenkultur

Spätestens seit der TIMS- und der PISA-Studie sind wesentliche Defizite deutscher Schülerinnen und Schüler in Mathematik bekannt. Sie bearbeiten noch relativ gut Aufgaben, die eine routinierte Anwendung von Standardalgorithmen erfordern, scheitern aber oft bei der Lösung realitätsnaher, mehrschrittiger Aufgaben. Eine Ursache dieser Defizite ist die starke Verfahrensortierung des Mathematikunterrichts. Um den Mathematikunterricht zu verbessern, wurde das bundesweite BLK-Modellversuchsprogramm „SINUS“ initiiert. Ein wichtiges Ziel dieses Projektes war die Veränderung der „Aufgabenkultur“ im Unterricht. Einen Teil der neuen Aufgabenkultur bilden die von einer realen Situation ausgehenden Modellierungsaufgaben, deren Lösung die Suche nach einem passenden mathematischen Modell und seine Projektion auf die Realität beinhaltet.

2. Das Forschungsprojekt „DISUM“[1]

Im Forschungsprojekt „DISUM“ wird eine Antwort auf die Frage gesucht, wie solche realitätsorientierte Modellierungsaufgaben im Unterricht optimal eingesetzt werden können. Wesentlicher Bestandteil des DISUM-Projektes ist die Entwicklung, Durchführung und Auswertung eines Lehrertrainingsprogramms zu einer Unterrichtseinheit, die thematisch die Kompetenz „Modellieren“ und die Einheit „Der Satz des Pythagoras“ verbinden soll.

Über die erste Phase des Projekts wurde von Blum/Leiß (2003) berichtet. Der vorliegende Beitrag befasst sich mit einem Aspekt, der im Jahr 2005 im Rahmen des DISUM-Projektes näher untersucht wurde. Hierbei geht es um die Schwierigkeiten, die Schüler beim Lösen von den für die Untersuchung entwickelten Modellierungsaufgaben haben. Zwei Aufgabenbeispiele aus dem DISUM-Projekt sind im Anhang zu finden.

---

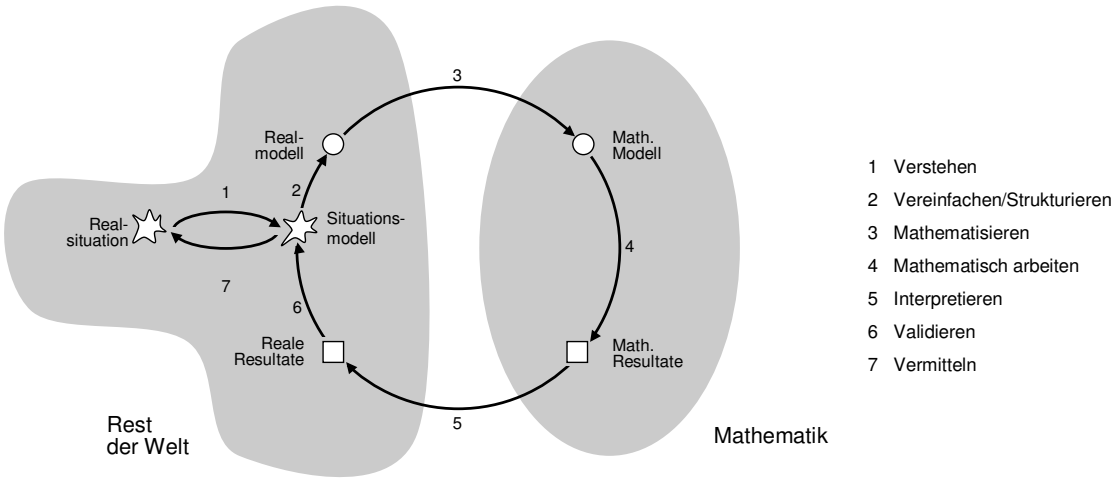
[1] Das Forschungsprojekt „DISUM“ (Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik) wird von der DFG gefördert. Leiter des Projekts sind Prof. Dr. W. Blum (Kassel), Prof. Dr. R. Messner (Kassel) und Prof. Dr. R. Pekrun (München), Mitarbeiter sind D. Leiß und S. Schukajlow.

Um aufgabenspezifische Schwierigkeiten der Schüler bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben zu analysieren und Anhaltspunkte für eine adäquate Lehrerunterstützung in der geplanten Unterrichtseinheit gewinnen zu können, wurden zuerst Laborsitzungen mit Schülerpaaren durchgeführt. Jede der acht angebotenen Aufgaben wurde von vier Schülerpaaren aus der Hauptschule und vier Schülerpaaren aus dem Gymnasium gelöst. Alle Schüler waren zum Untersuchungszeitpunkt in der Jahrgangsstufe 9. Im Anschluss an die Aufgabenbearbeitung wurde ein Schüler aus jedem Paar nach der Methode des *Stimulated Recall* (vgl. Kagan et. al. 1963) interviewt.

3. Ergebnisse

Auf der Basis der detaillierten Aufgabenanalysen und der im Labor gesammelten Daten wurden im ersten Schritt individuelle Lösungsprozesse der Schüler bei der Aufgabenbearbeitung rekonstruiert. Die aufgabenspezifischen Schüler-Schwierigkeiten im Lösungsprozess wurden identifiziert und gemäß dem Modellierungskreislauf von Blum/Leiß 2005 kategorisiert. Abschließend wurden die Schüler-Schwierigkeiten in der jeweiligen Kategorie quer über die Modellierungsaufgaben verglichen.

Modellierungskreislauf *(Blum/Leiß 2005)*



Aus der Analyse der Lösungsprozesse wurden folgende Gemeinsamkeiten und Unterschiede in der Bearbeitung von vier ausgewählten Modellierungsaufgaben erschlossen:

(1) Schwierigkeiten in allen betrachteten Modellierungsaufgaben lassen sich sehr gut in dem verwendeten Modellierungskreislauf verorten.

(2) Verschiedene Modellierungsschritte bereiten den Schülern je nach Aufgabe unterschiedliche Schwierigkeiten. Zum Beispiel ist es wesentlich schwieriger, ein richtiges Situationsmodell beim Lösen der Aufgabe „Zuckerhut“ zu bilden als beim Lösen der Aufgabe „Riesenschuhe“. Eine sinn-

volle Konstruktion des Realmodells ist aber beim Lösen der Aufgabe „Riesenschuhe“ ein Schritt, den nur die besten Schülerinnen und Schüler leisten können.

(3) In jedem einzelnen Modellierungsschritt und in jeder der vier Aufgaben gibt es kognitive Teilprozesse, die das Erreichen der nächsten Zwischenstation im Modellierungskreislauf ermöglichen. Z.B. bilden drei kognitive Teilprozesse den Modellierungsschritt „Verstehen“: Information aus Text entnehmen, Information aus Bild entnehmen und sie in einem kohärenten Situationsmodell mit einander verbinden.

(4) Die bei der Aufgabenbearbeitung angewandten Lösungsstrategien sind in allen Aufgaben ähnlich und erfüllen in verschiedenen Lösungsphasen unterschiedliche Funktionen. So kann eine Skizze gezeichnet werden, um sich die Ausgangssituation zu verdeutlichen. Sie erleichtert die Strukturierung der Angaben und trägt dazu bei, z.B. passende mathematische Verfahren zu finden. Ebenso wie ein Repräsentationswechsel mit Hilfe der Skizze (symbolisch ↔ ikonisch) werden auch andere Strategien – wie z.B. Kontrollmechanismen – nur an der Stelle im Modellierungskreislauf angewandt, wo die Person das für notwendig hält.

(5) Eine intuitive Validierung, die aus der Plausibilitätsüberprüfung des Ergebnisses im Situationsmodell und einer anschließenden Überprüfung der Annahmen im Realmodell besteht, wird von einigen Schülern in allen angebotenen Aufgaben durchgeführt. Ein Grund für die Validierung des realen Resultats ist die Abweichung von dem erwarteten Ergebnis. Ein anderer Auslöser des Validierungsprozesses sind Unsicherheiten der Schüler auf dem Weg zum Ergebnis. Werden Annahmen als zweifelhaft empfunden, wird das Endergebnis kontrolliert und der Übergang vom Situations- zum Realmodell noch einmal überprüft.

Die letzte Überlegung liefert eine Hypothese zur Frage, warum die Reflexions- und die Validierungsphasen im Unterricht selten zu finden sind. Offenbar haben Lehrer, die den Unterricht primär inszenieren, weder am Lösungsprozess noch am Lösungsergebnis Zweifel. Deswegen entfällt bei ihnen eine natürliche Kontrollphase. Gegensteuern können Lehrer z. B. durch die bewusste Integration von Validierungsprozessen in den Unterricht.

Auch für die Schüler wäre eine bewusste Validierung des Ergebnisses außerordentlich empfehlenswert. Sie könnten dann viele Fehler vermeiden und das in einer Modellierungsaufgabe verborgene Lernpotential effektiver nutzen. Somit bietet sich der Modellierungskreislauf als eine Art strategische Hilfe für Lehrer (vgl. Leiß/Möller/Schukajlow 2005) und – in einer vereinfachten Version – auch für Schüler.

Literatur:

Blum, W. & Leiß, D. (2003): Diagnose- und Interventionsformen für einen selbstständigkeitsorientierten Unterricht am Beispiel Mathematik – Vorstellung des Projekts DISUM. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim (Franzbecker), 129-132.

Blum, W. & Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe, In: Mathematik lehren, H. 128, Feb. 2005, S. 18-21.

Kagan, Norman et al.: Stimulated recall in therapy using video-tape – A case study. In: Journal of Counseling Psychology 10 (1963). Heft 3, S. 237-243.

Leiß, D., Möller, V. & Schujkajlow, S. (2006): Diagnostizieren und Fördern mit Modellierungsaufgaben. In: Friedrich Jahresheft XXIV, S. 89-91.

Drücke-Noe, C. & Leiß, D. (2005): Standard-Mathematik von der Basis bis zur Spitze, Sekundarstufe I; – Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematikunterricht. Wiesbaden.

Anhang:

Zuckerhut

Aus einer Zeitungsmeldung:

Die Zuckerhutbahn benötigt für die Fahrt von der Talstation bis zum Gipfel des als Zuckerhut bekannten Berges rund 3 Minuten. Dabei fährt sie mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h und überwindet einen Höhenunterschied von ca. 180 m. Der Cheftechniker Giuseppe Pelligrini würde viel lieber zu Fuß gehen. So wie früher, als er Bergsteiger war und erst von der Talstation über die ausgedehnte Ebene zum Berg rannte und diesen dann in zwölf Minuten bestieg.

Wie weit ist die Strecke ungefähr, die Giuseppe von der Talstation bis zum Fuß des Berges rennen musste? Schreibe deinen Lösungsweg auf.

Riesenschuhe *(aus Drücke-Noe/Leiß 2005)*

Florentino Anonuevo Jr. poliert in einem Sportzentrum auf den Philippinen das laut Guiness Buch der Rekorde weltgrößte Paar Schuhe mit einer Breite von 2,37 m und einer Länge von 5,29 m.

Wie groß wäre der Riesenmensch ungefähr, dem dieses Paar Schuhe passen würde? Beschreibe deinen Lösungsweg.

Heinz SCHUMANN, Weingarten

Gestaltung einer interaktiven Lernumgebung für synthetische Raumgeometrie

Eine neue Ära des Geometrieunterrichts hat begonnen, in der der virtuelle Raum als interaktiver Handlungsraum für das Lernen und Lehren von synthetischer Raumgeometrie genutzt werden kann. Abgesehen von der beschränkten Verwendbarkeit entsprechender Skizzen und physischer Modelle musste man bisher, um raumgeometrisch arbeiten zu können, die Methoden der Darstellenden Geometrie mehr oder weniger gut beherrschen. Erfahrungsgemäß ist aber die Aneignung solcher Methoden eine erhebliche Barriere für den Zugang zur Raumgeometrie. U. a. deshalb ist die Raumgeometrie ein Stiefkind des Geometrieunterrichts, – obwohl „der Raum“ das Medium des Menschen ist.

Dank der Methoden der 3D-Computergrafik, der Software-Ergonomie und leistungsfähiger Hardware verfügen wir mit dem für den Raumgeometrieunterricht entwickelten Cabri 3D (Laborde/Bellemain 2004) ein prototypisches interaktives Computerwerkzeug, das uns die Anwendung der Methoden der Darstellenden Geometrie abnimmt und trotz der Interaktion mit einem zweidimensionalen Bildschirm gestattet, einen relativ offenen geometrisierten virtuellen Raum visuell wahrzunehmen und mental zu konstruieren, in dem wir komfortabel raumgeometrisch arbeiten können (Schumann 2005). Cabri 3D ist das erste Dynamische Raumgeometrie-System, auf das die Konzeption zweidimensionaler Dynamischer Geometrie-Systeme, wie sie zum ersten Male 1988 mit Cabri realisiert worden ist, konsequent auf den Raum übertragen wird. Mit Cabri 3D gewinnen wir einen interaktiven und dynamischen Zugang zu den gegenständlichen Phänomenen der synthetischen Raumgeometrie als eine Voraussetzung für Theoriebildung.

Cabri 3D induziert durch seine Nutzung für das Konstruieren, Manipulieren und Visualisieren raumgeometrischer Konfigurationen eine interaktive Lernumgebung, in der vielfältige Formen des raumgeometrischen Arbeitens möglich sind (Abb. 1), die aber um physische, printmediale und digitale Materialien erweitert werden muss, damit über die bloße Werkzeugnutzung hinaus ein effektives Lernen sowie Lehren von Raumgeometrie und selbstständiges Arbeiten in der Unterrichtspraxis unterstützt werden kann.

Printmediale Arbeitsmaterialien sind: Handbuch(-Auszüge), Aufgabenblätter, Konstruktionsbeschreibungen usw. Digitale Arbeitsmaterialien sind: Menükonfigurationen nach Stufe der Werkzeugbeherrschung, zu bearbeitendem Problemfeld, Klassenstufe; Makrobibliotheken für die Bearbeitung bestimmter Problemfelder, digitale Arbeitsblätter für Visualisierungen, Manipulationen, Konstruktionen (Schumann 1998); Demonstrations-Dateien mit rekonstruierbaren Problemlösungen, Dateien für Animationen; thematische Online-Scripts mit manipulierbaren und visualisierbaren 3D-Bildern und interaktiven Videos; interaktive Instruktionsvideos zur Erklärung des Werkzeugs (z. B. ein Video-Glossar), über

Visualisierungen und Manipulationen (raumgeometrischer Konfigurationen), über Lösungswege von Konstruktionsaufgaben (Schumann u. Knapp 2005); tutoriell bearbeitete Konstruktionsaufgaben usw.
In Abbildung 2 sind die z. Zt. realisierten Komponenten aus interaktiven digitalen Materialien in einem Überblick dargestellt.

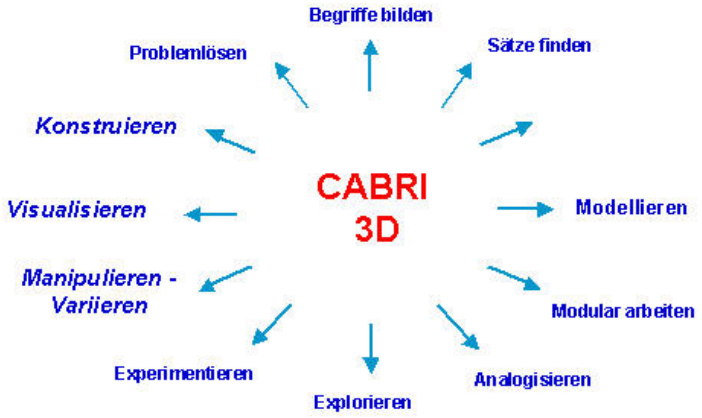


Abb. 1 Allgemeine und spezielle Arbeitsformen im virtuellen Raum des Werkzeugs

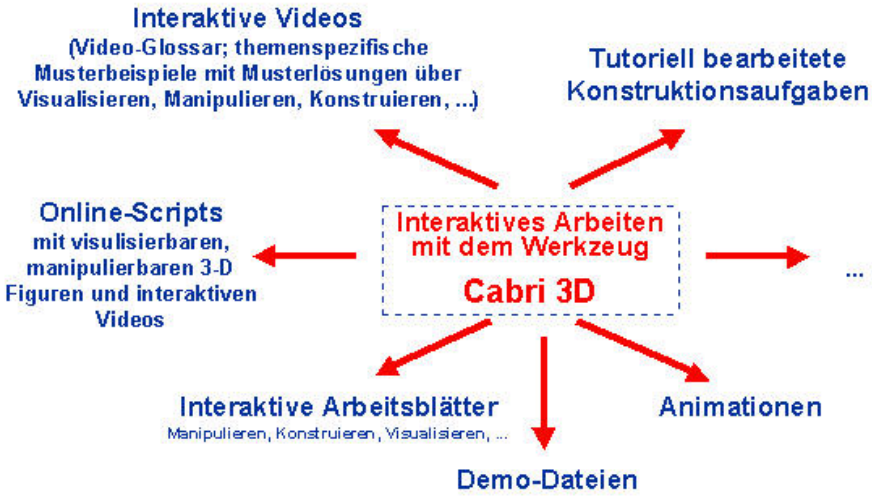


Abb. 2 Komponenten einer interaktiven Lernumgebung

Die interaktiven Komponenten werden durch Aufzeichnen bzw. Abspeichern von Interaktionen bzw. Interaktionsergebnissen mit Cabri 3D erstellt (symbolisiert durch die Pfeile in der Abbildung). Interaktionsprozesse mit Cabri 3D für die außerhalb Cabri 3D lauffähigen Komponenten (Online-Scripts, Interaktive Videos und tutoriell bearbeitete Konstruktionsaufgaben) werden mit entsprechenden Hilfswerkzeugen (TurboDemo, ScreenCorder) erfasst und bearbeitet – und entsprechende Datei-Sammlungen mit Hilfswerkzeugen wie Mediator oder PowerPoint verwaltet und für das Internet aufbereitet (auf die teilweise noch nicht zufriedenstellende adäquate Netzwerktechnik gehen wir hier nicht ein). Studierende und Schüler/Schülerinnen der oberen Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II können, nach entsprechender Anleitung, solche digitalen Materialien selbst erstellen, etwa für Dokumentationen und Präsentationen im Rah-

men von Projekten. Cabri 3D unterstützt durch seine Selbstkommentierung von interaktiven Konstruktionsprozessen die Bearbeitung von Videos.

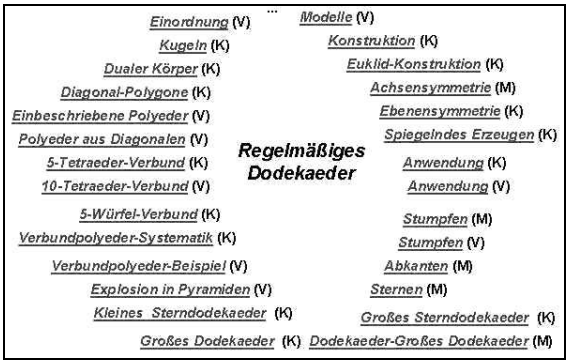


Abb. 3 Polyeder-Monografie in Videos

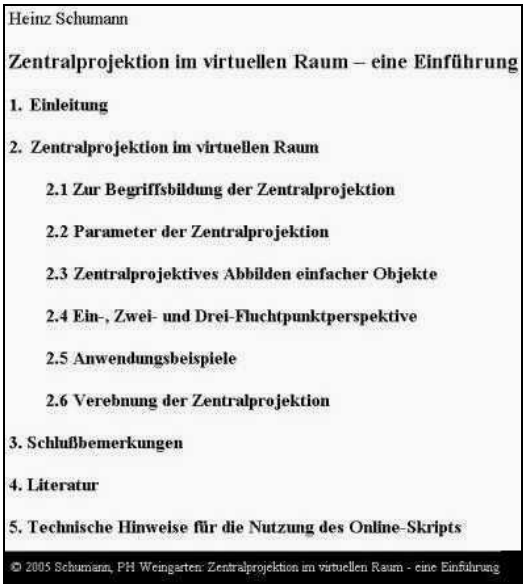


Abb. 4 Online-Script (Menü)

In erweiterungsfähigen thematischen Sammlungen von interaktiven Instruktionsvideos (z. B. einer solchen über geometrische Körper, vergl. Abb. 4) kann idealtypisch unterschieden werden zwischen Instruktionsvideos über Visualisierungen (V), Manipulationen (M) und Konstruktionen (K). Visualisierungen erfolgen im Allgemeinen durch benutzergesteuerte bzw. automatische Rotation der Raumszene oder durch automatische Animation von Größen- und Formvariation raumgeometrischer Konfigurationen. Das entsprechende individuelle benutzergesteuerte „Verziehen“ solcher Konfigurationen kennzeichnet die Manipulation. Die Konstruktion von Konfigurationen benutzt die Cabri 3D-Konstruktionswerkzeuge einschließlich der Generierung von ebenen und räumlichen Formmodulen, von Schnittpolyedern und konvexen Hüllen.
Die Abbildung 3 zeigt das Menü eines Online-Skripts über eine Einführung der Zentralprojektion im virtuellen Raum.
Für die interaktive und dynamische Repräsentation raumgeometrischen Wissens in Form von Online-Scripts und Sammlungen von Instruktionsvideos sind thematisch keine Grenzen gesetzt.
Wir gehen noch etwas näher auf das Lernen mittels Instruktionsvideos und ihre Evaluation ein. Beim Einsatz von Instruktionsvideos handelt es sich um gezieltes Beobachtungslernen von raumgeometrischen Bewegungs- und Handlungsabläufen, d. h. um Konstruktionen, Manipulationen und Visualisierungen im virtuellen Raum, die konkretisiert werden an Musterlösungen bzw. Expertenlösungen für Musterbeispiele, die geometrische Fakten, Verfahren und Anwendungen adäquat repräsentieren sollen (Abb. 5). Im Hinblick auf eine Evaluation solchen Lernens ist es ratsam, entsprechendes Forschungsdesign und entsprechende Forschungsergebnisse aus dem Wissenschaftsbereich der Psychologie zu studieren (vgl. u. a. Renkl et al. 2001, Riempp 1999), um nicht „das Rad neu zu erfin-

den“. Oft haben aber die Vertreter dieser Forschungsrichtung Probleme mit der Repräsentativität und Strukturanalyse von bereichspezifischen Wissensinhalten, an denen sie ihre Forschung über Beobachtungslernen durch Videos bzw. Lösungsbeispiele festmachen. – Im Kontext dieses Beitrags untersucht Knapp (2006) verschiedene Arten von Instruktionsvideos über eine einfache raumgeometrische Konstruktion hinsichtlich der Reproduktionsleistung von Schülern/ Schülerinnen.

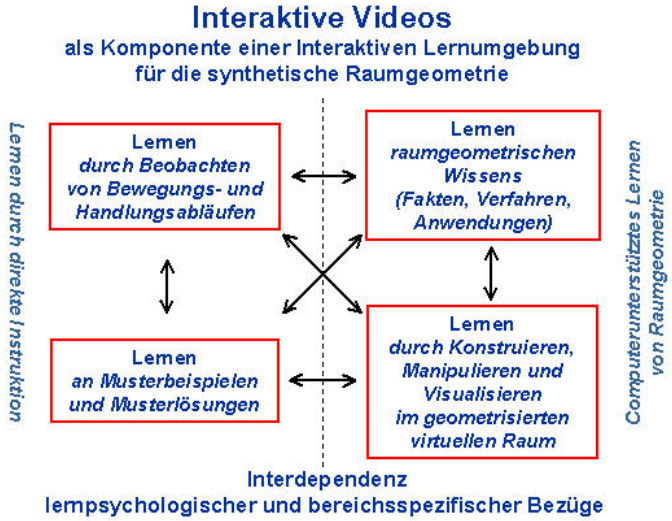


Abb. 5 Lernpsychologische und bereichsspezifische Bezüge

Als offene und herausfordernde Frage bleibt: Welches raumgeometrische Wissen kann im virtuellen Raum so dargestellt und vermittelt werden, dass es effektives raumgeometrisches Wissen und effektive Anwendung solchen Wissens nicht nur im virtuellen, sondern auch im realen Raum zur Folge hat?

Literatur

Bainville, E., Laborde, J.-M. (2004): Cabri 3D 1.2 (Software). Grenoble: Cabrilog. Deutsche Version (Bearbeitung von H. Schumann) zu beziehen von www.cotec.de

Knapp, O. (2006): Evaluation von Instruktionsvideos für raumgeometrische Konstruktionen. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Hildesheim: Franzbecker

Renkl, A. (Hrsg.). (2001): Lernen aus Lösungsbeispielen. Unterrichtswissenschaft, 29, S. 1-95

Riempp, R. (1999): Intentionales Beobachtungslernen von Bewegungs- und Handlungsabläufen. Dissertation, Universität Tübingen, Fakultät für Sozial- und Verhaltenswissenschaften

Schumann, H. (1998): Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. In: Mathematik in der Schule, 1998, Jg. 36, Heft 10, S. 562-569

Schumann, H. (2005): Dynamische Raumgeometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim: Franzbecker, S. 533-536

Schumann, H., Knapp, O. (2005): Instruktionsvideos für das Arbeiten mit Computerwerkzeugen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim: Franzbecker, S. 537-540

Hans-Dieter SILL, Rostock

Funktionen und Ziele von Leistungserhebungen im Mathematikunterricht

1. Vorbemerkungen

Ausgelöst durch die Reaktionen der Kultusministerkonferenz auf die PISA-Ergebnisse wurden in den letzten Jahren in allen Bundesländern bis auf das Saarland zentrale Leistungserhebungen eingeführt bzw. verstärkt durchgeführt und zahlreiche Leistungsstudien entwickelt.

Mit den zentralen Leistungserhebungen wird in der Regel die Erwartung verbunden, die Leistungen der Schüler möglichst kurzfristig zu verbessern. Gegen diese Erwartungen sprechen zahlreiche Erfahrungen in der Geschichte des Mathematikunterrichts in Deutschland. So wurden in der DDR in den Schuljahren 1964/65 bis 1966/67 in mehreren Klassenstufen zentrale Vergleichsarbeiten geschrieben und mit großem Aufwand in allen Schulen des Landes ausgewertet. Da sich trotz erheblicher Bemühungen keine Verbesserung der Schülerleistungen einstellte, wurde diese Aktion nach vier Jahren beendet (Döbert; Geißler). Auch die seit 1998 in Bayern jährlich durchgeführten zentralen Testarbeiten zeigen, dass nach einem kurzen Anstieg der Erfüllungsquote diese sich auf etwa 36 % einpegelt.

Die folgenden Betrachtungen zu Merkmalen und Funktionen von Leistungserhebungen sind Ergebnis einer Analyse fast aller aktuellen Erhebungen in Deutschland und der Auffassungen von Bildungswissenschaftlern.

2. Begriff und Arten von Leistungserhebungen

Unter einer Leistungserhebung wird ein Verfahren zur Ermittlung von Schülerleistungen im Unterricht verstanden. Die Leistung eines Schülers ist ein in einer Anforderungssituation erzeugtes nachweisbares Tätigkeitsprodukt, für dessen Bewertung es Gütemaßstäbe gibt (Heller; Hany). Unter dem Begriff der Leistungserhebung werden damit sämtliche Verfahren zur Ermittlung von Schülerleistungen im Unterricht zusammengefasst, angefangen von Kurzkontrollen über Klassenarbeiten, Abschlussarbeiten, Vergleichsarbeiten bis zu standardisierten Schulleistungstests.

Nach der Art der Verantwortlichkeit kann man Leistungserhebung unterscheiden, die in der Verantwortung des unterrichtenden Lehrers, von regionalen Lehrergruppen, von Landesbehörden bzw. wissenschaftlichen Einrichtungen liegen.

3. Merkmale von Leistungserhebungen

Man kann folgende Merkmale von Leistungserhebungen unterscheiden.

1. Einbeziehung von Bedingungen des Unterrichts
Oft werden bei Leistungserhebungen nur die ermittelten Daten ausgewertet. Diese Daten haben aber einen geringen Erkenntniswert, wenn man nicht die konkreten Unterrichtsbedingungen, unter denen die Ergebnisse entstanden sind, kennt und auch angibt.

2. Festlegung der Grundgesamtheit
Die Zusammenfassung von Schülern zu einer Grundgesamtheit ist nur sinnvoll, wenn die die Ausprägungen der gemeinsamen Bedingungen in den jeweiligen Unterrichtsprozessen annähernd gleich sind.

3. Art der Normierung des Erhebungsverfahrens
Die meisten Leistungserhebungen werden in Bezug auf die getestete Population normiert (normorientierte Normierung). Bei einer kriteriumsorientierten Normierung, die für die Unterrichtsentwicklung viel wertvoller ist, wird dagegen einen Maßstab vorgegeben. Klassen- und Abschlussarbeiten sind oft nur scheinbar kriteriumsorientiert normiert.

4. Bestimmung und Art des zu testenden Personenmerkmals
Eine entscheidende Voraussetzung für die Validität der Erhebung ist die möglichst genaue und konkrete Bestimmung des zu testenden Personenmerkmals, also einer psychischen Disposition. Sie kann sich auf eng begrenzte oder sehr weit gefasste Systeme psychischer Zustände beziehen.

5. Anzahl der Dimensionen der Erhebung
Eine Erhebung kann eine oder gleichzeitig mehrere Personenmerkmale überprüfen, was bei Leistungserhebungen in der Schule die Regel ist.

6. Art der Antwortformate
Man unterscheidet zwischen freien, den Schülern aus dem normalen Unterricht bekannten und gebundenen Antwortformaten, bei denen den Schülern mehrere Antwortmöglichkeiten zur Auswahl vorgegeben werden.

7. Güte des Erhebungsverfahrens
Die Güte eines Verfahrens wird nach den Kriterien Objektivität, Validität und Reliabilität bestimmt.

8. *Art der Vorbereitung auf die Erhebung*
Ein oft vernachlässigtes Merkmal ist die Frage, inwieweit die Lernenden zielgerichtet auf die Leistungserhebung vorbereitet werden und inwieweit dazu die Anforderungen der Erhebung bekannt sind. Turnusmäßige zent-

rale Erhebungen führen unweigerlich zu einer zielgerichteten Vorbereitung.

9. Durchführungsbedingungen
Bei den Durchführungsbedingungen geht es um die Organisation, den Zeitumfang, den rechtlichen Rahmen und den Turnus der Erhebung.

10. Art der Auswertung der Ergebnisse
Zur Art der Auswertung der Ergebnisse gehören Fragen des verwendeten Testmodells und der Benotung der Schülerleistungen.

11. Partizipation aller Beteiligten
Bei jeder Evaluation sollten die Bedürfnisse und Interessen der Prüfenden und Prüflinge bei der Vorbereitung, Durchführung und Auswertung berücksichtigt werden. Dies ist vor allem auch deshalb erforderlich, damit die Ergebnisse der Erhebung von allen akzeptiert und die sich daraus ergebenden Konsequenzen mitgetragen werden.

4. Funktionen von Leistungserhebungen

Die Funktionen von Leistungserhebungen können nur im Rahmen von Bezugssystemen bestimmt werden. Es können die folgenden drei Prozesse als Bezugssysteme unterschieden werden:

– Entwicklung des mathematischen Wissens und Könnens von Lernenden
– Entwicklung des beruflichen Könnens von Lehrern sowie die Entwicklung von Fachkollegien
– Entwicklung von Rahmenbedingungen von Schule und Unterricht wie die Struktur des Bildungssystems, die Gestaltung von Curricula oder die Entwicklung von Testverfahren

Daraus ergeben sich folgende Arten von Leistungserhebungen, deren Merkmale jeweils spezifisch ausgeprägt sind.

4.1 Leistungserhebungen im Prozess der Entwicklung des mathematischen Wissens und Könnens von Lernenden

Dazu zählen Erhebungen, die dem Feststellen und Bewerten des persönlichen Leistungsstandes von Lernenden dienen wie Kurzkontrollen, Klausuren oder Abschlussprüfungen. Bei diesen Leistungserhebungen sind den Lehrern die Unterrichtsbedingungen bekannt. Es werden stets sehr konkrete und mehrere Personenmerkmale mit freien Antwortformaten überprüft. Die Gütekriterien lassen sich kaum erfüllen, da bereits die Unabhängigkeit vom Auswerter nicht gegeben ist. Es erfolgt im Interesse der Schüler eine zielgerichtete Vorbereitung, es gibt rechtlich abgesicherte Rahmenbedingun-

gen und eine Benotung der Leistungen. Die partizipatorischen Anforderungen sind erfüllt.

Weiterhin gibt es in diesem Bezugssystem noch Leistungserhebungen, die dem Feststellen von behebbaren Defiziten in den Leistungseigenschaften eines Lernenden dienen.

Beide Formen von Leistungserhebungen sind für didaktische Forschungen wenig geeignet, da z. B. der Effekt der Vorbereitung kaum erfassbar ist.

4.2 Leistungserhebungen im Prozess der Entwicklung des beruflichen Könnens von Lehrern und Fachkollegien

Diese Leistungserhebungen dienen zur freiwilligen Überprüfung der eigenen Unterrichtsergebnisse. Dies setzt die freie Entscheidung des Lehrers bzw. Kollegiums über die Auswahl der Personenmerkmale und die Testdurchführung voraus. Die Erhebungen sollten grundsätzlich unvorbereitet erfolgen und nicht benotet werden. Dazu ist die Partizipation der Schüler erforderlich. Notwendige Voraussetzungen sind weiterhin zentral entwickelte kriteriumsorientierte Testverfahren für möglichst konkrete Personenmerkmale. Diese Erhebungen sollten das Hauptfeld der Unterrichtsentwicklung und didaktischer Forschungen sein.

4.3 Leistungserhebungen im Prozess der Entwicklung von Rahmenbedingungen von Schule und Unterricht

In diesem Bezugssystem kann man drei Zielgruppen für Leistungserhebungen unterscheiden:

a) Ermitteln empirischer Vergleichsdaten zur Fundierung von bildungspolitischen Entscheidung auf Bundes- und Länderebene

b) Ermitteln von Informationen für Schulaufsichtsbehörden und Schulleitungen als Entscheidungshilfe bei Maßnahmen zur Schulentwicklung

c) Entwicklung von kriteriumsorientierten Diagnoseverfahren für die Hand des Lehrers

Literatur

Döbert, H.; Geißler, G: Schulleistung in der DDR : das System der Leistungsentwicklung, Leistungssicherung und Leistungsmessung. – Frankfurt am Main : Lang, 2000

Heller, K. A. ; Hany, E. A.: Standardisierte Schulleistungsmessungen. – In: Weinert, F. E. (Hrsg.): Leistungsmessungen in Schulen. – Weinheim: Beltz, 2001, S. 87-101

Sikora, Ch.; Sill, H.-D.: Potenzen und Grenzen von Leistungserhebungen im Mathematikunterricht . – Bad Salzdetfurth : Franzbecker (in Vorbereitung)

Johann SJUTS, Osnabrück/Leer; Binyan XU, Shanghai

Befunde aus empirischen Studien zum mathematischen Denken unter besonderer Berücksichtigung von Metakognition

Der nachstehende Beitrag enthält einige Resultate von Studien zum mathematischen Denken in China und Deutschland. Die im chinesisch-deutschen Vergleich zum Teil erheblichen Unterschiede geben zu Fragen Anlass: Welche Kompetenzen lassen sich ausfindig machen, die einerseits Lösungshäufigkeiten zu erklären vermögen, die andererseits in Unterrichtsprozessen gefördert werden können, um die Bearbeitungserfolge zu vergrößern? Welche Bedeutung hat dabei Metakognition?

Die Untersuchungen fanden zu Beginn des Schuljahres 2004/2005 und zu Beginn des Schuljahres 2005/2006 statt, die erste an einem Gymnasium in Leer (Deutschland), die zweite an allen drei Gymnasien des Landkreises Leer sowie an zwei Grundschulen in Shanghai (China). Beteiligt waren 2004 in Leer 458 Schülerinnen und Schüler der Schuljahrgänge 5 bis 7, 2005 im Landkreis Leer 460 Schülerinnen und Schüler des Schuljahrgangs 5 sowie in Shanghai 397 Schülerinnen und Schüler des Schuljahrgangs 5.

Konnte man im ersten Fall (2004) Alters- und Schuljahrgangsentwicklungen betrachten, waren es im zweiten Fall (2005) Leistungsvergleiche zwischen Deutschland und China. Zum Einsatz kamen 2004 und 2005 gleiche Testaufgaben. Aufgaben, Ergebnisse und Analysen zur Studie 2004 finden sich in Sjuts 2005a, b, c.

Die Testpersonen von 2004 waren zehneinhalb bis zwölfeinhalb Jahre alt. Sie besuchten zum Zeitpunkt der Studie zwar alle die gleiche Schule, hatten aber erst wenige Tage zuvor den Besuch dieser Schule aufgenommen. Das lag an der besonderen Situation zu diesem Zeitpunkt. Das Bundesland Niedersachsen hatte nämlich die dortige eigenständige Orientierungsstufe (bestehend aus den Schuljahrgängen 5 und 6) abgeschafft. Und somit kamen aus dem Schuljahrgang 4 zahlreicher Grundschulen sowie aus den Schuljahrgängen 5 und 6 mehrerer gerade aufgelöster Orientierungsstufen gleichzeitig drei neue Schuljahrgänge (5, 6 und 7) an das Gymnasium.

Die Testpersonen von 2005 waren zehneinhalb Jahre alt. Die deutschen Schülerinnen und Schüler entstammten wiederum zahlreichen Grundschulen und waren in den Schuljahrgang 5 der drei Gymnasien gewechselt. Die chinesischen Schülerinnen und Schüler besuchten alle noch den Schuljahrgang 5 der insgesamt fünfjährigen Grundschule.

I. Die Testaufgabe „Zahlenfolgen“ soll einem ersten chinesisch-deutschen Vergleich dienen.

Zahlenfolgen

Setze die Zahlenfolgen jeweils fort!

2	*5*	*8*	*11*	*14*	*...*	*...*	*...*
1	*3*	*7*	*15*	*31*	*...*	*...*	*...*
0	*5*	*15*	*30*	*50*	*...*	*...*	*...*

Dazu sei das Gesamtergebnis der Aufgabe betrachtet.

	Shanghai 2005 Jahrgang 5 (397)	Leer 2005 Jahrgang 5 (460)	Leer 2004 Jahrgang 5 (145)	Leer 2004 Jahrgang 6 (174)	Leer 2004 Jahrgang 7 (139)
Zahlenfolgen	78,5 %	58,1 %	54,7 %	64,1 %	75,3 %

Die Ergebnisse, die chinesische Grundschülerinnen und -schüler zu Beginn des Schuljahrgangs 5 erzielen, erreichen deutsche Gymnasialschülerinnen und -schüler allenfalls zu Beginn des Schuljahrgangs 7. Die bei der Bewältigung von Aufgaben zum mathematischen Denken von eher geringer Komplexität in China zu verzeichnende Erfolgsquote wird in Deutschland erst zwei Jahre später – und zwar im Gymnasium – erreicht. Welche Erklärungen könnte es dafür geben? Curriculare Gründe, also das Nichtvorhandensein arithmetischer Kenntnisse und Fertigkeiten sowie die Nichtvertrautheit mit derartigen Aufgaben, scheiden aus (Xu 2005).

	Shanghai 2005 Jahrgang 5 (397)	Leer 2005 Jahrgang 5 (460)	Leer 2004 Jahrgang 5 (145)	Leer 2004 Jahrgang 6 (174)	Leer 2004 Jahrgang 7 (139)
Erste Folge	92,4 %	96,1 %	92,4 %	94,8 %	97,8 %
Zweite Folge	67,8 %	26,3 %	22,8 %	39,7 %	50,4 %
Dritte Folge	75,3 %	52,0 %	49,0 %	58,0 %	77,7 %

Bei der einfachsten Folge (der ersten Folge) gelangen die deutschen (gymnasialen) Testpersonen zu besseren Ergebnissen als die chinesischen Testpersonen aus der Grundschule. Bei der in der Schwierigkeit dann folgenden Folge (der dritten Folge) sind erst deutsche Gymnasialschülerinnen und -schüler – und die eben zwei Jahre später – den chinesischen Grundschülerinnen und -schülern ebenbürtig. Bei der schwierigsten Folge (der zweiten Folge) holen die deutschen gymnasialen Testpersonen – selbst nach zwei Jahren – den in China bereits in der Grundschule erworbenen Vorsprung nicht auf.

Erklärungen wird man bei kognitiven und metakognitiven Prozessen (Sjuts 2003) suchen müssen. Die kognitiven Anforderungen sind bei der ersten und der dritten Folge eher gering; hier müssten also hauptsächlich metakognitive Aktivitäten von Bedeutung sein. Die kognitiven Anfor-

derungen bei der zweiten Folge sind sicher höher; das Bildungsgesetz der Folge ist komplizierter. Hat man jedoch das Bildungsgesetz herausgefunden, bleibt als Anforderung, beim Ausrechnen der weiteren Folgenglieder das Bildungsgesetz nicht aus den Augen zu verlieren. Wichtig ist es also, genau zu überwachen und zu prüfen, ob die Berechnungen sowohl dem jeweiligen Folgenprinzip genügen als auch arithmetisch richtig sind.

These 1: Am Ende der Grundschulzeit setzen (deutsche) Schülerinnen und Schüler in nur geringem Maße Metakognition ein, um so ihr mathematisches Denken bei Anforderungen von eher geringer Komplexität zu kontrollieren. *Steuerung, Überwachung und Überprüfung kognitiver Prozesse* nehmen zwar mit Alter und Schuljahrgang zu, könnten und müssten aber durch gezielte Unterrichtsmaßnahmen früher und nachhaltiger geschult werden. So ließen sich deutliche Leistungsverbesserungen im mathematischen Denken bei Anforderungen von eher geringer Komplexität erreichen.

II. Es sollen nun komplexere Anforderungen ins Blickfeld rücken. Die Testaufgabe „Wanne“ enthält solche, und zwar mit dreistufigen Komplexitätsvarianten. Diese Varianten sind durch steigende kognitive Komplexität gekennzeichnet (kurz: KK 1, KK 2 und KK 3).

Wanne *(KK 1)*

Man braucht drei Minuten, um eine Wanne zu füllen, und sechs Minuten, um sie zu leeren.

Wie lange dauert es, die Wanne zu füllen, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?

Wanne *(KK 2)*

Man braucht zwei Minuten, um eine Wanne zu füllen, und drei Minuten, um sie zu leeren.

Wie lange dauert es, die Wanne zu füllen, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?

Wanne *(KK 3)*

Man braucht drei Minuten, um eine Wanne zu füllen, und fünf Minuten, um sie zu leeren.

Wie lange dauert es, die Wanne zu füllen, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?

Es ist offensichtlich, dass diese Aufgabe ein anspruchsvolleres Denken verlangt als die Aufgabe „Zahlenfolgen“. Wie sieht nun der chinesisch-deutsche Vergleich aus? Zu erwähnen ist, dass die Testpersonen nach einem Zufallsprinzip sich nur mit einer Komplexitätsvariante zu beschäftigen hatten. So sollte ein allmähliches Vertrautwerden und Hocharbeiten ausgeschlossen werden. Die folgende Tabelle enthält zum besseren Verständnis auch die absoluten Zahlen.

	Shanghai 2005 Jahrgang 5 (397 Testpersonen)	Leer 2005 Jahrgang 5 (460 Testpersonen)	Leer 2004 Jahrgänge 5 bis 7 (458 Testpersonen)
Wanne KK 1	55 von 138 (39,9 %)	28 von 153 (18,3 %)	43 von 155 (27,7 %)
Wanne KK 2	36 von 124 (29,0 %)	14 von 151 (9,3 %)	24 von 153 (15,7 %)
Wanne KK 3	22 von 135 (15,8 %)	0 von 156 (0,0 %)	2 von 150 (1,3 %)

Gibt es auch hier Verbesserungen mit steigendem Alter und Jahrgang?

	Shanghai 2005 Jahrgang 5 (397)	Leer 2005 Jahrgang 5 (460)	Leer 2004 Jahrgang 5 (145)	Leer 2004 Jahrgang 6 (174)	Leer 2004 Jahrgang 7 (139)
Wanne	28,5 %	9,1 %	13,1 %	13,8 %	18,7 %

Zwar gibt es Steigerungen von Jahr zu Jahr; aber in keinem Fall kommen die deutschen Testpersonen aus dem Gymnasium an die chinesischen Testpersonen aus der Grundschule heran.

These 2: Am Ende der Grundschulzeit verfügen (deutsche) Schülerinnen und Schüler in nur geringem Maße über Metakognition, um so ihr mathematisches Denken bei Anforderungen von eher hoher Komplexität zu unterstützen. *Organisation, Reorganisation und Reflexion kognitiver Prozesse*, die zur Bewältigung anspruchsvoller Aufgaben beitragen, stellen sich nicht von selbst ein. Sie könnten und müssten aber durch gezielte Unterrichtsmaßnahmen früher und nachhaltiger geschult werden. So ließen sich deutliche Leistungsverbesserungen im mathematischen Denken bei Anforderungen von eher hoher Komplexität erreichen.

Literatur:

Sjuts, Johann (2003): Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 24, Heft 1, S. 18-40, 2003

Sjuts, Johann (2005a): Denken will organisiert sein. Empirische Studien zur Komplexität mathematischen Denkens. In: Kaune, Christa & Schwank, Inge & Sjuts, Johann (Hrsg.): Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens. Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg. Band 2. 2005

Sjuts, Johann (2005b): Empirische Studien zur Komplexität mathematischen Denkens. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005

Sjuts, Johann (2005c): Thinking wants to be Organized. Empirical Studies to the Complexity of Mathematical Thinking. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Volume 37 (5), 2005, pp. 424-430

Xu, Binyan (2005): Die mathematische Curriculumreform in China und ihre Auswirkungen auf die didaktische Konzeption von Schulbüchern. In: Kaune, Christa & Schwank, Inge & Sjuts, Johann (Hrsg.): Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens. Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg. Band 2. 2005

Norbert SOMMER, Osnabrück

„Bremens Gymnasiasten hinken ein Jahr hinterher.“[1]

Die Schlagzeile stellt keine journalistische Überzeichnung des in Form von Punktdifferenzen angegebenen Leistungsunterschieds verschiedener Schülergruppen dar, sondern sie deckt sich von Intention und Inhalt her mit Aussagen internationaler Vergleichsuntersuchungen. In TIMSS II wird die Zuordnung zwischen Rasch-skalierten Punktwerten und Schulzeit erstmals hergestellt: „Im schulischen Bereich bieten sich als mögliche Vergleichsmaßstäbe die fachlichen Lernfortschritte an, die normalerweise in einem Schuljahr erzielt werden ... Die mittleren Fähigkeitsdifferenzen zwischen einer Jahrgangsstufe zur nächsten betragen im Durchschnitt ungefähr 1/3 Standardabweichungen.“ (Baumert/Lehmann u.a., 1997, S.67). In diesem Maßstab erweist sich der Unterschied zwischen Bundesländern mit hohem und niedrigem durchschnittlichen Kompetenzniveau in der PISA-E 2003 Studie über alle Schüler hinweg sogar als noch größer als in der Schlagzeile für Gymnasien berichtet: „Die innerhalb der Länder erreichten Kompetenzniveaus variieren zwischen 471 Punkten (Bremen) und 533 Punkten (Bayern). Diese Spannweite von 62 Punkten entspricht dem Kompetenzzuwachs von etwa 1,5 Schuljahren.“ (Ehmke, 2005, S. 3)

Schon in diesen Deutungen von Leistungsdifferenzen aus zwei Vergleichsstudien fallen Abweichungen in der Höhe des Zusammenhangs zwischen Punktdifferenz und Schulzeit auf: Bei einer Skalierung auf den Mittelwert 500 und die Standardabweichung 100 sind 1/3 Standardabweichung ca. 33 Punkte. Die in der deutschen Längsschnittstudie innerhalb von TIMSS II beobachtete Differenz in den Mathematikleistungen 13jähriger in den Klassenstufen 7 und 8 ist mit 25 Punkten deutlich geringer; die in der PISA-E Studie beschriebene Differenz von 62 Punkten liegt nach diesem Maßstab näher an zwei Schuljahren als an eineinhalb.[2]

Die Frage der Variabilität des Zusammenhangs zwischen Punktdifferenzen in Mathematikleistungstests und Schulzeit soll näher untersucht werden, wobei theoretische und empirische Problemfelder angesprochen werden.

- Lassen sich Zuwächse in Längsschnittstudien allein auf Unterrichtszeit zurückführen (u.a. Reifung, Retesteffekte)?
- Liegen die Ergebnisse von Querschnittstudien (PISA) in derselben Größenordnung wie Längsschnittstudien?

---

[1] Schlagzeile der Süddeutschen Zeitung vom 2.11.2005 aus Anlass der Veröffentlichung der zweiten PISA-E-Studie 2003

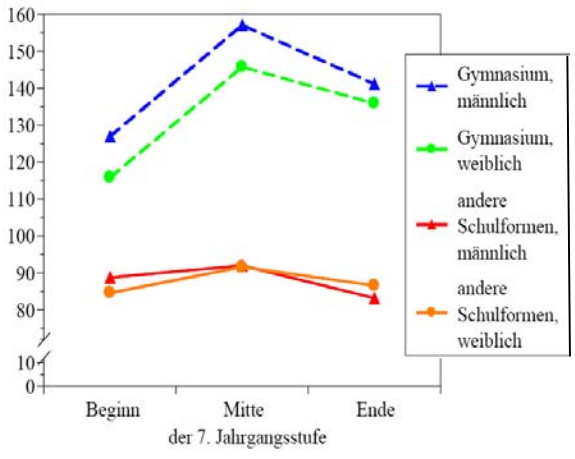
[2] In Veröffentlichungen finden sich auch grobere Angaben für ein Schuljahr, z.B. „etwa 30 bis 40 PISA-Punkte“ (Baumert u.a., 2005), „zwischen einer drittel und einer halben Standardabweichung“ (Blum/Neubrand u.a., 2004).

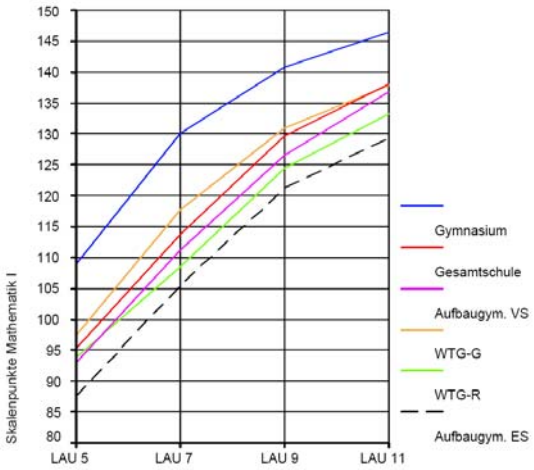
- Handelt es sich bei TIMSS-13- bzw. PISA-15jährigen in verschiedenen Jahrgangsstufen um vergleichbare Schülergruppen (Kohorteneffekte)?[3]
- Besteht ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Höhe der Punktdifferenz und der Länge der Schulzeit (u.a. Latenzphasen)?
- Ist die Annahme der Eindimensionalität und die Differenzwertbildung bei Leistungen, die zu verschiedenen Zeitpunkten erhoben werden, sinnvoll (u.a. Änderung des Konstrukts Schulleistung über die Zeit; vgl. Köller/Baumert 2002, Lind 2003)?
- Welchen Einfluss hat die Itemzusammenstellung auf die Höhe des Zusammenhangs (u.a. floor-/ceiling Effekt für die jüngere/ältere Untersuchungsgruppe, Abdeckung mathematischer Kompetenz)?
- Welche Beziehung muss zwischen Unterrichts- und Iteminhalten bestehen um einen Lernzuwachs erwarten zu können (u.a. Behandlung abgefragter neuer und Wiederholung abgefragter „alter“ Inhalte zwischen den Messzeitpunkten; vgl. Baumert/Lehmann u.a., 1997)?

Die Untersuchung der Fragen geschieht anhand von

- Veröffentlichungen zu größeren Schulleistungsuntersuchungen,
  - Zusammenstellungen der mitgeteilten Daten der Aufgabenschwierigkeit von 106 veröffentlichten TIMSS II Items,
  - vertieften Analysen des KMK Datensatzes zu PISA-E 2000,
- eigenen Untersuchungen in verschiedenen Jahrgangsstufen mit veröffentlichten TIMSS und PISA Aufgaben.

Die Stabilität der Beziehung „1/3 Standardabweichung entspricht einem Schuljahr“ erweist sich in verschiedenen Längsschnittuntersuchungen als eher gering. Auch die Annahme einer Proportionalität bzw. der Übertragbarkeit von Aussagen eines Abschnitts der Schullaufbahn auf einen früher



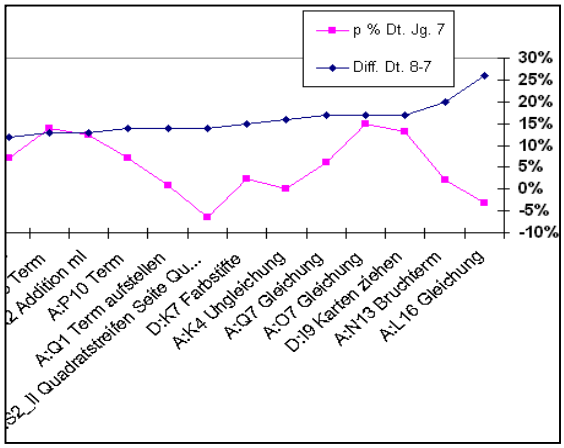


3 Nach eigenen Analysen der KMK-Daten zu PISA-E 2000 unterscheiden sich die Klassenstufen im Alter in Monaten, der Verteilung auf die Schulformen, den Anteilen von frühzeitig bzw. verspätet eingeschulten Schülern und Klassenwiederholungen sowie der allgemeinen kognitiven Fähigkeit.

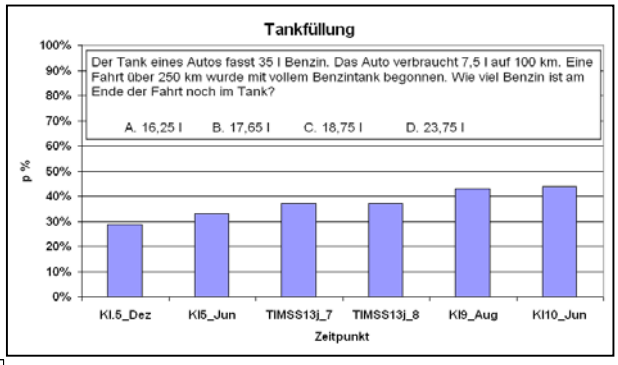
oder später in der Schullaufbahn gelegenen oder eine kürzere oder längere Phase ist nicht in jedem Fall gerechtfertigt. Während die rechte Grafik (s.o.) aus der BIJU-Studie (Hosenfeld, 2000) Schwankungen der Leistungsentwicklung innerhalb eines Schuljahres und Effekte in einer Größenordnung zeigt, die schon im ersten Halbjahr den angenommenen Jahreswert überschreitet, spricht die rechte aus LAU 11 (Lehmann u.a., 2004) für ein Abflachen der Zuwächse in älteren Jahrgangsstufen.

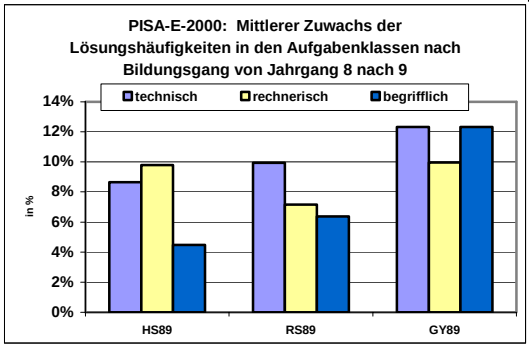
Die Angaben zu veröffentlichten TIMSS II Aufgaben ergeben, dass die auf Schülerebene ermittelten Leistungsdifferenzen zwischen Klasse 7 und 8 von 25 Punkten in Deutschland und 29 Punkten international auf Itemebene einen durchschnittlichen Zuwachs der Lösungshäufigkeit um 4,8 % (dt.; min. - 6,0 % max. 26 %) bzw. 5,7% (int.; min. 0,0 % max. 17 %) bedeuten.

Die nebenstehende Grafik zeigt, welche zehn Items in TIMSS II von Klasse 7 auf 8 den höchsten Zuwachs aufweisen.[4] Sieben der zehn sind dem Bereich Algebra zugeordnet, einem Unterrichtsinhalt, in den schwerpunktmäßig in den Klassen 7 und 8 eingeführt wird. Diese Tendenz lässt sich an den Items aus PISA-E 2000 bestätigen.



In eigenen Untersuchungen fallen Lernzuwächse bei mehrschrittigen „Problemaufgaben“, für die nicht explizit ein Lösungsverfahren im Unterricht erarbeitet wird, wie der Aufgabe „Tankfüllung“, gering aus.



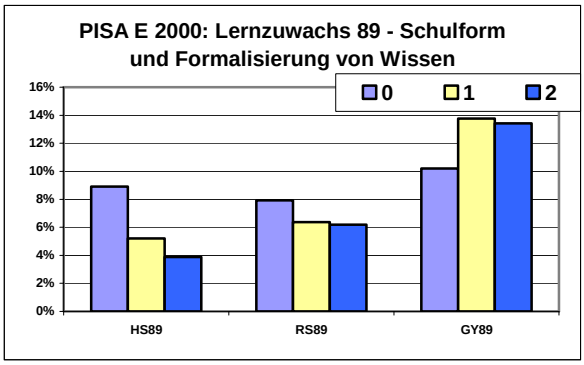


Aber nicht nur curriculare Erklärungen tragen zur Aufklärung von Lernzuwachsmustern bei. Für die PISA-2000 Aufgaben haben Neubrand u.a. (2002), Blum u.a. (2004) und Cohors-Fresenborg u.a. (2004) die Bedeutung von Aufgabenmerkmalen nachgewiesen, die

[4] In dem Diagrammausschnitt bezieht sich die Skalierung rechts nur auf Diff. Dt. 8-7.

kognitive Prozesse bei der Aufgabenlösung betreffen. Bei rechnerischen Modellierungsaufgaben ist der Zuwachs von Klasse 8 auf 9 bei Hauptschülern ähnlich groß wie am Gymnasium (bei unterschiedlichem Ausgangsniveau), der Leistungsvorteil der Gymnasialschüler zeigt sich besonders beim begrifflichen Modellieren.

Auch bei einer Klassifizierung der Aufgaben nach Grundvorstellungsintensität (Blum u.a., 2004), Sprachlogischer und Kognitiver Komplexität, Formalisierung von Wissen (s. Grafik) und Formelhandhabung (Cohors-Fresenborg u.a., 2004[5]) zeigen sich schulformspezifische Unterschiede im Kompetenzzuwachs. Schon bei einem geringen Anspruch an Formalisierung (Grafik rechts; Stufe 1) fällt der Lernzuwachs von Haupt- und Realschülern gegenüber Schülern aus dem Gymnasium deutlich ab.



Die Ergebnissen sind vermutlich Ausdruck unterschiedlicher Schwerpunktsetzungen im Unterricht der Schulformen, wie sie sich in Lehrerbefragungen im Rahmen von PISA und COAKTIV zeigen (vgl. Neubrand, 2006).

Die Beziehung „1 Schuljahr = 1/3 s“ erweist als relativ stabil, wenn:
- Schüler des mittleren Sek I - Bereichs untersucht werden,
- die Stichprobe ein repräsentatives Bild der Schülerpopulation eines Jahrgangs ist,
- der eingesetzte Test die mathematische Kompetenz umfassend abbildet (Multi-Matrix-Design),
- die Aussagekraft der Testergebnisse am oberen Ende der Leistungsfähigkeit nicht durch Deckeneffekte eingeschränkt ist.

Die Beziehung wird beeinflusst durch:
- die Leistungsfähigkeit der Untersuchungsgruppe (allgemeine kognitive Leistungsfähigkeit; Vorwissensstand; Schulform),
- das Alter der Untersuchungsgruppe (höhere Zuwächse durch schmales Kompetenzfeld bei jüngeren Schülern; bei älteren Schülern Abflachen des Zuwachses),
- die Unterrichtsnähe der in den Testaufgaben berührten Inhalte bezogen auf die Zeit zwischen den Messungen,
- die spezifischen kognitiven Anforderungen der Aufgaben.

[5] Das Literaturverzeichnis kann beim Autor abgerufen werden.

Horst STEIBL, Braunschweig

Kombinatorische Aspekte auf dem 9-Nagel-Geobrett

Beim Arbeiten mit dem Geobrett tauchen oft Fragen auf, die mit „Wie viele....“ beginnen. Solche Fragen ermöglichen ein eigenständiges forschendes Verhalten. Wie viele Dreiecke gibt es? Wie viele Vierecke, Strecken, Längen, verschiedene Winkel?

Ein derartiges Suchen kann als „blindes“ Suchen oder als systematisches Suchen erfolgen. Wir finden etwa auf dem 9-Nagel-Brett 8 Klassen kongruenter Dreiecke, 16 Klassen kongruenter Vierecke, 5 Klassen gleich langer Strecken (d.h. 5 Längen), 10 Klassen gleich großer Dreieckswinkel. Ich möchte das blinde Suchen nicht zu gering bewerten. Der Begriff „die denkende Hand“ macht deutlich, welche wichtigen Prozesse dabei im Gehirn ablaufen können. Dennoch sollte man die Schüler zum systematische Suchen hinführen. Wir halten eine Strecke fest und suchen alle Winkel.....

Mitunter kommen allerdings (wenn auch selten) Einwände und die Schüler wollen sich nicht mit dem bloßen Probieren begnügen. Hier ist das Einbeziehen kombinatorische Fragestellungen angezeigt.

Die Frage „Wie viele Dreiecke gibt es“ kann auch anders formuliert werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es unter den 9 Nägeln 3 auszuwählen. Damit sind wir bei dem Binomialkoeffizienten $\binom{9}{3}$ Wie sprechen „9 über 3“ . die Formulierung „3 unter 9“ entspricht dem deutschen Sprachgebrauch besser.

Zu Einführung dieser Denkweise bieten wir ein Spiel an: Wir ordnen dem Tastentelefon entsprechend den 9 Nägeln die Ziffern 1 bis 9 zu. Wir beschriften 9 Spielsteine mit den Ziffern 1 bis 9. Legen sie in einen Beutel und ziehen ***nacheinander*** 3 Steine (oder später 2, oder 4, 5). Ziehen wir etwa die 6, die 1 und die 8, so ist damit dieses (7, 11, 11)-Dreieck bestimmt. Nicht jedes derartige Tripel bestimmt allerdings ein Dreieck. Das Tripel (1, 5, 9) beschreibt eine Diagonale, (1,2,3) beschreibt eine 10er-Strecke usw.

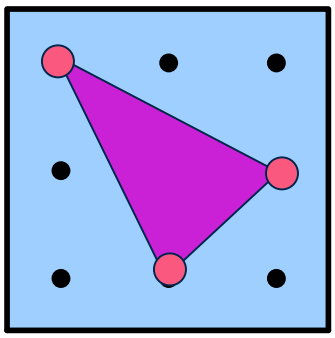


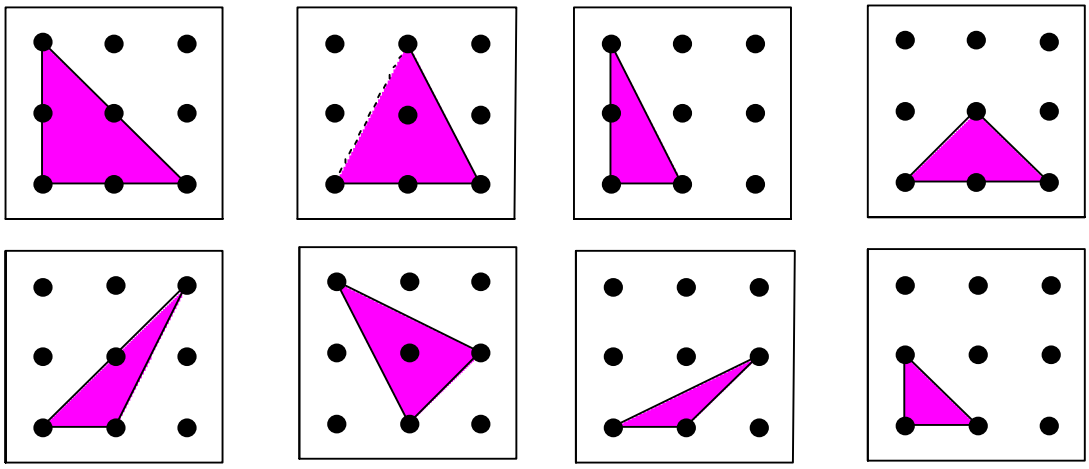
Abbildung 1: Das Tripel 1 6 8 bestimmt dieses (7,11,11)-Dreieck

Zum Spiel benötigen wir für jeden Spieler ein Geobrett und 5 Würfelchen als Spielgeld. Neun mit den Ziffern 1 bis 9 beschriftete Spielsteine liegen in einem Beutel.

Spielregel: Einsatz: ein Würfelchen. Jeder Spieler zieht (nacheinander) 3 der beschrifteten Spielsteine und spannt sein Dreieck. Gewonnen hat der, dessen Dreieck den **größeren Flächeninhalt** hat. Bei gleichem Inhalt gewinnt der **kleinere Umfang.** Die 10-Strecke ist eine Niete, die 14-Strecke ein Hauptgewinn.

Man kann die Spieldauer mit einer Strichliste dokumentieren. Nach wie vielen Durchgängen hat ein Spielen kein Spielgeld mehr? Kann man eine solche Vorhersage treffen: Nach etwa ....

Haben die Schüler ausreichend Erfahrung mit dem „Urnenmodell“ gesammelt, so wollen wir dieses analysieren. Wie viele Drillinge (Tripel) von Ziffern sind eigentlich möglich? Für die erste Ziffer gibt es 9 Möglichkeiten, für die 2. noch 8 und für die 3. noch 7. Also 9 + 8 + 7 Möglichkeiten. Ja aber: das Dreiecke 168 wird auch durch die Tripel 186, 618, 681, 816, und 861 beschrieben. Also gibt es $\binom{9}{3} = \frac{9*8*7}{3*2*1} = 84$ Möglichkeiten, 3 verschieden Spielsteine zu ziehen Wie kann man von hier aus auf die Anzahl der Klassen kongruenter Dreiecke schließen? Nun kommen die verschiedenen Lagemöglichkeiten der Figuren ins Spiel. Die 10-er Strecke hat 6 Lagemöglichkeiten, die 14-er Strecke hat 2 Lagemöglichkeiten. Für die Dreiecke sieht das so aus:



4 + 4 + 16+ 8 + 8 + 4 +16 + 16 = 76

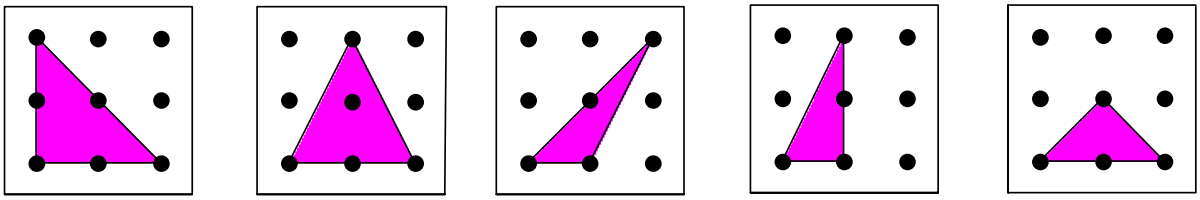
Abbildung 2: Die Anzahl der Lagemöglichkeiten der Dreieck

Damit erhalten wir also 8 Strecken und 76 Dreiecke, also 84 Figuren, die durch 3 Nägel bestimmt sind. Es kann also nicht mehr geben.

Die Anzahl der möglichen Strecke ergibt sich als $\binom{9}{2} = \frac{9*8}{2*1} = 36$ und macht das Prinzip der Bildung eines Binomialkoeffizienten noch einmal deutlich.

Für die Vierecke sind die Überlegungen etwas komplizierter:

Wie finden wir die $\binom{9}{4} = \frac{9*8*7*6}{4*3*2*1} = 126$ Figuren aus 4 Nägeln? Es gibt zwar keine kollineare Anordnung, aber 3 Nägel können kollinear liegen.



4 + 4 + 8 + 16 + 8

Abbildung 3: Die Lagemöglichkeiten der durch vier Nägel bestimmten Dreiecke

Damit ergeben sich 4 + 4 + 8 + 16 + 8 = 40 Lagemöglichkeiten. Das sind aber leider nicht die Möglichkeiten der entsprechenden Quadrupel. Das erste (10, 10, 14)-Dreieck hat drei Strecken mit 3 Nägeln. Deshalb sind das nicht 4, sondern 3 * 4 = 12 Fälle, also insgesamt 48 Fälle.

Betrachten wir entsprechend die Lagemöglichkeiten der Vierecke, so ergeben sich 94 Fälle, insgesamt erhalten wir also 48 * 94 = 142 Fälle und damit 16 zu viel.

Der Fehler entsteht bei dem Spannen der Vierecke mit einspringender Ecke. Die Fehlersuche ist allerdings lehrreich. Das Quadrupel 2579 bestimmt drei verschiedene Figuren.

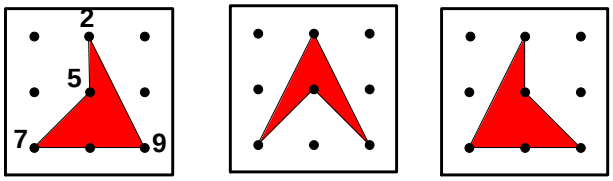


Abbildung 4: Das Quadrupel 2579 bestimmt drei Figuren

Somit stellen wir fest: es gibt zwei Fehlermöglichkeiten:

Nicht jedes Quadrupel bestimmt eindeutig eine Figur.

Nicht jede Figur wir eindeutig durch ein Quadrupel beschrieben.

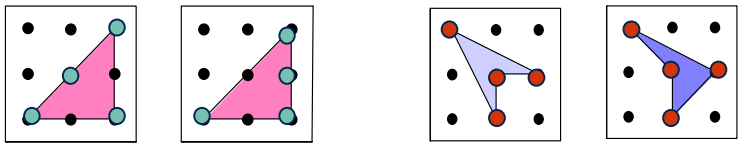
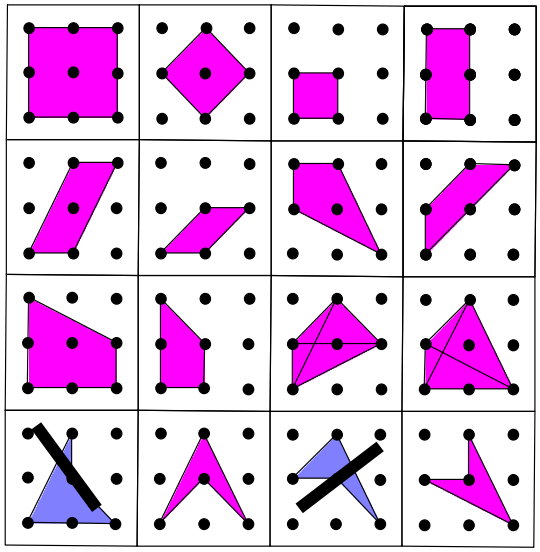


Abbildung 5: die beiden Fehlermöglichkeiten

Betrachten wir die Lagemöglichkeiten der Viereckc mit dieser Einschränkung, so erhalten wir

1 + 1 + 4 + 4
4 + 8 + 4 + 4
8 + 16 + 8 + 8
4 + 4



Insgesamt also 78 Fälle. 78 + 48 = 126. Also können wir sicher sein, alle Vierecke gefunden zu haben.
Man kann diese Fragestellung auf 5 Nägel ausweiten. Dabei kommen die nicht konvexen Figuren verstärkt ins spiel, Deutet man diese als Vierecke mit einem Nagel im Inneren, so kommt man gut zurecht. Bei einer solchen Figur kann man jede der vier Seiten nach innen über den Nagel im Innerern ziehen.

Abbildung 6: Anzahl der Lagemöglichkeiten die Vierecke

Ob man diese Fragestellungen in diese Ausführlichkeit behandeln sollte, kann man durchaus in Frage stellen.
Das folgende Spiel macht aber den wahrscheinlichkeitstheoretischen Aspekt des Problems deutlich:

Spiel mit vier Nägeln (Flächeninhalt)

Zwei Spieler, jeweils 10 Spielsteine als Einsatz. Gesetzt werden jeweils 2 Steine. Der erste Spieler zieht seine vier Ziffern. Der zweite kann nun entscheiden, ob er noch ziehen will oder ob er zurückzieht. Spielt er, so hat der mit dem größeren Flächeninhalt (evtl. kleinerem Umfang) gewonnen und bekommt vier Spielsteine. Zieht er zurück, so bekommt er einen Stein zurück der andere bekommt 3 Steine. Wann sollte man zurückziehen?

Literatur:

Steibl, Horst: Geobrett im Unterricht,2006 by Franzbecker, Hildesheim, Berlin
Steibl, Horst: Kombinatorische und wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekte am Geobrett, in Beiträge zum Mathematikunterricht 1977, Hannover 1977
Steibl, Horst: Exemplarische Entwicklung der kombinatorischen Grundformeln, in: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 30 Heft 1/1984
http://madin.tu-bs.de/homepage/steibl/pptankuendigungen/kombigeobrett.ppt

Kinga SZŰCS, Budapest

Untersuchung der Reichweite der allgemeinen fremdsprachlichen Lesekompetenz in mathematischer Lernumgebung

Eine Fallstudie an der Budapester Wirtschaftshochschule

Abstract: The European integration, the economic, cultural and science cooperation in Europe support more and more the use of bilingual educational institutions, but besided a general didactics for bilingual teaching even a fundamental conception for teaching mathematics in a foreign language is also missing. In this paper a case study is related, which was looking for the answer for the question, to how far extend the general competence in a foreign language, especially the reading competence by getting technical knowledge in technical situations in a foreign language.

ZDM Subject Classification: C55, E45

Key words and phrases: Sprachverstehen, Sprachschwierigkeiten, Vielsprachigkeit, Behandlung mathematischer Begriffe und Definitionen im MU, Sprache der Mathematik

1. Problemstellung, Zielsetzung

Die Erweiterung der Europäischen Union, das wirtschaftliche, kulturelle und wissenschaftliche Zusammenwachsen Europas fördert immer stärker die Verbreitung der bilingualen Bildungsformen**,** es fehlt aber nicht nur eine allgemeine Didaktik hinsichtlich des bilingualen Sachfachunterrichts, sondern es fehlen auch die Grundlagen einer fremdsprachlichen/ zweisprachigen Mathematikdidaktik.[1] In denjenigen bilingualen Bildungsgängen, wo der Fachunterricht, das Fachliche im Vordergrund steht, wird latent angenommen, die vorhandene allgemeine Fremdsprachenkompetenz reiche aus, sich im Fach in der Fremdsprache weiterzubilden, obwohl der bilinguale Sachfachunterricht stärker auf die akademischen Fertigkeiten angewiesen ist, als der Fremdsprachenunterricht.[2]selbst. Um diese latente Annahme zu überprüfen, wurde u.a. eine Fallstudie an der Budapester Wirtschaftshochschule durchgeführt, in deren Mittelpunkt die Frage steht, inwieweit die allgemeine Fremdsprachenkompetenz, insbesondere die

---

[1]Vgl*:„Zwar gibt es, wie eingangs gesagt, weder einen Konsens über die Methoden des fremdsprachlichen Unterrichts noch eine Methodik des fremdsprachlich durcgeführten Sachfachunterrichts."* In: Bach, Gerhard/Niemeyer, Susanne (Hrsg.)(2002): Bilingualer Unterricht. Grundlagen, Methoden, Praxis, Perspektiven. Peter Lang Europäischer Verlag der Wissenschaften. S. 17.

[2] Wolff, Dieter: 2002

fremdsprachliche Lesekompetenz ausreicht, aus fremdsprachlichem Kontext fachliche Kenntnisse abzuleiten.

2. Modellbildung

a.) Theoretisches Modell

Theoretische Überlegungen zeigen, dass der bilingualen Fach-(Mathematik) unterricht ohne die Förderung der fremdsprachlichen Fachsprachenkompetenz weniger erfolgreich bleibt, als der muttersprachige Unterricht.[3] Ausserdem zeigt die Reflexion veröffentlichter Unterrichtsanalysen, dass besonders im Bereich der Naturwissenschaften von groβer Bedeutung ist, die Muttersprache an bestimmten Stellen des Lern- und Lehrvorgangs absichtlich in den Unterricht miteinzubeziehen.[4] Anhand dieser Ergebnisse lässt sich folgende Hypothese formulieren: Studenten in der fremdsprachigen Ausbildung werden ihre Fachkenntnisse in geringerem Maβe erweitern können, als Studenten in der muttersprachigen Ausbildung.

b.) Praktisches Modell

Die Aufgaben der Untersuchung sind von den Lesekompetenztests der PISA-Studien motiviert worden, wo Lesen als diejenige Fähigkeit angesehen wird, die einem dazu verhilft, anhand geschriebener Texte die eigenen Kenntnisse zu erweitern. Diese Erweiterung der Kenntnisse, die Erweiterung der mathematischen Kenntnisse steht im Mittelpunkt der Fallstudie. Bei der Themenwahl wurden die Thematik des Semesters und die Vorkenntnisse der Studenten berücksichtigt, wobei groβer Wert darauf gelegt wurde, dass der Lesetext etwas Neues, Unbekanntes für die Studenten bedeuten soll, damit in der Untersuchung tatsächlich der situative Wissenserwerb überprüft wird. Anhand dieser Vorüberlegungen wurden zwei Sätze ausgewählt und in folgender Form erfragt: Die Studenten lesen zwei kurze Texte über die Aussagen des Satzes von Rolle und des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, jener wird mit Abbildung und mit einem weiteren konkreten Beispiel untermauert, anschlieβend lösen sie drei Aufgaben auf drei Abstraktionsebenen.[5]

---

[3] Szűcs, Kinga: 2005

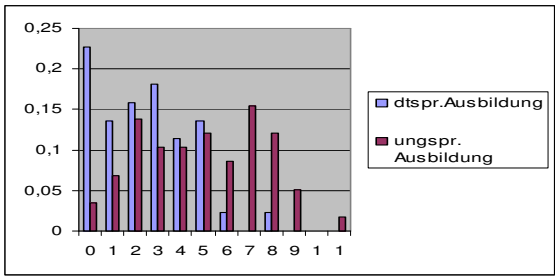
[4] Butzkamm, Wolfgang: 2002

[5] **Einfache Anwendung:** z.B:
Zeigen Sie, was der Satz von Rolle für die Funktion im Intervall [0;2] bedeutet! Fertigen Sie ein Schaubild an!
Übertragung:
Welche Endpunkte wären noch fürs Intervall möglich? Geben Sie noch mindestens ein weiteres Beispiel an, wo der Satz von Rolle anwendbar ist!

Die Gruppe der Versuchspersonen haben 44 ungarische Studenten der deutschsprachiger Ausbildung der Budapester Wirtschaftshochschule gebildet, die Mathematik bis zum Abitur in ihrer Muttersprache gelernt haben, und zur Zulassung zum deutschsprachigen Studium ihre Deutschkenntnisse nachgewiesen haben. Die Kontrollgruppe bestand aus 58 ungarischen Studenten der gleichen Hochschule (gleicher Jahrgang, gleiche Fakultät und Studienfächer), die das Studium in ihrer Muttersprache führen.

3. Ergebnisse

Aus Platzmangel werden Details hinsichtlich der Kodierung, und Auswertung der Ergebnisse nicht ausführlich behandelt, es wird aber beabsichtigt, diese in einem weiteren Artikel in der Zukunft zu veröffentlichen. Bei den Aufgaben sind insgesamt 12 Items bewertet worden, das Vorhandensein (evt. fehlerhaftes Vorhandensein)dieser Items einzeln überprüft und in Tabellen zusammengefasst, anhand dieser sind Diagramme zusammengestellt worden, die den Unterschied der Erfolgreichkeit der beiden Gruppen eindeutig veranschaulichen.



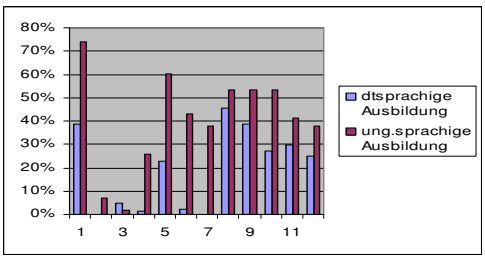
Anzahl der richtigen Antworten

Studenten der deutschsprachigen Ausbildung gaben weniger richtige Antworten an — bei ihnen liegt die Anzahl der richtigen Antworten überwiegend zwischen 0 und 5 (Mittelwert: 2,45) —, als die der muttersprachigen Ausbildung, wo diese Anzahl größtenteils zwischen 2 und 8 liegt (Mittelwert: 4,9). Die unteren Diagramme zeigen, dass sich die Kontrollgruppe in jeder Aufgabe deutlich besser abgeschnitten hat. Weniger deutlich, aber doch erkennbar ist der Unterschied in der richtig /falsch Aufgabe, es wird angenommen, dass dieser Erfolg der geschärften fremdsprachlichen Lesekompetenz zugeschrieben werden kann. Bei den ersten beiden Aufgaben können jedoch die Studenten der deutschsprachigen Ausbildung kaum Erfolg erreichen, anhand einer ausführlichen Fehleranalyse konnte bei 56-75% dieser Studenten angenommen werden, die Aussagen nicht verstanden zu haben, wohingegen dieser Anteil in der muttersprachlichen Ausbildung

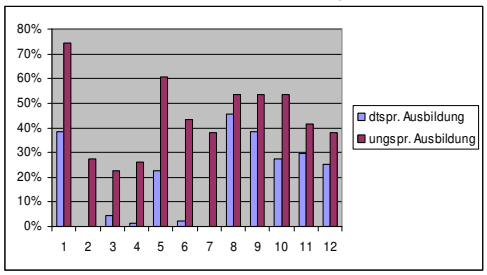
---

Sprachliche Ebene: Sind die folgenden Behauptungen richtig oder falsch? z.B.
Nach dem Satz von Rolle gibt es im Intervall [a;b] genau eine Stelle, wo die Steigung der Tangente gleich 0 ist.

bei etwa 15-27% liegt. Unsere Hypothese wurde nicht wiederlegt.



Erfolg der einzelnen Aufgabenteile



Erfolg der einzelnen Aufgabenteile (mit Berücksichtigung der schriftlichen Ergebnisse der ersten Aufgabe)

4. Schlußfolgerungen

Der irreführende Erfolg der Studenten der deutschtsprachigen Ausbildung in der dritten Aufgabe liefert einen weiteren Beweis dafür, dass „klassische" Testaufgaben keine zuverlässige Auskunft über die erworbenen Kenntnisse geben können. Der Miβerfolg dieser Studenten in den weiteren beiden Aufgaben gibt aber Bedenken, ob fremdsprachige Mathematikunterricht ohne fachsprachliche Vorbereitung veranstaltet werden kann. Kurz zusammengefasst: **Fachkompetenz+Fremdsprachenkompetenz≠ fremdsprachige Fachkompetenz**

Literatur:

Bach, Gerhard/Niemeyer, Susanne(Hrsg.)(2002): Bilingualer Unterricht. Grundlagen, Methoden, Praxis, Perspektiven. Peter Lang Europäischer Verlag der Wissenschaften.

Butzkamm, Wolfgang: Über die planvolle Mitbenutzung der Muttersprache im bilingualen Sachfachunterricht. 2. Problematik des Nichtverstehens: Beispiel Naturwissenschaften. In: Bach, Gerhard/Niemeyer, Susanne Hrsg.)(2002): Bilingualer Unterricht. Grundlagen, Methoden, Praxis, Perspektiven. Peter Lang Europäischer Verlag der Wissenschaften.

Hahn, Otto/Dzewas, Jürgen(Hrsg.): Leistungskurs Analysis I. Westermann.

Herber, Hans Jörg/Vásárhelyi, Éva(2005): Empirikus kutatás a társadalomtudományokban és annak „hiteles" dokumentációja. Példa: a pozitív és negatív érzelmek hatása. In: Sammelband der III. hochländischen mathematikdidaktischen PhD-Konferenz. Révkomárom.

Szűcs, Kinga (2005): A nyelv szerepe az idegen nyelvű matematikaoktatásban. Védőbeszéd az idegen nyelvű szaknyelvi kompetencia fejlesztése mellett. In: BGF Tudományos Évkönyv 2005. Budapest.

Wolff, Dieter: Zur Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern für mehrsprachige Bildungsgänge. In: Breidbach, Stephan/ Bach, Gerhard/Wolff, Dieter (Hrsg.)(2002): Bilingualer Sachfachunterricht: Didaktik, Lehrer-, Lernerforschung und Bildungspolitik zwischen Theorie und Empirie. Frankfurt am Main; Berlin; Bern; Bruxelles; New York; Oxford; Wien, Lang Verlag.

Allan TARP, MATHeCADEMY.net

Mathematismus und kognitive Bomben

Viele Lehr-Lern-Probleme im Mathematikunterricht kommen daher, dass in der Schule statt Mathematik ‚Mathematismus' vermittelt wird. Das ist eine Art Mathematik, die nur im Rahmen von Schule wahr ist, z.B. 2+3=5. Außerhalb der Schule gilt 2m+3cm = 203cm, 2 Wochen+3 Tage = 17 Tage. 2*3=6 dagegen ist Mathematik, die auch außerhalb der Schule wahr ist.

Es ist problematisch, wenn zehn als eine kognitive Bombe direkt - ohne Tassenschreibweise - eingeführt wird. Zehn ist die einzige Zahl, die einen Namen, aber kein Ikon hat, und dann durch zirkulare Selbst-Referenz definiert wird: 23 = 2*10 + 3*1, aber 10 = 1*10 + 0*1. Auf diese Weise wird zehn gegen das Piaget-Prinzip ‚erst greifen - dann begreifen' gelernt. Tatsächlich kann man Mathematik allein mit einstelligen Zahlen einführen.

Mathematismus und die kognitive Bombe führen zu Leistungsabfall. In Dänemark kämen z.B. nur 50% durch nach klasse 9. Das Ministerium aber verrückt die Zeugnisse so, dass 95% durchkommen. Sozial Schwache soll man nicht verstecken, sondern studieren und verändern. Um verborgene ‚Aschenputtel-Differenzen' zu sehen, braucht es eine postmoderne Gegen-Forschung unter der Sophisten-Frage ‚Mathematik - Natur oder Wahl?'.

Um natürliche Mathematik von Vielheit zu abstrahieren, sind genau 2x2 Kompetenzen nötig - Zählen und Rechnen in Raum und Zeit. Indem man bündelt und stapelt, gelangt man zählend zu einem Totalwert T. Und dieser lässt sich voraussagen, indem man T = (T/b)*b ausrechnet. Auf solche Weise kommen Division und Multiplikation vor Addition und Subtraktion.

Von Repetition zu Vielheit und Ikonen

Zeitliche Repetition wird als Vielheit im Raum repräsentiert, indem man einen Finger an den Hals legt und für jeden Herzschlag einen Strich macht:

. . . . . -> I I I I I I I I

Vielheit kann man in Bündel organisieren:

I I I I I I I I I -> II II II II I oder I I I I I I I I I -> III III III oder …

Mit Ikonen kann man verschiedene Formen von Vielheit repräsentieren. Wir sehen hier beispielsweise, dass es im Vierer-Ikon 4 Striche gibt usw.

I	II	III	IIII	IIIII	IIIIII	IIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Vielheit wie Stapel zählen

In Vierern zählen: 4 wegnehmen. Diesen Vorgang ‚Von T 4 wegnehmen' kann man in der Form ‚T-4' aufschreiben und mit der Kurzformel ‚T davon 4' bezeichnen. Die weggenommenen 4 verschwinden nicht, sie sind nur zur Seite gelegt. Auf diese Weise ist die Totalität T in zwei Teile geteilt, deren einer Teil T-4 enthält, während der andere Teil gerade 4 enthält, so wie es durch die ‚Umstapel-Gleichung' T = (T-b)+b vorausgesagt wird:

IIIIIIII -> IIIII IIII -> IIIII IIII
9 = (9-4) + 4 = 5 + 4

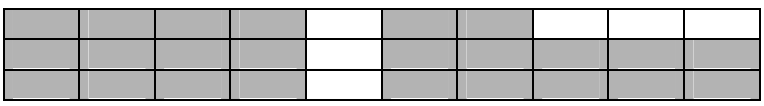
Der wiederholte Vorgang 'Von T 4r wegnehmen' kann in der Form 'T/4' aufgeschrieben und mit der Kurzformel 'T als 4r' bezeichnet werden. Hier wird durch die ‚Umzählungs-Gleichung' T = (T/b)*b das Resultat des Zählens von T in 4-Bündel vorausgesagt: T =(T/4)*4 =3*4+3*1 =3 ¾*4. T wird eine Stapel-Zahl genannt, und 4 ist ein Bündel-Zahl oder eine Einheit.

IIIIIIIIIIII	Total T	T
IIII IIIIIIII	T– 4 : Von T 4 wegnehmen	T = (T-4)+4
IIII IIII IIIII		
IIII IIII IIII II	T/4 : Von T 4r wegnehmen	T = (T/4)*4

Die nicht bündelten 2 kann man als 4r oder als 1r zählen. Zählt man sie als 1r, werden sie ein eigener Stapel, und man hat dann einen Multistapel oder ein Lager, welches als Dezimalzahl oder auch in ‚Tassenschreibweise' festgehalten werden kann. Zählt man die 2 dagegen als 4r, so werden sie am 4-Stapel als ein Bruch 2/4*4 angebracht.

Multi-Stapel, Lager (Dezimal)	Stapel (Bruch)
 IIII IIII I IIII I	II IIII IIII IIII
3*4 + 2*1 = 3.2 *4 = 3)2)	3 2/4 *4

Umzählen



T = 3 4r = ? 5r

Will man 3 4r in 5r umzählen, so wird das Ergebnis durch die folgende Umzählungsgleichung vorausgesagt: T = (3*4/5)*5 = 2 2/5 * 5. Wenn beispielsweise im Sinne eines Äquivalents 4m = 5$, so kann man 7m in $ umrechnen, indem man umzählt:

T = 7m = (7/4) * 4m = (7/4) * 5$ = 8 ¾ $

Außen- und Binnenhandel

Im Lager T = 3 5r & 2 1r wird der Export von 3 1r möglich, wenn vorher ein Binnenhandel zwischen den 5-Stapeln und den 1-Stapeln stattfindet.

IIIII IIIII I IIIII I	 IIIII IIIII II IIIII	 IIIII IIIII IIII III
3*5 + 2*1	2*5 + 7	2*5 + (7-3) + 3

In Tassenschreibweise: T = 3)2) = 3-1)2+5) = 2)7) und 2)7) - 3) = 2)4)

Als Dezimalzahl geschrieben: T = 3.2*5 = 2.7*5 und 2.7*5 - 0.3*5 = 2.4*5

Außen- und Binnenhandel: Verkürzung

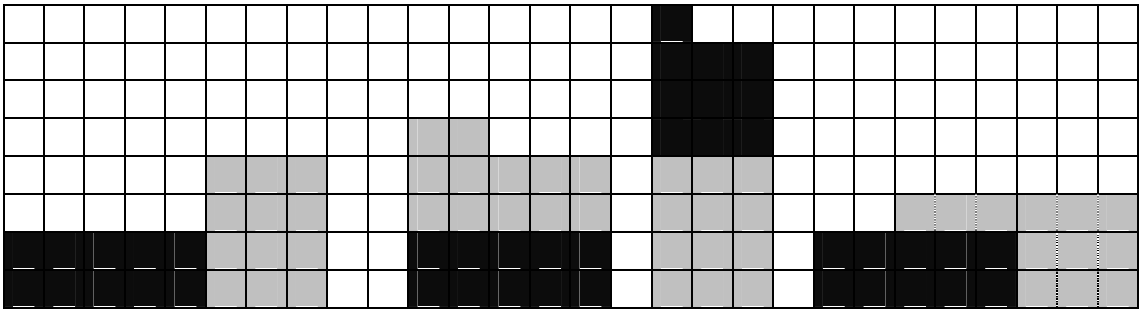
Im Lager T = 1 5r & 4 1r wird der Import von 1 5r + 3 1r zu einem Binnenhandel führen:

In Tassenschreibweise: T = 1)4) + 1)3) = 2)7) = 2+1)7-5) = 3)2)

Als Dezimalzahl geschrieben: T = 1.4*5 + 1.3*5 = 2.7*5 = 3.2*5

Stapel sammeln

Die Stapel 2*5 + 4*3 sammelt man als 5r oder 3r, oder als 8r (Integration).



T = 2 * 5 + 4 * 3 -> 4 2/5 * 5 = 7 1/3 * 3 = 2 6/8 * 8

Umgekehrt wird Integration zu Differentiation:

T1 + ?*3 = T2, ? = (T2-T1)/3 (der Differentialquotient)

Einstellige Gleichungen

2*x+1 = 9 = *(9-1) +1* Umstapeln: 9 = (9-1) +1

2*x = 9-1 = 8 = *(8/2)*2* Umzählen: 8 = (8/2)*2

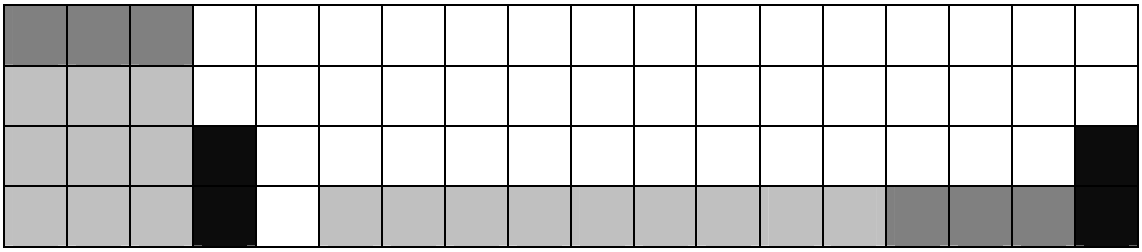
x = 8/2 = 4

So wird eine Gleichung durch Umstapeln und Umzählen gelöst.

Solcherart Verrücken & Darstellungswechsel löst eine Gleichung auf authentische Weise, nicht jedoch die übliche Neutralisierung.

Überladung: verallgemeinertes Positionssystem

Ist ein Stapel höher als sein Bündel, so führt diese Überladung auf dem Wege des Umstapelns zu einer dreistelligen Zahl: Ein Bündel von Bündeln wird 1 Bündel-Bündel.



T= 4*3 + 2*1 = 1*(3*3) + 1*3 + 2*1

T= 4)2)= 1)1)2), T= 4.2*3 = 11.2*3 = 1.12*(3*3)= 0.112*(3*3*3) = 112*1

Differenzen zwischen BIB-Mathematik und LAB-Mathematik

• Bibliothekmathematik sieht Zahlsymbole als kulturelle Artefakte, die man auswendig lernen muss. Laboratoriumsmathematik sieht Zahlsymbole als natürliche Ikonen, die sich als Anzahl von Strichen selbst repräsentieren.

• BIB-Mathematik hat Addition als ihre primäre Operation, dann folgen Subtraktion und Multiplikation; zuletzt kommt die schwierige Division. LAB-Mathematik hat Division als ihre primäre Operation, dann kommen Multiplikation und Subtraktion, und zuletzt die schwierige Addition.

• BIB-Mathematik führt mehrstellige Zahlen früher ein als Mathematik. LAB-Mathematik führt Mathematik früher ein als mehrstellige Zahlen.

• BIB-Mathematik führt Bruchzahlen früher ein als Dezimalzahlen. LAB-Mathematik führt Dezimalzahlen früher ein als Bruchzahlen.

• BIB-Mathematik führt die mehrstellige Zahl als abstrakte Idee eines Positionssystems ein. LAB-Mathematik führt die mehrstellige Zahl als physisches Faktum ein, als ein Lager, einen Multi-Stapel.

• BIB-Mathematik führt die Addition von mehrstelligen Zahlen als eine abstrakte Idee von Übertrag ein. LAB-Mathematik führt die Addition von mehrstelligen Zahlen als Binnenhandel zwischen Stapeln ein.

• BIB-Mathematik macht aus Algebra und Gleichungen sekundäre Bildung. LAB-Mathematik inkludiert Algebra und Gleichungen in primäre Bildung.

• BIB-Mathematik macht Differential- und Integralrechnung zu tertiärer Bildung. LAB-Mathematik inkludiert Differential- und Integralrechnung sowohl in primäre als auch in sekundäre Bildung.

• BIB-Mathematik wird von oben als Beispiel für Abstraktionen definiert, LAB-Mathematik dagegen von unten als Abstraktion aus Beispielen.

Marie TICHÁ, Praha

Sind die Reflexionen des Unterrichts zuträglich?

Vorbemerkung

Dieser Artikel knüpft an den bei der 39. Tagung vorgetragenen Beitrag (Tichá-Hošpesová, 2005) an. Er möchte andeuten, wie wir bemüht sind, weitere Wege zur Verbesserung der Kompetenz der Primarschullehrer zu finden.

Unter dem Begriff *Kompetenz des Lehrers* verstehen wir die Gesamtheit der Fähigkeiten, die der Lehrer zu Ausübung seiner Arbeit braucht. Zu den grundlegenden Fähigkeiten zählen wir die *fachdidaktische Kompetenz* (bezieht sich auf das Fachwissen und seine didaktische Umsetzung) und die *Kompetenz einer qualifizierten pädagogischen Reflexion.*

Individuelle und gemeinsame Reflexionen

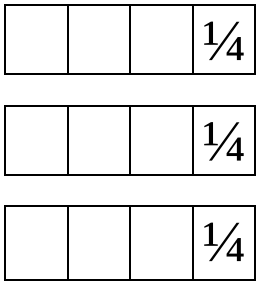
Die Reflexion spielt eine Doppelrolle. Zum einen ist sie eine der Kompetenzen, zum anderen ist sie einer der Wege, wie man Kompetenzen kultiviert. Mit dem Attribut „qualifizierte“ bezeichnen wir eine solche pädagogische Reflexion, die Überlegungen über das Ziel und den Inhalt des Unterrichts und über die Arbeitsmethoden und ihre Umsetzung beinhaltet. Sie umfasst die Analyse der Schlüsselelemente und Erfahrungen, ihre Auswertung, das Suchen nach Ursachen einer konkreten Handlung sowie Möglichkeiten einer anderen Handlung.

Es reicht nicht, bei einer Selbstreflexion zu bleiben. Wir haben neben der individuellen auch mit der gemeinsamen kooperativen Reflexion (joint reflection) angefangen, um den Lehrern einen tieferen Einblick in ihre eigene Tätigkeit zu vermitteln.

Die Unterschiede der individuellen Reflexionen sind „...durch unterschiedliche Erkenntnisse, Erfahrungen und Dispositionen, durch ungleiche Qualität der Interpretation, durch Besonderheiten kausaler Attribute verursacht … das alles hat Einfluss auf die intuitive Auswahl und Anwendung der Bewertungskriterien ...“ (Slavík-Siňor, 1993). So war es auch in dem Falle der Reflexion des Unterrichtsexperiments, das wir in dem bereits erwähnten Beitrag beschrieben haben (Tichá-Hošpesová, 2005). Die Anregung für dieses Unterrichtsexperiment war der Beitrag von R. Steinberg auf der Konferenz SEMT´03.

Im ersten Teil des Unterrichts haben die Schüler die Aufgabe *Teile gerecht drei Pizzas unter vier Kindern auf* gelöst. Dann eröffnete die Lehrerin den zweiten/zentralen Teil des Experiments mit der Einführung in die Situation:

„Eine Lehrerin an einer Schule hat den Kindern diese Aufgabe aufgegeben, und die Kinder haben an der Lösung gearbeitet. Und ihr solltet entscheiden, welche von den folgenden Lösungen richtig ist:



(a) Wir teilen jede Pizza in 4 gleiche Teile auf. Jedes Kind bekommt ein Viertel von jeder Pizza. Es bekommt drei Viertelstücke, das sind ***drei Viertel****.*

(b) Wir teilen jede Pizza in 4 gleiche Teile auf, zusammen gibt es 12 Stücke. Jedes Kind bekommt drei Stücke, das sind drei von zwölf. Die Antwort ist ***drei Zwölftel****.*

Ist es möglich, dass ***die*** *drei Viertel* ***den*** *drei Zwölfteln gleich sind?“*

Im ersten Teil sollten die Schüler in das Problem eingeführt werden, sich mit dem Kontext bekannt machen. Das Ziel des zweiten Teils des Unterrichtsexperiments war (a) das Verstehen der zentralen Rolle des Ganzen zu vertiefen und (b) die Fähigkeiten des Argumentierens zu entwickeln.

Unmittelbare individuelle Reflexion

Nach der Realisierung des Unterrichtsexperiments, der Bearbeitung der Videoaufnahme und der Transkription des Stundenverlaufs haben eine Grundschullehrerin und zwei Hochschullehrerinnen (H1, H2), individuelle Reflexionen des Experiments schriftlich ausgearbeitet.

Die Lehrerin konzentrierte sich auf allgemeine Fragen, besonders auf die Bedeutung der Kollektivreflexion für die Lehrer als einer Tätigkeit, die ermöglicht, (a) sich bedeutender Erscheinungen bewusst zu werden, die sie selbst nicht bemerkt hätten, (b) die Überlegungen der Schüler tiefer zu begreifen, (c) Erfassung und Erklärung der Unklarheiten.

In der Arbeit der Lehrerin verfolgte die H1 was die Lehrerin machte und warum, und erwog eventuelle Alternativen. Sie bemühte sich, etwaige Notwendigkeiten und die Möglichkeit der Aufbesserung des Wissens der Lehrerin über das Fach an sich und über fachdidaktische Fragen zu bewerten. Bei den Schülern konzentrierte sie sich auf die Feststellung, wo und warum bei den Schülern Probleme mit dem Verstehen entstehen, wie die Ursachen der Probleme zu beseitigen und die Mängel zu reeduzieren.

Die H2 charakterisierte ihr Herantreten als Beobachtung dessen, *„wie der Schüler im sozialen Kontext der Klasse erkennt“*. Sie versuchte zu begreifen: welche Überlegung wohl der konkreten Aussage des Schülers vorausging; wie sich die Schüler gegenseitig beeinflusst haben; wie die Lehrerin erreichte, dass der große Teil der Schüler aktiv war.“

Nachfolgende Reflexionen weiteren Lehrer

Wollen wir die Lehrer dazu bringen, dass sie „reflective practitioners“ werden (Schőn, 1983), müssen wir tiefer in die Entwicklung des Prozesses der Reflexion des Unterrichts eindringen. Wir baten also weitere Lehrer von verschiedenen Schulstufen, um individuelle Reflexion der angeführten Unterrichtsepisode.

Es kam die Unerfahrenheit der Lehrer mit der Reflexion einer Videoaufnahme und einer Transkription des Stundenablaufs zum Ausdruck. Sie waren ratlos, wie eine pädagogische Erfahrung aus der realen Schulpraxis zu beschreiben, zu analysieren und einzuordnen ist. Die Lehrer sagen, dass sie gewisse Anleitungen und Schlüsselpunkte zu der Vorgehensweise des Reflektierens haben möchten, jedoch nur bis zu einem gewissen Verbindlichkeitsgrad. Sie sind sich nicht sicher, ob sie solche Anleitungen nutzen, nach ihnen handeln und sie umsetzen würden. Die schriftlichen Aussagen dieser Lehrergruppe kann man als eine Sammlung von Bemerkungen aus dem Unterricht charakterisieren. Es handelt sich sogar oft um ein bloßes „Kritisieren“.

Die Lehrer verfolgen: (i) die Einhaltung der traditionellen Sitten „wie die Unterrichtsstunde aufzubauen ist“, (ii) allgemeine methodische Fragen, (iii) expressive, unter dem Blickwinkel der Absicht der Lehrerin aber nebensächliche Momente, (iv) was man als „Fehler des Lehrers“ bezeichnen kann, (v) ob der Lehrer all das gemacht hat, was sie für notwendig halten. Die Lehrer bemerken nicht: (i) die Absicht des Lehrers und deren Realisierung, mögliche Alternativen des Unterrichts, (ii) fachdidaktische Fragen, (iii) einen tieferen Blick auf weniger deutliche, aber für die Entwicklung des Unterrichts wichtige Momente, (iv) warum der Lehrer den Schritt getan hat, den sie für fehlerhaft halten, (v) ob die Schritte, die sie für notwendig halten, im Einklang mit der Absicht des Lehrers sind.

Wir konstatierten, dass sich die Lehrer nicht bemühen, die Gesamtheit der sich gegenseitig beeinflussenden Erscheinungen zu sehen. Und die Sensibilität für didaktisch interessante Momente ist nicht entwickelt.

Überraschend war es, dass sie weder die Aufbaustruktur der Unterrichtsstunde noch den Sinn von einigen Teilen begriffen haben. Diese Punkte hat keiner der reflektierenden Lehrer betont und wahrscheinlich auch nicht verfolgt.

In den individuellen Reflexionen vermissten wir die Erfassung von wichtigen interessanten Erscheinungen, wie zum Beispiel: einige Schüler sind von einer diskreten zur kontinuierlichen Umgebung übergegangen; das

Vorwissen der Begriffe „Abbildung“; die Idee der vielfachen Repräsentanz; der störende Einfluss der früher angeeigneten Erkenntnisse; die Gefahr der Annahme der Information, ohne sie zu verstehen.

Überraschend war, dass die reflektierenden Lehrer nicht positiv bewertet haben, dass die Schüler das echte Verständnis und die Erklärung der Situation anstrebten. Im Gegenteil, die Lehrer haben gefordert, dass die Lehrerin die Schüler gleich zur richtigen Lösung führt. Die Lehrer haben nicht begriffen, dass die Lehrerin den Schülern Raum zum Entdecken freilassen wollte. Deshalb hat sie ungenaue Antworten nicht sofort präzisiert, im Gegenteil, sie hat sie angezweifelt, um die Schüler zum klaren Ausdrücken ihres Gedankens anzuregen.

Nach der Bekanntmachung mit den individuellen Reflexionen haben wir ihre Autoren getroffen. Wir haben versucht, solche Fragen zu formulieren, die ermöglichen (a) zu beschreiben, was die Lehrerin gemacht hat, wie die Schüler reagiert haben, usw., (b) die Situation und die Ursachen des Verhaltens zu analysieren, (c) andere Handlungen zu suchen. Wir legen den Lehrern die Rahmenfragen vor, und die Lehrer sind nicht mit entsprechenden Kenntnissen zu ihrer Beantwortung ausgestattet. Das zeigt die Notwendigkeit einer hochwertigen systematischen Bildung der Lehrer.

Schlussanmerkung

Wir wünschen uns, dass die Lehrer bemüht wären, Reflexionen als einen der Wege zur Wahrnehmung eigener Mängel und zu ihrer Beseitigung durchzuführen. Andererseits gibt es in unserem Schulwesen bestimmte Mythen (Kuřina, 2006). Bestimmt wäre es nicht sehr glücklich, wenn wir mit unserer Arbeit über die Rolle der Reflexion bei der Erhöhung der Lehrerkompetenzen die Sammlung der Mythen bereichern würden.

Literatur

KUŘINA, F. (2006). Didaktické polarity a učitel matematiky (Didaktische Polaritäten und der Mathematiklehrer, tschech.). Seminar *2 dny s didaktikou matematiky*. 2. und 3.2.2006, UK, PedF.

SCHŐN, D. A. (1983). *The reflective practitioner.* London: Teple Smith.

SLAVÍK, J. - SIŇOR, S. (1993). Kompetence učitele v reflektování výuky (The teacher’s competence in reflecting of teaching, in Czech). *Pedagogika,* 43, 2, 155-164.

TICHÁ, M. - HOŠPESOVÁ, A. (2005). Schüler entdecken – und was der Lehrer dazu? In: G. Graumann (Hsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005 (Bielefeld).* Hildesheim: Franzbecker, 577-580.

Anmerkung: Die Forschung wurde durch die Förderung GAČR 406/05/2444 und AdW ČR, Forschungsvorhaben AV0Z10190503 unterstützt.

Ingrida Veilande, Seefahrt Akademie Lettlands

Die Methode des Mittelwertes für die kombinatorisch - geometrische Aufgaben.

Einführung. Im Laufe von mehreren Jahren werden in Lettland die Traditionen der mathematischen außerschulischen Ausbildung gepflegt. Dank dem Enthusiasmus der Mathematiklehrer und der Wissentschaftler Lettlands ist aktive Teilname der Schüler sowohl an mathematischen Arbeitgemeinschaften, Fernschulen und Sommerkursen, als auch an verschiedenen Olympiaden für Mathematik zu verzeichen.

Damit die Schüler in den Olympiaden gute Erfolge erzielen könnten, haben sie viele nicht dem Standart entsprechende Aufgaben zu lösen. Dabei ist die Unterstützung und Hilfe eines erfahrenen Lehrers von größter Bedeutung. Die Lehrer müssen sich viel Mühe geben, um Lösungen der gewählten Aufgaben anschaulich darzustellen, sie müssen den Schülern neue Lösungsmethoden beibringen. Es ist wichtig fesselnde Beispiele zu wählen, zu denen ohne Zweifel kombinatorisch geometrische Aufgaben zählen.

Kombinatorisch - geometrische Aufgaben [KGA]. In den KGA werden die Systemeigenschaften der geometrischen Objekte untersucht. Es scheint zweckdienlich zu sein, solche Aufgaben vom Standpunkt der Art und Weise der in ihnen enthaltenen Objekte zu klassifizieren [1]. Zum Beispiel:

- ✓Aufgaben über die Punktesysteme der Ebene.
- ✓Aufgaben über die Systeme der Geraden, der Strecken und der Vektoren.
- ✓Aufgaben über den Zerlegung in die Teile einiger Figuren, Vereinigung oder Bedeckung mehrerer Figuren.
- ✓Aufgaben über das Färben.

Ungeachtet dessen, dass die Schüler solche Aufgaben als relativ einfache Aufgaben fassen, sollte man bei deren Lösung verschiedene Methoden anwenden und allgemeine geometrische Gesetzmäßigkeiten auf die Resultate der Kombinatorik, der Zahlen - oder der Graphentheorie zurückführen. Für den Beweise muß man sich auch in solchen allgemeinen Urteilsmethoden gut auskennen, wie z.B. in der mathematischen Induktion, in der Methode des Extremelements, in der Methode der Invarianten oder in der Methode des Mittelwertes. Die Aneignung der oben erwähnten Methoden würde den Schülern die Möglichkeit geben, die Aufgaben rationell zu lösen und ihr Wissensniveau zu fördern.

Die Methode des Mittelwertes [MWM]. Bei der Analyse der KGA fällt auf, dass es unter denen solche gibt, die man mittels der Methode des

Mittelwertes lösen kann [2]. Die letztere läßt sich ganz allgemein wie folgt formulieren:

Teilt man das gegebene Objekt in eine „kleinere" Zahl der Bestandteile ein, dann wird mindestens ein Teil „genügend" groß sein.

Einer der bekanntesten Spezialfälle der MWM ist das Dirichletprinzip **[**DP**].** Mithin lassen sich geometrische Verallgemeinerungen als Lehrsätze über den Deckung von Strecken oder Flächen formulieren. Wenn man beim Lösen einer Aufgabe irgendein Element mäßig abschätzen muß, so ergeben sich folgedessen qualitative Schlußfolgerungen, falls man die erwähnte Größe z.B. mit dem arithmetisches Mittel vergleicht. Die sogenannten Ramsayaufgaben (die Ergebnisse der Ramsaytheorie) bilden in den Olympiaden eine zahlenmäßig ziemlich große Aufgabenklasse.

Übungsbeispiele für die Lösungsverfahren der KGA. Betrachten wir einige Aufgaben und versuchen wir, deren Lösungsidee anschaulich darzustellen. Die gewählten Beispiele sind ihrem Wesen nach die Beweisaufgaben. Eines der Grundprinzipien bei deren Lösung ist der apagogische Beweis. Die Anwendung der MWM ist eines der wichtigsten Argumente, das Gegenteil zu erhalten.

In der Aufgabe über Punktesysteme werden die eventuellen Entfernungen zwischen den gegebenen Punkten analysiert; es wird eventuell größte oder kleinste Punktezahl festgestellt, die die Aufgabenbindungen erfüllt. Es wird ebenfalls die Anordnung der eventuellen Punkte untersucht. Gleichzeitig werden Versuche gemacht, auch andere Probleme zu lösen.

1. Aufgabe. [3] Die Länge der Seite eines Quadrats betrage 10 Einheiten; in dessen Innern seien 102 Punkte in allgemeiner Position gegeben. Man beweise, dass sich unter denen (102 Punkten) 3 Punkte finden lassen, mit deren Hilfe ein Dreieck konstruiert wird, dessen Fläche nicht größer als 1 ist.

Die Lösungsidee ist auf den arithmetischen Mittelwert zurückzuführen. Betrachten wir die konvexe Schale eines Punktesystems, die sich laut dem Gegebenen vollständig im Innern des Quadrats befindet; deshalb ist die Fläche dieses Polygons beachtlich kleiner als 100 Quadrateinheiten. Zerschneiden wir die konvexe Schale in solche Dreiecke, deren Scheitelpunkte die gegebene Punkte sind. Es läßt sich nachweisen, dass die kleinste Zahl der Dreiecke je nach der Anordnung des Punktesystems gleich 100 ist. Dann läßt sich mittels des arithmetischen Mittelwerts mindestens 1 Dreieck finden, dessen Fläche kleiner als 1 ist.

Man kann bedeutend mehr Resultate der Zahlentheorie anwenden, wenn man die definierten Punktesysteme im orthogonalen Gitter betrachtet. Fügt man in solch ein Gitter orthogonales Koordinatensystem ein, dann

sind die Punkte der Koordinaten ganze Zahlen. Eine der einfachsten Anwendungsmöglichkeiten des Dirichletprinzips in den KG Aufgaben ist die Abschätzung der geraden und ungeraden Eigenschaften der Zahlen. Die Aufgaben dieser Art sind für die Schüler der unteren Klassen besonders geeignet, wenn man sie mit den Grundlagen der Zahlentheorie vertraut macht.

2. Aufgabe. Im kubischen Gitter werden 9 Punkte gewählt. Man beweise, dass mindestens eine der Strecken, die diese Punkte miteinander verbindet, durch einen Punkt des Gitters geht.

Beweisidee. Hier hat jeder Punkt 3 Koordinaten. Die eventuelle Zahl der Kombinationen, die in den Paritäten der Zahlenkoordinaten möglich ist, ist 8. Laut DP decken sich die Koordinaten von mindestens zwei Zahlen nach der Parität, deshalb sind die Mittelpunktkoordinaten dieser Strecke ganze Zahlen.

Aufgaben über die Systeme der Geraden und Strecken. In solchen Aufgaben wird die mögliche Zahl der Schnittpunkte, die minimale oder maximale Zahl der Teile der Ebenen oder Figuren abgeschätzt, die sich beim Überschneiden von Geraden oder Strecken konstruieren lassen. Eines der characteristischen Verfahren bei der Lösung von solchen Aufgaben ist die Projizierung der Strecken - oder Figurenmengen auf eine oder mehrere Geraden; dies macht möglich, die Projektionen mittels des Lehrsatzes über Streckenkongruenz abzuschätzen und Schlußfolgerungen über die Anordnung der Strecken und Figuren zu ziehen.

3. Aufgabe. Im Kreis mit dem Halbmesser n sind die Strecken untergebracht, deren Länge 1 ist und deren Anzahl $4n$ beträgt. Man beweise, dass eine parallele oder senkrechte Gerade in Bezug auf die gegebene Gerade so gezogen werden kann, dass die letztere mindestens zwei der gegebenen Strecken schneidet.

Lösungsidee. Hier werden die Projektionen aller Strecken auf zwei gegenseitig senkrechte Geraden betrachtet. Auf einer dieser Strecken wird laut dem Prinzip des Mittelwertes die Summe der Projektionen aller Strecken nicht kleiner sein als auf der anderen. Abhängig von den Eigenschaften dieser Projektionen wird diese Summe größer als $2n$ sein können. Anderseits ist die gemeinsame Strecke der Projektionen nicht die Länge $2n$ des Durchmessers, daher decken sich laut dem DP über die Streckenkongruenz mindestens zwei Strecken lassen sich von einer Geraden schneiden.

In die Aufgaben über die Anordnung und Überdeckung von Figuren werden die Fragen über die Eigenschaften einer ganz bestimmten Art der Figurenanordnung untersucht.

4. Aufgabe. Im Quadrat mit der Fläche S sind 1975 Figuren untergebracht, deren Flächensumme größer als $1974S$ ist. Man beweise, dass diese Figuren einen gemeinsamen Punkt haben.

Die Lösung stützt sich auf das Komplementverfahren der Figurenfläche. Betrachten wir jede Figur und deren Komplement bis zur totalen Größe des gegebenen Quadrats. Wenn man die Flächen aller Figuren mit allen Figurenergänzungen addiert, erhält man als Betrag $1975S$. Anderseits kann man die Summe aller Komplementen extra abschätzen infolgedessen zum Schluß kommen, dass deren Gesamtfläche kleiner als die gegebene Fläche S ist. Das bedeutet, dass es mindestens einen Punkt gibt, der zu keiner Figurenergänzung gehört. Deshalb gehört so ein Punkt gleichzeitig allen Figuren an.

Die Färbungs Aufgaben sind KGA über die Färbung von Punkten, Strecken, Figuren oder deren Teilen, über die Färbung der Oberfläche von Polyedern.

5. Aufgabe. [4] Auf der Geraden sind n Punkte A_1 , A_2 , A_3 , ... A_n gegeben, wobei $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$ ist, die mit zwei verschiedenen Farben gefärbt sind. Man finde die kleinste natürliche Zahl n ($n>2$), im Fall, dass bei der Färbung von allen Punkte in zwei Farben sich 3 solche Punkte A_i , A_j , A_{2j-i} ($1 \le i < 2j - i \le n$) festlegen lassen, die gleich gefärbt sind.

Auslegung. Betrachten wir die Indizes der 3 gegebenen Punkte und bemerken wir, dass sie die arithmetische Reihe bilden. Diese Aufgabe ist einer der einfachsten Fälle des van der Wardensatzes (ein Spezialfall des MWM), in dem die sogenannte van der Wardenzahl $W(3, 2)=9$ betrachtet wird.

Anmerkung. Die KG Aufgaben sind zu einem festen Bestandteil in verschiedenen Mathematikwettbewerben geworden; deshalb ist es so wichtig, sie im außerschulischen Unterricht zu lösen. Solche Aufgaben sind für die Schüler verschiedenen Alters geeignet: die Schüler der unteren Klassen können mit den gegebenen Größen experimentieren und klassifizieren. Die Schüler der oberen Klassen Könnten sich verschiedene Lösungsverfahren aneignen.

Literatur.

1. A.Andzans, L.Ramana, G.Shulce. Uzdevumu krajums kombinatoriskaja geometrija. 1998. http://www.liis.lv
2. A.Andzans, L.Ramana, J.Chakste, T.Larfelds, M.Seile. Videjas vertibas metode. 2000. http://www.liis.lv
3. A.Andzans, M.Seile, Z.Zvirbule. Profesora ciparina kluba uzdevumi un atrisinajumi. Zvaigzne ABC, 2000.
4. Bulgarian National Mathematical Olympiad, 1998. http://www.math.bas.bg/bcmi/

Markus VOGEL, Ludwigsburg

Funktionale Abhängigkeiten in Daten erkunden - ein Beitrag der Mathematik zum naturwissenschaftlichen Arbeiten

Betrachtet man reale Daten als kontextualisierte Zahlen eines Phänomens, besteht ein wesentlicher Teil des Datenverstehens darin, eine den Daten zugrunde liegende Struktur (Trend) aufzudecken und in einem mathematischen Modell zu beschreiben. Dies ist ein wesentlicher Teil naturwissenschaftlichen Arbeitens: Daten systematischer Beobachtungen begründen ein Modell, dessen Parameter sich durch die Rückbindung an das Ausgangsphänomen erklären und spezifizieren lassen. Funktionen sind leistungsfähige Modellierungswerkzeuge der Mathematik, um Abhängigkeiten zwischen Variablen zu beschreiben. Die auftretenden Differenzen zwischen Funktionsmodell und Daten (Residuen) geben Aufschluss über die Modellgüte. Mit multimedialer Unterstützung werden gehaltvolle Zugangswege zur Datenmodellierung eröffnet. Dabei können sich naturwissenschaftliches Verstehen und funktionales Denken wechselseitig bereichern.

Curriculare Verankerung

Ein zentrales Merkmal der baden-württembergischen Bildungsplanreform von 1994 gegenüber den vorangegangenen Lehrplänen war das Merkmal des fächerverbindenden Unterrichts. Durch die Integration von Themen mit besonderer gesellschaftlicher und erzieherischer Relevanz sollten ganzheitliche Denk- und Sichtweisen geschult werden, welche die Schülerinnen und Schüler zur aktiven und reflektierten Teilhabe am sozialen gesellschaftlichen Geschehen befähigen sollten. Die nachfolgende Bildungsplanreform 2004 entwickelte den Ansatz der Fächerverbindung konsequent weiter bis hin zur Institutionalisierung von Fächerverbünden. Die Bildungsstandards des Fächerverbunds *Naturwissenschaftliches Arbeiten (NWA)* formulieren u. a. Kompetenzen, wie z. B. „Daten erheben durch Messen, Beobachten, Beschreiben, Vergleichen […] auswerten unter Verwendung von […] Diagrammen, Tabellen, Gleichungen, Graphiken, Funktionen, […] Begriffe oder Modelle bilden und Zusammenhänge formulieren“ (MKJS 2004, S. 97) können. Synoptisch betrachtet lassen sich solche Kompetenzen schlüssig mit den Leitideen des Faches Mathematik *Messen*, *Funktionaler Zusammenhang*, *Daten und Zufall* sowie *Modellieren* (s. MKJS 2004, S. 65f) in Beziehung setzen.

Modellieren naturwissenschaftlicher Phänomene

In der curricularen Schnittmenge lässt sich eine naturwissenschaftliche „Beziehungshaltigkeit“ (Freudenthal 1973, S. 75ff) des Faches Mathematik nachzeichnen, welche sich sowohl im Konzept der *Mathematical Literacy*

wieder findet, als auch in den Grundzügen einer mathematischen Allgemeinbildung nach Winter (1995, S. 38). Die naturwissenschaftliche Methodik ist eng verwoben mit dem Grundgedanken des mathematischen Modellierens (PISA-Konsortium Deutschland, 2004, S. 47ff). Naturwissenschaftliche Beobachtungen lassen sich über die experimentelle Erfassung in Daten einer systematischen Betrachtung zuführen. Betrachtet man naturwissenschaftliche Daten als kontextualisierte Zahlen eines Phänomens der natürlichen oder technischen Umwelt, besteht ein wesentlicher Teil des Modellierens darin, eine den Daten zugrunde liegende Struktur (Trend) aufzudecken und in einem mathematischen Modell zu beschreiben. Funktionen sind leistungsfähige Modellierungswerkzeuge der Mathematik, um Abhängigkeiten zwischen Variablen zu beschreiben. In den Naturwissenschaften finden häufig parametrische Funktionsstandardmodelle Verwendung. Im Kontext interpretiert erhalten die Funktionsparameter eine eigene Bedeutung, die zur Klärung des Ausgangsphänomens einerseits und zur Beurteilung der Mathematisierung andererseits beitragen kann.

Betrachtet man Daten in der Verschränkung einer deterministischen und einer stochastischen Komponente (Engel 1998, S. 99; Borovcnik 2005, S. 5), dann lässt sich für das Modellieren funktionaler Abhängigkeiten aus naturwissenschaftlichen Daten die Grundgleichung

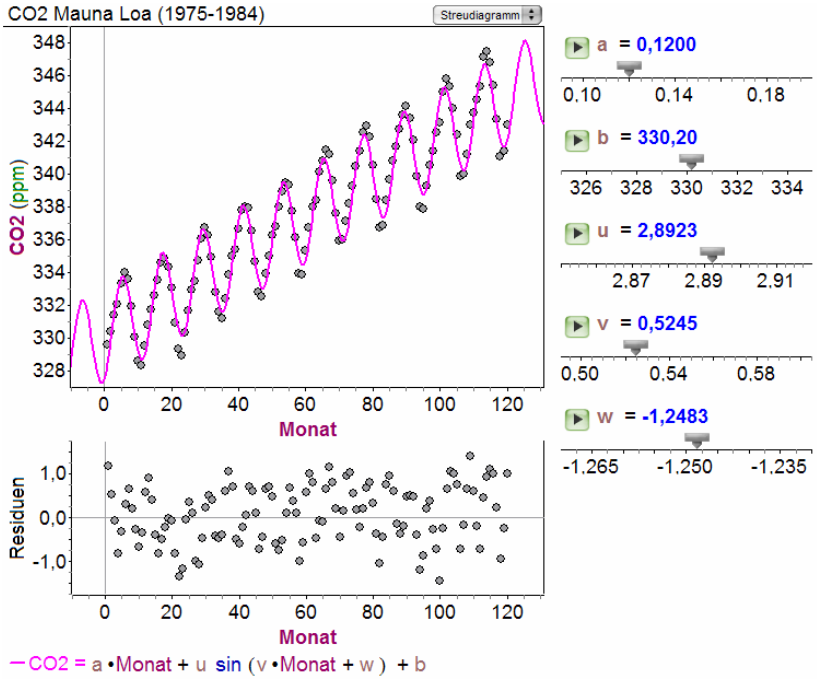
$$Daten = Funktion + Residuen$$

formulieren. Sie ist ein Konstrukt, das eine Interpretationshilfe darstellt, um in der Vielfalt und Variabilität der Daten wesentliche Strukturen zu erfassen. Die stochastische Komponente modelliert diejenige Variabilität in den Daten, die durch das deterministische Funktionsmodell nicht erfasst wird. Für den Mathematisierungsprozess hat dies zur Konsequenz, dass es nicht genügt, nur darauf zu achten, dass die funktionale Anpassung möglichst gut den Datentrend wiedergibt. Zugleich sollen die Abweichungen (Residuen) möglichst klein sein, möglichst zufällig im Sinne von trendfrei sein und sich nach oben und unten insgesamt ausgleichen (vgl. Biehler & Schweynoch 1999, S. 19f).

Multimediale Unterstützung

Die Grundgleichung *Daten = Funktion + Residuen* lässt sich in einem Streudiagramm geeignet graphisch repräsentieren. Die Datenlage wird in einer Punktwolke dargestellt, während das Funktionsmodell in einem Graphen durch die Datenwolke führt. Den Residuen entsprechen die Abweichungen zwischen einzelnen Wertepaaren der Datenwolke und den Wertepaaren des Funktionsgraphen, die in der unabhängigen Variablen (Prädiktor) übereinstimmen. Durch die Mitberücksichtigung einer stochastischen Komponente wird die Modellierung stärker an die phänomenologische

Ausgangssituation angenähert, jedoch wird sie auch komplexer. Dynamische und interaktive Software, wie z. B. FATHOM bietet hier Möglichkeiten, den Modellierungsprozess sachgerecht und anwendernah zu unterstützen.



Neben vielen anderen Möglichkeiten der multimedialen Unterstützung ist ein zentrales Merkmal, dass mit der Zuschaltung eines Residuenplots neben dem Funktionsgraphen (deterministische Komponente) der stochastische Aspekt in das Blickfeld rückt. In der vorangehenden Abbildung ist dargestellt, wie ein Datenausschnitt der atmosphärischen CO_2-Messungen auf Mauna Loa durch die additive Kombination einer linearen Funktion und einer Sinusfunktion angepasst wurde. Der Funktionsgraph wird mit den Daten in einem Streudiagramm abgebildet, der zugehörige Residuenplot erscheint entsprechend unter dem Streudiagramm. Werden zur Datenanpassung parametrische Funktionsstandardmodelle verwendet, so werden über die dynamische Verknüpfung die Auswirkungen von interaktiven Parameteränderungen nicht nur hinsichtlich der funktionalen Anpassung, sondern auch der hinsichtlich der Datenabweichungen extern realisiert. Für eine Modellierung naturwissenschaftlicher Phänomene im Sinne der Grundgleichung *Daten* = *Funktion* + *Residuen* ist dies tragend.

Didaktische Aspekte

Die Informationen von Trend und Residuen bilden die Grundlage für die Vergewisserung der funktionalen Modellkonstruktion einerseits. Andererseits werden die phänomenologischen Ausgangsinformationen durch die

Informationen struktureller Eigenschaften eines angepassten stochastisch-funktionalen Modells ergänzt. Die sukzessiv weitere Erschließung des phänomenologischen Hintergrunds liefert wiederum Informationen zur Beurteilung der funktional-stochastischen Modellierung. Finden parametrische Funktionsmodelle Verwendung, können zusätzlich inhaltliche Rückschlüsse über die verwendeten Parameter gezogen werden. So tragen Funktionen als mathematisches Werkzeug zur naturwissenschaftlichen Umwelterschließung (Vollrath 1982, S. 2) bei: Naturwissenschaftliches Verstehen und funktionales Denken bereichern sich wechselseitig. Die Residuenanalyse des gewählten mathematischen Modells gibt im Hinblick auf *Rest-Trend-Strukturen* inhaltlich darüber Auskunft, ob wesentliche Einflussfaktoren in die Modellierung eingegangen sind, welche (bewusst) vernachlässigt wurden, ob diese Entscheidungen den momentanen Anforderungen genügen können oder ob Modellspezifikationen erforderlich werden. Werden naturwissenschaftliche Phänomene unter Berücksichtigung von Trend und Residuen modelliert, kann dies dazu beitragen, dass Realität und Modell nicht verwechselt werden.

Literatur

Biehler, R. & Schweynoch, S. (1999). Trends und Abweichungen von Trends. *Mathematik lehren* (97), S. 17-22

Borovcnik, M. (2005). Probabilistic and Statistical Thinking. Tagungsbeitrag zur CERME 4 – Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 17. – 21.02.2005 in Sant Feliu de Guixols, Spanien. Abrufbar unter (19.03.2006): http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/5/Borovcnik.pdf

Engel, J. (1998). Zur stochastischen Modellierung funktionaler Abhängigkeiten: Konzepte, Postulate, Fundamentale Ideen. *Mathematische Semesterberichte*, 45, S. 95-112

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (MKJS) (Hrsg.) (2004). *Bildungsplan für die Realschule*. Ditzingen: Philipp Reclam Jun.

PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.) (2004). *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs*. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann

Vollrath, H.-J. (1982). Funktionsbetrachtungen als Ansatz zum Mathematisieren in der Algebra. *Der Mathematikunterricht*, 28 (3), S. 5-27

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, S. 37-46

Andreas VOHNS, Universität Siegen

Fallbezogene Rekonstruktion grundlegender Ideen in der Geometrie

1. Motivation

In der Mathematikdidaktik wird seit langem über „fundamentale Ideen“, „zentrale Ideen“, „universelle Ideen“ oder „Leitideen“ nachgedacht. Gegenüber den hier zusammenfassend als „grundlegende Ideen“ bezeichneten fachdidaktischen Konzeptionen sind die „Leitideen“ in den deutschen Bildungsstandards ein deutlich reduziertes Konzept, bei dem eine Unterordnung möglichst aller erwarteten inhaltsbezogenen Kompetenzen unter möglichst jeweils genau eine Leitidee im Vordergrund steht. Dabei geht nach Ansicht des Vortragenden einiges an Potenzial verloren, das eine Orientierung an grundlegenden Ideen bieten könnte. Im Vortrag wird daher „bottum up“ von einer konkreten Aufgabenstellung ausgehend das Reflexionspotenzial grundlegender Ideen rekonstruiert. Im Vordergrund steht dann die Frage, inwieweit das Zusammenspiel unterschiedlicher Ideen im Beispiel das Problem durchschaubar macht. Der Fokus liegt dabei nicht auf der Aufgabe selbst, sondern von Studierenden (N=28) generierten Lösungswegen zu der Aufgabe.

2. Fallbeispiel: Am Strand

Betrachtet wird dazu die Aufgabe „Am Strand“ aus den Österreichischen Bildungsstandards (BMBWK 2005, S. 105):

> „Chris und Angela liegen am Strand. Chris hat 30 m bis zur Eisbar. Angela 40 m. Wie weit sind die beiden voneinander entfernt? Überlegt unterschiedliche Lagepositionen! Welche Positionen ermöglichen eine einfache rechnerische Lösung?“

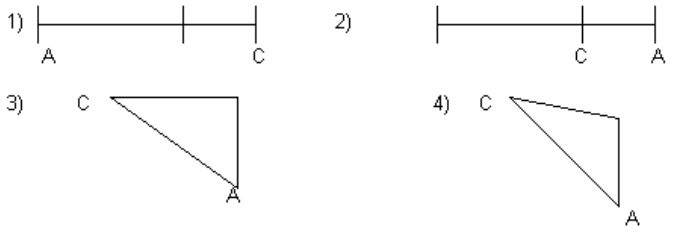
Die Analyse erfolgt nach einem dreischrittigen Verfahren: Sichtung der Lösungsansätze und Raffung zu idealtypischen Lösungsansätzen; Exploration möglicher Anknüpfungspunkte für grundlegende Ideen; Sachanalytische Ausweitung (Verhältnis der Ideen im Beispiel und darüber hinaus).

3. Lösungsansätze

A) Rechnerisch mit Pythagoras

Bei diesem Ansatz erfolgt zunächst die Feststellung, dass für die Berechnung eines Dreiecks drei Angaben (SWS, WWS, etc.) benötigt werden, die Aufgabe also nicht eindeutig sei. Man müsse die Aufgabe daher so verändern, dass bei der Eisbar ein rechter Winkel vorläge, dann könne man das Ergebnis mittels Pythagoras berechnen. Diese Lösung trat viermal auf.

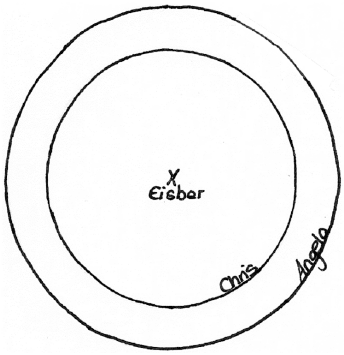
B) 2 Strecken 2 Dreiecke



Bei diesem Ansatz wird erkannt, dass die Bedingung verschiedene Optionen offen lässt.

Es werden i.d.R. vier Lagepositionen unterschieden, wobei die ersten beiden als „rechnerisch einfach" gelten, der dritte (rechtwinklige) Fall „erfordert Vorkenntnisse" und der 4. Fall müsse „unter Voraussetzung der gegebenen Bedingungen als nicht lösbar erkannt werden". Diese Lösung trat 19 mal auf.

C) 2 Kreise



Hier werden die Studierenden von der Frage geleitet, ob „die beiden möglichst dicht bei einander oder möglichst weit voneinander entfernt" liegen. Die Randlagen (Chris, Angela, Eisbar auf einer Geraden) werden als Extremalpositionen und die beiden Kreise als geometrischer Ort aller möglichen Positionen erkannt. Der Lösungsansatz tritt vier mal in Ergänzung zu B) auf, aber nur einmal als einziger Lösungsansatz.

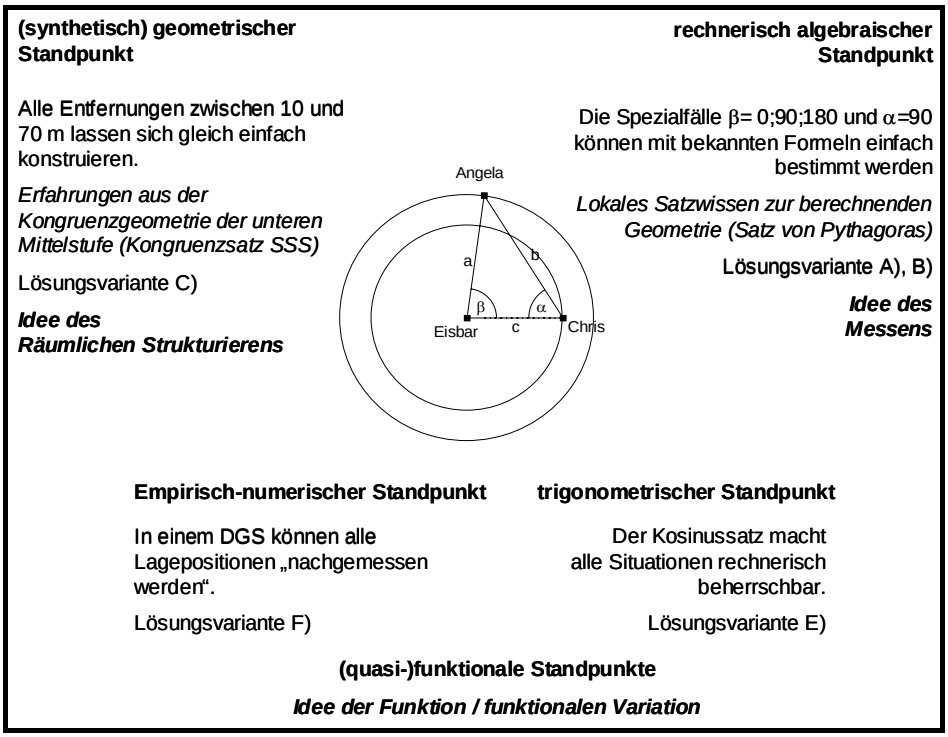
D) Lösungsansätze mit DWIM-Verstößen

In zwei weiteren Sonderfällen verstoßen die Studierenden gegen in der Aufgabestellung implizit enthaltene Bedingungen („Do What I Mean"-Phänomen, Jahnke 2005). In einem Fall (E)) wird schlicht der Kosinussatz als generelle Antwort zur Berechnung der Entfernung aus einer Formelsammlung zitiert. In der zweiten Lösung (F)) ist das 2-Kreise-Modell in ein DGS umgesetzt worden und die Messung wird intern (d.h. empirisch-numerisch) vorgenommen. Das führt auch dazu, dass die beiden möglichen gleichschenkligen Dreiecks-Fälle aufgefunden werden. Berechnungsüberlegungen fehlen hier.

4. Analyse der Lösungsansätze

Die Lösungswege A) und B) verweisen auf einen rechnerisch-algebraischen Standpunkt. Von diesem Standpunkt aus sind nur einige ausgewählte Lagepositionen „einfach", nämlich diejenigen, bei denen sich die Entfernung von Chris und Angela berechnen lässt. Im „allgemeinen Fall" haben wir aber keine Berechnungsvorschrift. In dieser Lösung überwiegt die Idee des Messens: Die Berechnungsvorschriften sind gewissermaßen „geronnene" Messerfahrungen, wir wissen in diesen Fällen, wie wir das

Problem von der geometrischen Ebene auf eine numerische Ebene verlagern können (s. Abb).



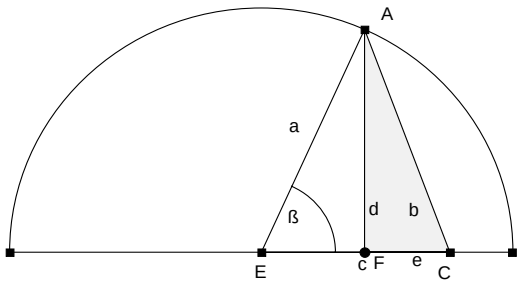
Die Lösung C) verbleibt auf einem (synthetisch) geometrischen Standpunkt. Hier sind alle Fälle gleich einfach, denn der Kongruenzsatz SSS garantiert die Konstruierbarkeit aller Entfernungen zwischen 10 und 70 m.

Die Lösung E) stellt die konsequente Fortsetzung der Lösungen A) und B) dar: Wenn man den Kosinussatz zur Verfügung hat, sind alle Fälle gleich einfach rechnerisch-algebraisch beherrschbar. Wir gewinnen dann zudem eine Formel, die uns in Abhängigkeit vom Winkel β stets die Entfernung von Chris und Angela berechnen lässt. Die Lösung F) greift den synthetisch-geometrischen Weg auf und liefert uns durch (empirische) Messung ebenfalls eine Möglichkeit, für jede mögliche Lageposition stets die Entfernung von Chris und Angela zu bestimmen. Insofern lassen sich beide Lösungsansätze unter einem (quasi-)funktionalen Standpunkt zusammenfassen.

5. Sachanalytische Ausweitung: Vom DGS zum Kosinussatz

Bei dieser Aufgabe zeigt sich eine Diskrepanz zwischen der Einfachheit aller Fälle unter kongruenzgeometrischer Perspektive und der rechnerisch-algebraischen Beherrschung ausschließlich in Spezialfällen. Diese Diskrepanz löst sich auf, wenn man das Problem trigonometrisch betrachtet: Der Kosinussatz ist das trigonometrische Pendant der Kongruenzsätze, mit dem sich wiederum alle Fälle berechnen lassen. Die Aufgabe könnte daher eine

Einführung des Kosinussatzes motivieren. Im Vortrag wurde nun der Frage nachgegangen, inwiefern die enthaltenen grundlegenden Ideen (räumliches Strukturieren, Messen, funktionale Variation) einen genetischen Zugang zum Kosinussatz ermöglichen. Dabei zeigt sich, dass ausgehend von der DGS-Lösung durch schrittweise Anwendung für die drei grundlegenden Ideen typischer Heurismen eine Planfigur (s. Abb.) aufgefunden werden kann, die eine Bestimmung der Entfernung mit bekannten Hilfsmittel (Definition von Sinus/ Kosinus am Einheitskreis, Satz von Pythagoras) erlaubt.



6. Resumé

Die Aufgabenstellung lenkt den Blick zunächst auf „berechenbare Situationen“. Dadurch entsteht eine Diskrepanz zwischen der „Einfachheit“ aller Fälle unter kongruenz-geometrischer Perspektive (*Räumliches Strukturieren*) und der Herausgehobenheit der Spezialfälle unter algebraisch-numerischer Perspektive (*Messen*). Diese Diskrepanz spiegelt sich in den Lösungsansätzen A) bis C) wieder. Eine Lösung mit DGS löst die Diskrepanz auf empirisch-numerischer Ebene auf und kann andererseits als Ausgangspunkt für eine Auflösung der Diskrepanz auf algebraisch-numerischer Ebene mittels Kosinussatz dienen.

Erst durch diese Zusammenführung wird nach Ansicht der Vortragende die typische Verknüpfung und Interaktion der Ideen (Messen, räumliches Strukturieren, funktionale Variation) deutlich, werden nur Einzelfälle berechnet, scheint kaum Anknüpfdungspotenzial für ein Reflektieren über grundlegende Ideen gegeben, welches für eine Orientierung an ebendiesen aber entscheidend wäre (Vgl. Vohns 2005).

Literatur

BMBWK 2005: Bildungsstandards für Mathematik am Ende der achten Schulstufe. Internet (http://www.gemeinsamlernen.at/siteVerwaltung/mOBibliothek/Bibliothek/Standards_Endversion_korr_25-10_eBook.pdf).

Jahnke, Thomas 2005: Aufgaben im Mathematikunterricht. Internet (http://www.math.uni-potsdam.de/prof/o_didaktik/a_mita/aa/Publ/mu).

Vohns, Andreas 2005: Messen oder (Be-)Rechnen? Mit fundamentalen Ideen über Mathematik reflektieren. In: Lengnink, Katja ; Siebel, Franziska (Hrsg.) : Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. Darmstadt, S. 69-84.

Wolfgang WEIGEL, Würzburg

Grundlagen zur Organisation virtueller Lehre an Beispielen aus dem Bereich der Mathematik

Sowohl der Bund als auch die Länder fordern und fördern die Entwicklung und den Einsatz von Internet-gestützten Lehren und Lernen an Hochschulen. Beispiele hierfür sind die Initiativen MaDiN[1] oder die in Bayern angesiedelte virtuelle Hochschule (VHB)[2]. Die genannten Projekte gehören alle in den Bereich des E-Learning, mit dem heute unterschiedlichste Vorstellungen verbunden sind. Dieser Artikel will einen Beitrag zur Eingrenzung dieses Begriffs geben und insbesondere Wege zur Strukturierung, Gestaltung und Analyse von E-Learning-Szenarien aufzeigen.

Eine Definition von E-Learning

Obwohl es bisher keine allgemein akzeptierte Definition des Begriffs E-Learning gibt (vgl. Stefanou (2005), S. 14), kann man ihm mehrere charakteristische Aspekte zuordnen:

a) E-Learning wird anhand von *elektronischen* Informationsträgern durchgeführt.

b) Dabei können die Lerninhalte entweder von einem offline-Medium (wie z.B. einer CD-ROM), via Internet (Server-Client-Struktur) oder parallel auf *online*- und auf *offline*-Wegen an die Lerner herangetragen werden.

c) Man geht davon aus, dass die Teilnehmer von virtuellen Veranstaltungen untereinander und zu Betreuern/Lehrpersonen nur in seltenen Fällen persönlichen Kontakt herstellen können (z.B. aufgrund großer örtlicher Distanz zwischen den Gruppen). Daher ist es notwendig Hilfsmittel zur *Organisation* (z.B. Koordinierung von Einsendeaufgaben) und zur *Kommunikation* (z.B. bei Fragen zum Lehrstoff) bereitzustellen.

Darauf aufbauend wird unter E-Learning ein elektronisches Angebot von nicht zwingend netzgestützten Lehr-/Lernmaterialien verstanden, die in eine Organisations- und Kommunikationsplattform integriert sind. Hierzu soll im Folgenden das Feld zunächst strukturiert werden.

Strukturierung von E-Learning

Elektronische Wissensvermittlung kann beispielsweise durch eine zeitlich fixierte Ton- und Bildübertragung eines Lehrvortrags (Videoübertragung) eines Dozenten an die örtlich verstreuten Lernenden vorgenommen werden.

[1] http://www.madin.net (02.02.2006)
[2] http://www.vhb.org (02.02.2006)

Aber auch eine Zusammenarbeit bei Aufgaben oder Lernmaterial der Teilnehmer untereinander, ohne direktes Einwirken der Betreuer/Lehrpersonen, ist denkbar. Beide Arten unterscheiden sich insbesondere durch das Zeitmanagement. Videoübertragungen und Videokonferenzen erzwingen, dass sowohl Kursteilnehmer, als auch Lehrende zur gleichen Zeit (synchron) anwesend sein müssen. Lehr-/Lernszenarien lassen sich in *synchrones* und *asynchrones* E-Learning unterteilen (vgl. Tabelle 1). Zur asynchronen Variante gehören sowohl vollständig netzgestützte Lehrgänge (WBT), als auch computergestützte Weiterbildungen, die nicht zwingend einen Internetzugang benötigen (CBT). Man kann asynchrones E-Learning zusätzlich in *online* und *offline* Typen unterscheiden. Kommunikation in synchronen Kursen kann beispielsweise mit einem Chat durchgeführt werden. Im asynchronen Fall werden Foren eingesetzt.

asynchrones E-Learning		***synchrones E-Learning***
online	offline	
Web Based Training (WBT)	Computer Based Training (CBT)	Videokonferenz
Forum		Chat

Tabelle 1: Ausprägungen von E-Learning

Ein offline-Lehrgang hat den Vorteil, dass keine gebührenpflichtige Internetverbindung für die Teilnahme notwendig ist. Große Datenmengen (z.B. Videos) können ohne längere Wartezeiten von Festplatte oder CD-Rom gestartet werden. Allerdings kann ein online-Kurs immer aktuell gehalten werden und bei der Gestaltung der interaktiven Inhalte müssen keine Kompromisse (z.B. Verzicht auf Server-Client-Anwendungen) eingegangen werden. Synchrone Veranstaltungen können den Teilnehmern trotz der Virtualität ein großes Maß an sozialer Integration in die Veranstaltung und zu anderen Teilnehmern oder Lehrpersonen bieten.

Sowohl für die Planung und Gestaltung, als auch bei der Analyse von synchronen bzw. asynchronen Projekten müssen mehrere Bereiche beachtet und unterschieden werden.

Bestandteile des E-Learning

Lehre an Hochschulen wird traditionell in Seminaren und Vorlesungen durchgeführt. Studierende und Dozenten sind zu fest vorgegebenen Zeiten am Veranstaltungsort präsent. „Präsenzlehre“ wird überwiegend nach diesem Muster abgehalten. Im Rahmen von E-Lehre müssen die für die

Präsenzlehre geklärten Fragen (z.B. wie erhalten die Teilnehmer ihre Übungsblätter oder wie und von wem werden die Inhalte gelehrt?) neu beantwortet werden. Die Bereiche des E-Learning gliedern sich in einen *technisch-organisatorischen* und einen *inhaltlichen* Bereich. Bei der Aufbereitung der Inhalte ist die Wahl der *Lernmedien* und der *Modus der Vermittlung* von Interesse. Dem stehen die zum Erwerb der Lernziele notwendigen *Vermittlungswerkzeuge* und die Wahl der *Organisation* des Lehr-/Lernarrangements gegenüber.

Lernmedien: Lerninhalte können durch live übertragene oder aufgezeichnete Vorlesungen transportiert werden. Bei dieser Art des Wissenstransfers hat der Dozent eine zentrale Rolle. Tritt die Lehrperson in den Hintergrund und übernimmt die begleitende Funktion eines Tutors, dann treten vor allem Texte als Mittler in den Vordergrund. Übliche elektronische Textformate sind beispielsweise PDF, Office-Formate und „Internet-gerechtes" HTML. Besonders HTML kann um zahlreiche Repräsentationsformen, wie Bilder, Animationen oder Videos ergänzt werden. Um den Lernern eine interaktive Auseinandersetzung mit den Inhalten zu ermöglichen, können sog. Interaktivitäten verwendet werden. Für den Bereich der Mathematik ist das interaktive Arbeiten und Sammeln von Erfahrungen mit „virtuellen" Werkzeugen (vgl. Abbildung 1), DGS oder auch WebMathematica (vgl. Weigel (2003)) denkbar.

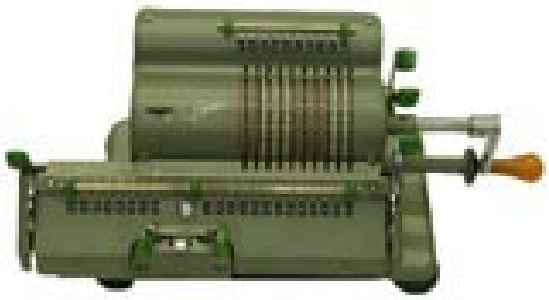


Abbildung 1: Auch in elektronischen Kursen kann mit mathematischen Werkzeugen (wie z.B. Rechenmaschinen) entdeckend gearbeitet werden.

Vermittlungsmodus: Man unterscheidet drei Ansätze zur Wissensvermittlung von E-Learning. Ein Beispiel für eine *lehrerorientierte* Strategie ist die (oben beschriebene) Videoübertragung. Tritt die Lehrperson als Akteur in den Hintergrund, kann eine Planungsmethode gewählt werden, bei der die Teilnehmer alleine (*lernerorientierter* Vermittlungsmodus) oder in Gruppen (*teamorientierter* Vermittlungsmodus) arbeiten. Passend zur jeweiligen Strategie müssen die Lernmaterialen angepasst werden, d.h. dass Inhalte z.B. selbsterklärend aufbereitet und entsprechend mit individuellen durchführbaren Lernaufgaben bereichert werden müssen.

Vermittlungswerkzeuge: Passend zum jeweiligen Vermittlungsmodus müssen den Beteiligten Hilfsprogramme zur Kommunikation und Verwaltung bereit gestellt werden. Für den synchronen Einsatz bieten sich der Chat, für den asynchronen das Forum oder E-Mail an. Im Gegensatz zu

Präsenzveranstaltungen kann man den Lernenden Termine (z.B. für Einsendeaufgaben), besondere Ereignisse oder Auskunft über die Qualität bearbeiteter Übungsaufgaben nicht persönlich mitteilen. Hierfür müssen entsprechende Werkzeuge angeboten werden. Sowohl Hilfsmittel zur Kommunikation, als auch die Lernmedien müssen für die Lernenden leicht bedienbar, schnell und einfach verfügbar sein. Eine Integration aller Medien und Werkzeuge innerhalb *einer* (Lern-) Plattform kommt als eine sinnvolle Möglichkeit in Frage.

Organisation: Für die Wahl der Organisationsform einer mit elektronischen Medien unterstützten Veranstaltung gibt es vier Varianten (in Anlehnung an Albrecht 2003):

Enrichment: Präsenzveranstaltungen werden in unregelmäßigen Abständen mit virtuellen Phasen bereichert.

Blended Learning: Die Veranstaltungen bestehen aus einem gleichberechtigtem Mix aus Präsenz- und virtuellen Phasen.

Virtuelle Lehre: Es gibt keine Präsenztreffen in der Kursdurchführung.

Erweiterte virtuelle Lehre: Es gibt zu Beginn, am Ende und während der Kursphase jeweils ein Live-Treffen (vgl. Weigel).

E-Learning am Beispiel des Kurses *Mathematik und Computer*[3]

Der Kurs Mathematik und Computer richtet sich an Lehramtsstudierende des Fachs Mathematik. Ziel der Lehrveranstaltung ist die Vermittlung von Grundlagen im Umgang mit dem Computer, insbesondere CAS/DGS und deren Einsatz im Unterricht. Im Rahmen des (nach dem Prinzip der erweiterten virtuellen Lehre organisierten) Kurses, wurde eine lernerorientierte Vermittlung gewählt. Daher wurden in die Lerntexte ein in drei Teile gegliedertes (*Technik*, *Mathematik* und *Didaktik*) Angebot an Lernaufgaben integriert. Zur Vermittlung von Werkzeugkompetenz mit CAS/DGS haben sich mit Zusatzinformationen aufbereitete Videos bewährt.

Literatur

Albrecht, R. (2003): E-Learning an Hochschulen. dissertation.de, Berlin.

Stefanou, A. (2005): E-Learning. VDM-Verlag, Berlin.

Weigel, W. (2003): WebMathematica Online - Ein Beispiel aus der Sekundarstufe II. In: MU, Der Mathematikunterricht, 4(49), Eberhard Friedrich Verlag, Seelze.

Weigel, W. (im Druck): Erfahrungen zum virtuellen Selbstlernkurs Mathematik und Computer. In Peter Bender (Hrsg.): Neue Medien und Bildungsstandards. Hildesheim, Franzbecker.

[3] Ein Kurs aus dem Angebot der Virtuellen Hochschule Bayern

Gregor Wieland, Freiburg (Schweiz)

Verständnis für Funktionen und Graphen aufbauen

1. Die Vorschläge des Shell Centre for Mathematical Education 1985

Im Jahre 1985 ist die Dokumentation „The Language of Functions and Graphs“ des Shell Centre for Mathematical Education der University of Nottingham erschienen. Darin wurden verschiedene Vorschläge unterbreitet, wie das Thema „Funktionen und Graphen“ im Unterricht ganzheitlich und zu Beginn wenig formal behandelt werden könnte. Die Vorschläge wurden in diversen Artikeln, zum Beispiel in der Zeitschrift *mathematik lehren*, aufgenommen. In Schweizer Lehrmitteln sind sie erst in neuester Zeit berücksichtigt worden. Eine Ausnahme bildet ein Lehrmittel zur Analysis (Autorengruppe 1989). Dort geschieht aber nach der anschaulichen Einführung sehr schnell der Übergang zur formalen Behandlung von Funktionen.

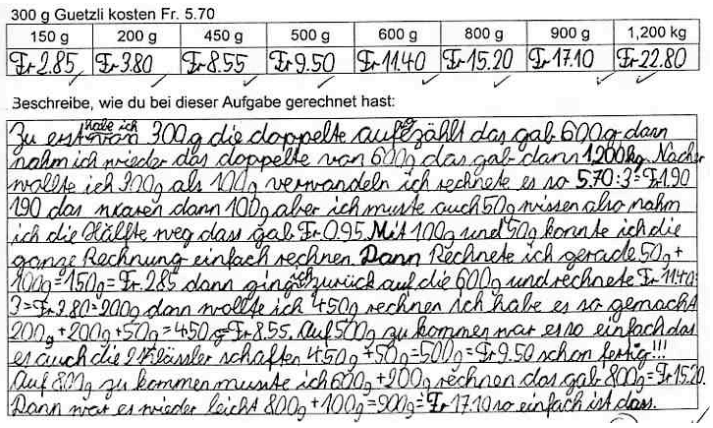
Erste Untersuchungen in der Schweiz Ende der 80-er-Jahre zeigten, dass ein Verständnis für Graphen ohne spezielle Vorkenntnisse der Lernenden bereits vor dem Gymnasium aufgebaut werden kann. Dies geht unter anderem aus Ergebnissen verschiedener Klassen zur Darstellung eines Weg-Geschwindigkeits-Diagramms eines vorgegebenen Schulwegs hervor.

2. Erfahrungen mit Funktionen im Übergang von der PS zur Sek I

Ein weiterer Zugang zum Thema führt über Tabellen und deren sprachliche Interpretation. Dies forderten u. a. Bürger und Malle: *„Durch die Arbeit mit Tabellen bekommen die Schüler ein Gespür dafür, wie sich Änderungen bei funktionalen Zusammenhängen auswirken. Spielerisches Aufstellen von Tabellen und systematisches Probieren vermitteln meist mehr Einsicht in funktionale Zusammenhänge als ein verfrühtes rezeptartiges Lösen von Dreisatzaufgaben.“* (Bürger 1996, S. 14)

Im Zahlenbuch erlernen die Schülerinnen und Schüler auf natürliche Weise den Umgang mit Tabellen, etwa indem sie zu vorgegebenen Zahlen immer die Hälfte, das Doppelte, eine Summe mit konstantem Summanden oder eine Differenz mit konstantem Subtrahenden berechnen müssen. Eine weitere nicht zu unterschätzende Vorbereitung für das Verständnis funktionaler Zusammenhänge stellen die strukturierten Übungen dar, bei denen eine Ausgangsaufgabe in systematischer Weise verändert wird. Die Aufdeckung der Strukturen durch entsprechende Gespräche im Unterricht bereitet in idealer Weise funktionales Verständnis vor. Leider wird dies wegen der immer noch weit verbreiteten Richtig-Falsch-Kultur zu wenig genutzt.

Neben diesen Vorbereitungen wird in Schweizer Schulen die funktionale Abhängigkeit zweier Größen traditionsgemäß bei der Einführung der Proportionalität thematisiert. Dabei spielen Tabellen und deren Diskussion eine entscheidende Rolle. Für die Lernenden sind oft die additiven Beziehungen bedeutungsvoller als die multiplikativen Beziehungen wie folgendes Beispiel eines Schülers der 5. Klasse illustriert:



300 g Guetzli kosten Fr. 5.70

150 g	200 g	450 g	500 g	600 g	800 g	900 g	1,200 kg
Fr. 2.85	Fr. 3.80	Fr. 8.55	Fr. 9.50	Fr. 11.40	Fr. 15.20	Fr. 17.10	Fr. 22.80

Beschreibe, wie du bei dieser Aufgabe gerechnet hast:

Zu erst habe ich 300 g die doppelte aufgezählt das gab 600 g dann nahm ich wieder das doppelte von 600 g das gab dann 1200 kg. Nachher wollte ich 300 g als 100 g verwandeln ich rechnete es so 5.70 : 3 = Fr. 1.90 190 das waren dann 100 g aber ich musste auch 50 g wissen also nahm ich die Hälfte weg das gab Fr. 0.95 Mit 100 g und 50 g konnte ich die ganze Rechnung einfach rechnen. Dann Rechnete ich gerade 50 g + 100 g = 150 g = Fr. 2.85 dann ging es zurück auf die 600 g und rechnete Fr. 11.40 : 3 = Fr. 3.80 = 200 g dann wollte ich 450 g rechnen ich habe es so gemacht 200 g + 200 g + 50 g = 450 g = Fr. 8.55. Auf 500 g zu kommen war es so einfach das es auch die 2 Klässler schafften 450 g + 50 g = 500 g = Fr. 9.50 schon fertig!!! Auf 800 g zu kommen musste ich 600 g + 200 g rechnen das gab 800 g = Fr. 15.20. Dann war es wieder leicht 800 g + 100 g = 900 g = Fr. 17.10 so einfach ist das.

In der Sekundarstufe I wird das Thema der Proportionalität u. a. im Zusammenhang mit dem Zinsrechnen wieder aufgenommen. Auch hier lohnt sich eine intensive Auseinandersetzung mit den Eigenschaften innerhalb einer Tabelle, nachdem die Sache „Prozent“ geklärt und die Tabelle ausgefüllt ist.

Kapital Zinssatz	100	200	300	500	1000	1600	...
1 %							
2 %							
3 %							
5 %							
... %							

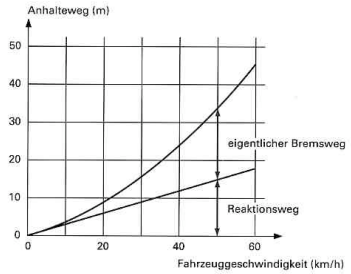
- Additive und multiplikative Zusammenhänge werden besprochen
- Zinsen werden für andere Geldbeträge / Zinssätze (mit TR oder Tabellenkalkulation) berechnet. Erfahrungen werden verallgemeinert.
- Zinsen sind gegeben und Geldbeträge / Zinssätze werden (mit TR oder Tabellenkalkulation) berechnet. Erfahrungen werden verallgemeinert.
- Halbjahreszins / Monatszins / Marchzins werden (mit TR oder Tabellenkalkulation) berechnet. Erfahrungen werden verallgemeinert.
- Neues Kapital wird an Stelle der Zinsen (mit TR oder Tabellen-kalkulation) berechnet. Erfahrungen werden verallgemeinert.

Auch hier werden in der Schule noch oft zu schnell Formeln gegeben, welche dann nach algebraischen Regeln umgeformt werden müssen. Dabei kommt eine inhaltliche Auseinandersetzung mit der Sache oft zu kurz.

3. Wachstums- und Zerfallsfunktionen in der Sekundarstufe I

Neben der intensiven Behandlung der Proportionalität brauchen die Lernenden auch nicht-proportionale Funktionen. Diese sollten sich nicht auf umgekehrte Proportionalität und formale, quadratische Funktionen beschränken. Es gibt genügend Beispiele aus dem Alltag oder in der Geometrie, wie folgende Beispiele zeigen.

Bremsweg: Hier ist der Graph vorgegeben. Eine entsprechende Tabelle wird erstellt.



Es hat sich gezeigt, dass eine Übertragung des Graphen, zum Beispiel auf einem Fußballfeld, bei den Lernenden eine nachhaltige Wirkung auf ihr Vorstellungsvermögen von Größen und Graphen hat.

Quader: Bei der Behandlung von Volumen und Oberflächen von Quadern lohnt sich eine systematische Veränderung der Seitenlängen (Verlängerung um den Faktor k von einer, von zwei, von allen Seiten). Damit kann auch gleichzeitig die Vorstellung der Ähnlichkeit (im Raum!) vorbereitet werden.

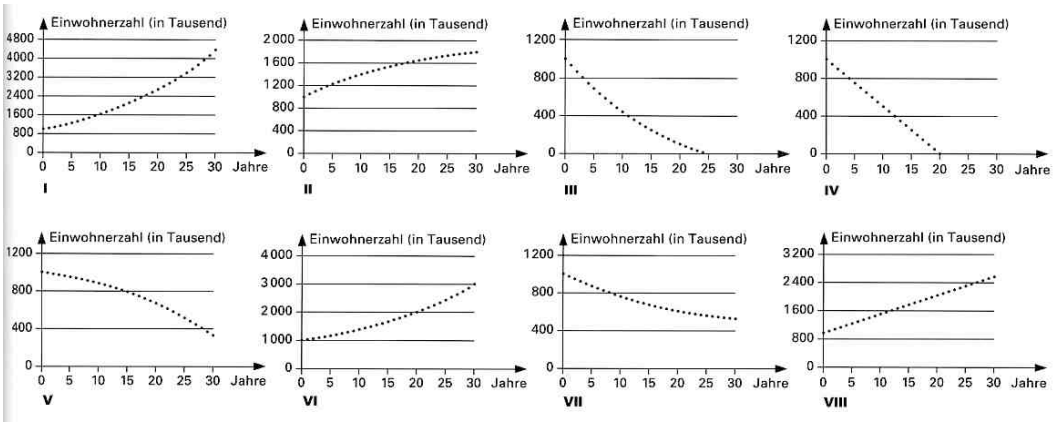
Zinseszins: Ausgehend von der Kapitalberechnung mit Jahres- oder Marchzinsen wird die Kapitalentwicklung mit Zinseszinsen untersucht. Die Kapitalentwicklung wird vorerst rekursiv beschrieben:
$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot p = K_{n-1}(1+p) = K_{n-1} \cdot q$
Die Unterstützung durch einfachste Tabellenkalkulation (notfalls mit einem gewöhnlichen Taschenrechner) führt zur expliziten und zur entsprechenden graphischen Darstellung. Weitere konkrete Problemstellungen zu Exponentialfunktionen, auch mit q, $0 < q < 1$, können das entsprechende Verständnis vertiefen.

Mit diesem Hintergrund ist es sinnvoll einen Schritt weiter zu gehen und auch das Verständnis für logistische Wachstumsfunktionen, zum Beispiel Bevölkerungswachstum mit Geburtenüberschussrate p und konstantem Wanderungsgewinn w, aufzubauen.
$B_n = B_{n-1} + B_{n-1} \cdot p + w = B_{n-1} \cdot q + w$
Der Vorgang kann ausgehend von einem konkreten Beispiel durch die Schüler selbständig entwickelt und beschrieben werden.

Man begnügt sich in der Sekundarstufe I, evtl. mit Ausnahme des Progymnasiums, mit der rekursiven Form und der Berechnung mit Hilfe von Tabellenkalkulation. Ein grundlegendes Verständnis für die Auswirkungen des Faktors q und der Konstanten w kann beispielsweise durch folgende Aufgabenstellung (Autorengruppe, mathbu.ch 9+, 2005) gefördert werden:

Welcher Fall passt zu welchem Graphen?

Fall	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
p	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0	0	0	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05
w (in Tausend)	20	0	−20	−50	−60	50	0	−50	100	50	20	0	−20



Eine ausführliche Diskussion obiger Fälle und die Aufforderung, weitere Beispiele zu erfinden und zu untersuchen, dürften zu einem vertieften Verständnis von Funktionen und Graphen allgemein beitragen.

Solche Funktionen gehören in der Schweiz (noch) nicht zum Lehrstoff der Sekundarstufe I. Erste Unterrichtsprojekte dazu sollen damit auf dieser Stufe angeregt werden.

Literatur

Affolter W. (2003), Ein Experiment als Quelle zum Mathematisieren, Beiträge zum Mathematikunterricht 2003, 53-56, franzbecker, Hildesheim
Autorengruppe der DMK (1989), Analysis, Orell Füssli, Zürich
Autorengruppe (2002-2004), mathbu.ch 7/8/9/9+, Klett und Balmer, Zug
Autorengruppe (1985), Functions and graphs, Shell Centre, University of Nottingham
Bürger H./Malle G.(1996), Funktionen, mathematik lehren 75, Friedrich Verlag, Seelze
Schlöglhofer F. (2000), Vom Foto-Graph zum Funktionsgraph, mathematik lehren 103, 116-117, Friedrich Verlag, Seelze
Müller G.N./Wittmann E.Ch. (1994-1997), Das Zahlenbuch, Klett, Stuttgart
Wieland G. (2002), „x-beliebig“ ein Zugang zur elementaren Algebra, Beiträge zum Mathematikunterricht 2002, 519-522, franzbecker, Hildesheim
Wieland G. (2003), Lernprozesse in der elementaren Algebra als Vernetzung von Inhalt und Form, Beiträge zum Mathematikunterricht 2003, 653-656, franzbecker, Hildesheim

Kirsten WINKEL, Osnabrück

Metakognition im Unterrichtsdiskurs der Grundschule

Nach breiten Diskussionen über Anforderungen an „guten“ Mathematikunterricht manifestieren sich seit 2004 Forschungsergebnisse nicht nur in einschlägiger Literatur, sondern auch in den nationalen Bildungsstandards. Den Kompetenzen „Kommunizieren und Argumentieren“ wird eine große Bedeutung für erfolgreiches Mathematiklernen zugeschrieben. Auch im neuen niedersächsischen Kerncurriculum für die Grundschule ist festgehalten: „Der *Austausch über mathematische Sachverhalte* fördert deren Verständnis und regt Schülerinnen und Schüler an, die Gedankengänge anderer nachzuvollziehen bzw. eigene Gedankengänge zu verdeutlichen.“ (S. 15). Auch Erkenntnisse über metakognitives Lernen sind eingeflossen: Lernstrategien werden explizit als „lehr- und lernbar“ deklariert und die Notwendigkeit für „*Planung, Kontrolle und Reflexion* des Lernprozesses“ (S. 6) wird aufgezeigt. In der viel zitierten Rangskala der Effektstärke auf den Lernerfolg von Wang, Haertel und Walberg (1993, zit. n. Helmke, 2003, S. 78) belegen metakognitive Kompetenzen eindrucksvoll den vierten Platz.

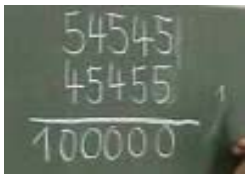
Die Forderungen weisen deutlich die Richtung auf, die in der Literatur unter einer „konstruktivistisch orientierten Unterrichtskultur“ zu finden ist. So eine Unterrichtskultur zeichnet sich nicht durch punktuelle Änderungen durchschnittlichen Mathematikunterrichts aus, sondern durch das Zusammenwirken von veränderter Aufgaben- und Gesprächskultur (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2003) und besonderer Berücksichtigung von Metakognition (Sjuts, 2003). Dokumentiert ist diese Unterrichtskultur ausführlich für den gymnasialen Mathematikunterricht (z. B. Kaune, 2001).
Es wirft sich nun die Frage auf, wie eine Unterrichtskultur in der Grundschule aussehen kann, die nachweislich der Förderung von Kommunikation und Argumentation sowie der metakognitiven Aktivitäten Planung, Kontrolle und Reflexion (s.o.) gerecht wird.

Um metakognitive Schüleraktivitäten in videografiertem Unterricht präziser erfassen zu können, entwickeln Cohors-Fresenborg und Kaune derzeit ein Kategoriensystem zum Klassifizieren metakognitiver Aktivitäten im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I (2005). Im Folgenden findet dieses Kategoriensystem in angepasster Form Anwendung in der Grundschule. Weitere Grundlage für die quantitative Analyse bildet das Signiersystem zur quantitativen Erfassung von Dialogstrukturen (Walter, 2003).

Um die Ausprägung metakognitiver Aktivität zu veranschaulichen, wird diese entsprechend des Kategoriensystems (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2005) über drei verschiedene Schriftfarben direkt im Transkript kenntlich

gemacht: **Planung** – **Monitoring** – **Reflexion**. Zusätzlich wird der diskursive Austausch von Gedanken grün markiert: **Diskursivität**. Alle Lehrerbeiträge sind zum Zwecke der Übersichtlichkeit unterstrichen.

Die Analyse des nachfolgenden Transkriptes soll exemplarisch zeigen, zu welchen mathematischen Auseinandersetzungen Drittklässler in der Lage sind, wenn sie vom ersten Schultag an in einem konstruktivistisch orientierten, diskursiven Unterricht erzogen werden. Das Transkript gibt einen ca. vierminütigen, zusammenhängenden Ausschnitt einer zweiten Unterrichtsstunde der Einheit „Schriftliches Addieren“ wieder. Aufgabe der Stunde ist es, „Zahlenmuster“ an der Tafel, deren Bauregeln zuvor selbständig entdeckt wurden, auf syntaktische und semantische Korrektheit zu überprüfen.



Julian: David. [geht zur Tafel].
David: Ich wollte die hier Auf ', die Aufgabe machen. [wählt die (korrekte) Aufgabe „54545 + 45455 = 100000“ aus] Also 5 plus 5 sind 10, aber 1 merk ich mir, dann schreib ich nur die 0 hin und merk mir eine 1 [zeigt Einer, schreibt kleine "1" neben die Aufgabe]. Und dann: 4 plus 5 sind eigentlich nur 9, aber dann tu ich die 1 dazu, dann sind es 10, dann muss ich mir wieder eine 1 merken, dann, dann wieder ...
Jana: Hää? Hää, aber ...
David: [dreht sich zu Jana] 5 plus 5 sind 10, ne? [Jana: "Ja"] Dann schreib ich nur die 0 hin und eine 1 merk ich mir. [Jana: "Ja."] [Anika: "Ja dann, mmh ..."]
David: 4 plus 5 sind eigentlich nur 9, aber da hab ich noch eine 1 dazu getan, dann sind's 10. Und dann kann ich mir wieder eine 1 merken.
Anika: Hää?
L.: Anika.
Anika: Öh, das ist aber doch, [geht zur Tafel] die 1 ist aber doch eigentlich 'ne 10. Dann würde hier eigentlich 'ne 9 hinkommen. [zeigt Zehner]
David: Nein! [wischt kleine "1" weg]
Jana: Ah, ich versteh Anika! Mmm, David, David!
David: Es ist ja nur die 0 da hin geschrieben und die 1, das ist ja nur 'nen Trick!
Jana: Ich versteh, was Anika ... [Ricarda: "Äh, ich weiß!"]
L.: Anika, macht ihr beide eben noch? [Jana: "Anika, ich versteh!"]
David: Das ist nur so 'nen Trick, verstehst du? [Ricarda: "Mmh, ich weiß wie!"]
L.: Ich versteh jetzt nicht genau, was ihr für'n Konflikt habt. [Jana: "Äh, äh!"]
David: Ich, sie sagt, das,... das ist doch jetzt 10. Sie sagt, das ist doch, die 1 ist doch, ähm 10.
Anika: Jaa!
L.: Anika, sagst du noch mal, was du meinst?
Anika: Hier. [zeigt Einer] 5 plus 5 macht ja 10. Und dann schreibt man 'ne 0 hin und dann 4 plus 5 plus 10, weil das ist ja eigentlich 'ne 10.
L.: Das heißt, du meinst, da müsste jetzt 19 rauskommen?
Anika: Jaa.
L.: Weil 10 plus 9 19 sind?
Jana: Aah, ah, ah ... [Ricarda: "Ich weiß!"]

L.: Nicht "Ah, ah, ah"! Jana, wenn du drängelst, nehmen die dich bestimmt
36 nicht dran. [Jana: "Mmh."]
David: Soll ich jetzt jemanden so ...?
38 L.: Ja, ihr könnt auch wen dazu holen.
David: Ok, ich nehm Felix dazu.
40 Felix: [geht zur Tafel] Das hier sind ja die Zehner: [zeigt] 40 und 50. Das sind die
Einer [zeigt] und das sind die Zehner. [zeigt] [David: "Ja!"] Also 10 plus
42 90 sind gleich? [zu Anika]
Anika: Jaa-ah! [grinsend]
44 L.: Anika. Was hast du gedacht vorher und was denkst du jetzt?
Anika: Ich habe erst gedacht, das wären auch, dass das die Einer wären. Da hab ich
46 mir, mich mit den Zehnern und Einern vertauscht.
L.: Mhm. Ok, gut. [Felix und Anika setzen sich]
48 David 5 plus 5 sind ja 10, [zeigt Einer] aber eine 1 merk ich mir. [schreibt kleine
"1"] Und dann tu ich die 1 dazu, [zeigt Zehner] dann sind's aber wieder 10,
50 dann nehm ich wieder eine 1 dazu und 'ne 0 kommt dann ...
Jana [unterbricht] Hää, aber ... [David: "Oh, jetzt ist ... "]
52 L. Jana? [ermahnend] Meldest du dich ganz normal, ja?
David Ok, Jana.
54 Jana [geht zur Tafel] Das passt dann aber doch wieder nicht, weil, wenn du,
wenn hier 9 sind, ne, 9 [zeigt Hunderter] und dann eh, hast'e ...
56 David Ok, 90.
Jana ... hast'e von hier, von hier hast du ja die Zeh', eh 1 weggenommen [zeigt
58 erst Zehner, dann kleine "1"]. Ist ja ok, aber wenn du jetzt die 1 hierzu tust,
hast du doch gar keine 1 mehr. Warum schreibst du dann da wieder eine 1
60 hin? Wo willst du die denn herholen?
David Weil das da wieder 10 sind. Das war jetzt das, wenn ich 1 dazu tue, dann
62 sind's wieder 10. [zeigt Zehner] [Ricarda: "Ah, ich weiß"]
Jana Meinst du, weil hier wieder 10 rauskommt [zeigt Zehner], die 1 dann hier
64 hin? [zeigt kleine "1" neben der Rechung]
David Ja, da kann man wieder 'ne 1 hinmachen. Das ist doch wieder 10!
66 Jana Ach so. [grinst und setzt sich]

An dieser Stelle rechnet David die Aufgabe noch ausführlich bis zum Ende vor und ist sich sicher, dass sie jetzt korrekt ist. Jonas meldet sich noch. [86] David: "Hast du was dagegen?", [87] Jonas: "Nein!", [88] David: "Und wieso hast du dich dann gemeldet?"

Der Unterricht verläuft auf einem hohen Niveau kognitiver Aktivierung (vgl. Klieme et al., 2001, S. 57). Es sind überwiegend die Schüler selbst, die die sachliche Auseinandersetzung voranbringen. Dies lässt sich nach einer Strukturanalyse der Beiträge in Anlehnung an Walter (2003) auch quantitativ belegen: Während der Lösung dieser Aufgabe geht (vereinfachend ausgedrückt) 44-mal ein Schüler direkt und präzise auf einen Gedanken eines Mitschülers ein und nur 5-mal auf den Gedanken der Lehrerin. Von ihren 13 Beiträgen beziehen sich 7 auf die Unterrichtsorganisation, 6 regen die Schüler zu metakognitiven Aktivitäten an. Übliche Bewertungen der Schülerbeiträge auf Korrektheit sind an keiner Stelle zu finden.

Der Auszug belegt eine hohe Gesprächskultur, ein hohes Maß an gegenseitigem Aufeinandereingehen der Schüler und dem intensiven Gebrauch metakognitiver Werkzeuge. Sjuts sieht einen engen Zusammenhang zwischen dem Austausch von Gedanken und der Förderung von Metakognition:

„Die Förderung von Metakognition (...) [im Klassenverband] bedarf eines bestimmten Unterrichts. Er zeichnet sich aus durch eine stillschweigende Übereinkunft zwischen Lehrperson und Lerngruppe, sich mit den Unterrichtsinhalten tiefgehend und gründlich auseinander zu setzen, durch Diskursivität hinsichtlich Verstehen und Verständigung sowie durch geeignete Aufgabenstellungen." (Sjuts 2003, S. 21)

Nun stellt sich die Frage, ob sich hieraus ableiten lässt, was die Überschreitung der Grenze von „Kommunikation" zur „Diskursivität" charakterisiert.

Unbestritten, aber nicht selbstverständlich ist, dass Schüler sich im Mathematikunterricht beteiligen und miteinander über die Sache kommunizieren [im Transkript Z. 2-8]. Die Grenze zur Diskursivität wird überschritten, wenn Schüler anfangen, sich mit einer gewissen Genauigkeit aufeinander zu beziehen [40-46]. Eine Steigerung ist zu verzeichnen, wenn sie das bewusst auch ohne Anregung der Lehrerin tun [57-64]. Eine letzte denkbare Stufe ist erreicht, wenn das Ganze so festen Vertragscharakter bekäme, dass die Schüler die Einhaltung dieser Regeln selbst fordern und sich bei Nichteinhalten [86] gegenseitig erinnern [88]. Dass sich im Transkript *alle* beschriebenen „Stufen" wiederfinden lassen, belegen die Zeilennummern.

Den Anfangs gestellten Forderungen der Bildungsstandards sowie dem hohen Anspruch an Diskursivität, Nutzung metakognitiver Werkzeuge und Einhaltung eines didaktisch-sozialen Vertrages können bei konsequenter Erziehung in so einer Unterrichtskultur schon Achtjährige gerecht werden.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2003): Unterrichtsqualität: Die Rolle von Diskursivität für „guten" gymnasialen Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2003, 173-180. Hildesheim.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2005): Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht. Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Helmke, Andreas (2003): Unterrichtsqualität erfassen, bewerten, verbessern. Seelze.

Kaune, C. (2001): Merkmale eines konstruktivistischen Unterrichtsskripts und einer Analyse dazugehöriger Lehr- und Lernprozesse. *Der Mathematikunterricht* 47(1), 14-34.

Klieme, E. et al. (2001): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: „Aufgabenkultur" und Unterrichtsgestaltung. In: BMBF, TIMSS - Impulse für Schule und Unterricht, 43-57. Bonn.

Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.) (2006): Kerncurriculum für die Grundschule. Schuljahrgänge 1 - 4. Mathematik. (Anhörfassung Januar 2006)

Sjuts, J. (2003): Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *JMD* 24(1), 18-40.

Walter, P. (2003): Emergenz von kritischer Kompetenz im Schulunterricht verschiedener Fächer (Abschlussbericht des Biqua-Projekts). Berlin.

Martin WINTER, Vechta

„Theorema Pythagoricum“ - Ein lateinischer Beitrag aus dem Jahr 1855 an einem westfälischen Gymnasium

Im Jahresbericht des Gymnasiums „NEPOMUCENIANUM“[1] in COESFELD erschien der Beitrag „THEOREMA PYTHAGORICUM multiplici ratione diversisque argumentis probatum“ mit 21 Beweisen.

1. Zum Hintergrund und zu Quellen des Beitrags

Der Autor JOSEF BUERBAUM unterrichtete ab 1853 Mathematik an dem preußischen Gymnasium, das 1627 durch Jesuiten gegründet wurde. Während des 30-jährigen Krieges wurden die Jesuiten vertrieben, kehrten jedoch 1651 zurück, und die Schule erlebte eine Blütezeit bis zur Aufhebung des Jesuitenordens im 18. Jh. Anfang des 19. Jh. war das NEPOMUCENIANUM vorübergehend bis 1828 nur Progymnasium.

In Jahresberichten wurde die Arbeit an der Schule dokumentiert, sowie auch von Lehrern die Gelegenheit genutzt, sich durch wissenschaftliche Beiträge zu profilieren, oft in lateinischer Sprache. Für Mathematik ist dies in der Mitte des 19. Jh. ungewöhnlich; es mag sein, dass der zunächst „außerordentliche“ Lehrer BUERBAUM seine (alt-)philologische Bildung unter Beweis stellen musste.

BUERBAUM skizziert die Biografie des PYTHAGORAS, und stellt die Beweise als Produkte bisheriger Unterrichtstätigkeit dar. Im Text weist er auch auf VON HOFFMANN[2] als Quelle hin. Für biografische Aussagen bezieht er sich auf CICERO, LIVIUS und VITRUV.

2. Zu ausgewählten Beweisen aus dem Beitrag

„T h e o r e m a. Quadratum lateris angulo recto in triangulo subiecti aequale est summae quadratorum, quae describi in reliquis duobus lateribus possunt.”[3]

So lautet BUERBAUMS Formulierung des Satzes, in der Übersetzung:

„T h e o r e m. Das Quadrat der Seite unter einem Rechten Winkel in einem Dreieck ist gleich der Summe der Quadrate, die durch die beiden übrigen Seiten beschrieben werden können.“

Damit wählt BUERBAUM eine Formulierung der Aussage, die nicht seiner Beschreibung entspricht, wie PYTHAGORAS den Zusammenhang erkannt

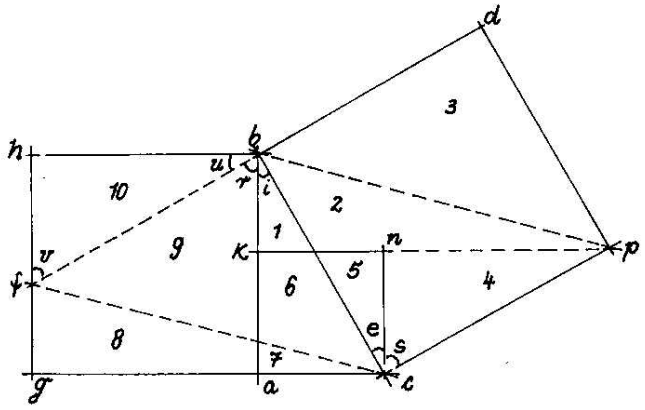
[1] Heute: Städtisches Gymnasium „Nepomucenum“

[2] „JOHANN JOSEPH IGNAZ VON HOFFMANN: Der Pythagorische Lehrsatz: mit zwey und dreyßig theils bekannten theils neuen Beweisen“ (zweite Auflage MAINZ 1821)

[3] Die Zitate stammen alle aus der in WINTER (2005) neu herausgegebenen Quelle.

haben soll, dass bei bestimmten Seitenverhältnissen (bei „$a^2+b^2=c^2$“) der größeren Seite (hier: c) ein Rechter Winkel gegenüber liegt.

Die Beweise selbst werden an unterschiedlichen Beweisfiguren entwickelt. Bei einer großen Anzahl der Beweise stehen dabei kongruenzgeometrische Argumente im Vordergrund, Teilflächen der Quadrate werden verglichen, die Kongruenz von Dreiecken nachgewiesen und als entsprechende „Puzzleteile“ zusammengefügt. Dazu ein Auszug aus dem 5. Beweis:



“D e m o n s t r a t i o
H + 1 = (1 + 2) + 3 + 4 + 5,
G + K + 1 = (7 + 8) + (9 + 6 + 1) + 10 + 5,
Demonstratio facillima omnibus numeris absoluta erit, si ostenderimus, esse $1 + 2 \cong (7 + 8)$, $3 \cong (9 + 6 + 1)$, $4 \cong 10$. .....”[4]

„B e w e i s
H + 1 = (1 + 2) + 3 + 4 + 5,
G + K + 1 = (7 + 8) + (9 + 6 + 1) + 10 + 5.
Der Beweis wird als leichtester der ganzen Liste vollendet sein, wenn wir zeigen werden, dass $1 + 2 \cong (7 + 8)$, $3 \cong (9 + 6 + 1)$, $4 \cong 10$. …..“

Manche Beweise enthalten Argumentationen, die sich abbildungsgeometrisch deuten lassen. Dazu ein Zitat aus dem 9. Beweis:

“.... Iam si applicas triangulum 1 areae 6 imponisque latus bc lateri bf ita, ut b, caput lateris bc, maneat in b, capite lateris bf, caput c lateris bc cadet in caput f lateris bf; cum autem sit i = r, cadet ba in bh et caput eius a in caput h, ……“

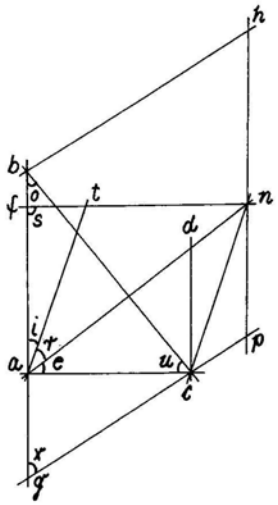
„**….** Wenn man nun das Dreieck 1 auf die Fläche 6 fallen lässt und die Seite bc auf die Seite bf so fällt, dass b, der Anfang der Seite bc in b verbleibt, als Anfang der Seite bf, dann fällt das Ende c der Seite bc auf den Endpunkt f der Seite bf; da aber i = r, fällt ba auf bh und dessen Endpunkt a auf den Endpunkt h, ….“

[4] Etwas ungewohnt: Punkte sind mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet, Teilflächen mit arabischen Ziffern durchnummeriert usw.

Diese „dynamische“ Argumentation ist abbildungsgeometrisch als eine (Rechts-)Drehung um 90° um Punkt b des Dreiecks abc deutbar.

Eine Besonderheit sind Beweise, in denen die Nachweise über Parallelogramme – mit gleicher Grundseite und Höhe wie die entsprechenden Quadrate – geführt werden. Ungewöhnlich ist, dass Parallelogramme dabei durch die Endpunkte einer Diagonalen angegeben werden. Aus dem 20. Beweis eine entsprechende Stelle:

„... Cum ac sit = af, est figura parallelogramma tc = K (E. I, 36); cum ab sit = fn, est fig. parall. ha = G …. Constructione praeterea constat, esse figuram parallelogrammam gh = H, est enim eius basis, gp = bh (E. I, 34) = bc et altitudo bc. ….“



„… Da ac=af ist, ist das Parallelogramm tc=K (E. I, 36); da ab=fn ist, ist das Parallelogramm ha=G… Durch die Konstruktion steht außerdem fest, dass das Parallelogramm gh=H ist, seine Basis ist nämlich gp=bh (E. I, 34) =bc und die Höhe bc.“ [5]

3. Themen im Umfeld des Beitrags

Die Auseinandersetzung mit dem mathematischen Beitrag liefert Anlässe zur Beschäftigung mit Themen im Umfeld:

Charakteristika des lateinischen Textes

Neben Besonderheiten wie in den Beispielen fallen auch sprachliche Elemente in den Beweisschritten auf, z. B. *„Ex quo cogitur“* - *„woraus man schließt“*, einzelne Floskeln für Folgerungen, wie *„Quare est“* - *„daher gilt“*, bis hin zu üblichen Hinweisen auf die Leichtigkeit: *„Quod facile est cognitu“* - *„was leicht zu erkennen ist“*. Weitere philologische Aspekte kann das Fach Latein aufgreifen.

Rolle der lateinischen Sprache: Kulturhistorische Aspekte

Latein war universelle wissenschaftliche Verständigungssprache. Noch für das Abitur im 19. Jh. wurden erhebliche Anforderungen an lateinische

[5] Unterstreichungen von mir; die Angaben „(E. I, 34)“ und „(E. I, 36)“ beziehen sich auf die Sätze 34 und 36 im 1. Buch des EUKLID.

Sprachkenntnisse gestellt. Philologische Bildung gehörte zum Selbstverständnis eines humanistischen Gymnasiums. Demgegenüber hat sich die heutige Bedeutung des Lateinischen gewandelt.

Der Mathematikunterricht am Gymnasium des 19. Jahrhunderts

Mathematikunterricht hatte nach den SÜVERN'schen Reformen von 1816 einen Umfang wie nie zuvor. Danach allerdings ging der Anteil zugunsten der altphilologischen Fächer wieder erheblich zurück.

Geschichtliche Betrachtungen zum SATZ DES PYTHAGORAS

Zum Leben des PYTHAGORAS gibt schon der Vorspann bei BUERBAUM Hinweise. Kulturelle und historische Aspekte bieten sich zur Ergänzung an. Ebenso sind die Geschichte der Aussage des Satzes, die Wege seiner Überlieferung und sein Auftreten in unterschiedlichen Kulturkreisen von Interesse.

Zum SATZ DES PYTHAGORAS: Logische Zusammenhänge

Schon das „Theorem" bei BUERBAUM fordert die Frage nach der Umkehrung heraus. Die „Satzgruppe des Pythagoras" bietet sich zur Untersuchung wie die unterschiedlichen Beweistypen. Verallgemeinerungen bezüglich ähnlicher Figuren über Katheten und Hypotenuse können die Thematik noch erheblich ausweiten.

4. Formen der Verwendung im Unterricht

In **fächerübergreifenden Projekten** können neben Mathematik und Latein auch Deutsch, Geschichte, Philosophie und Erziehungswissenschaft einbezogen werden. Ausgewählte Elemente können in **Facharbeiten** auf unterschiedlichem Reflexionsniveau bearbeitet werden. Als **ergänzendes Unterrichtsmaterial** können Auszüge aus dem lateinischen Text (auch mit Übersetzung) als Arbeitsvorlagen für unterschiedliche Aufgaben dienen.

5. Resümee

BUERBAUMS „THEOREMA PYTHAGORICUM" stellt einen anspruchsvollen Unterrichtsgegenstand dar, an dem Kenntnisse angewendet und vertieft werden können, der den Horizont über die Fachgrenzen hinaus erweitert und Einblicke in kulturhistorische Zusammenhänge gibt.

Literaturhinweis:

WINTER, MARTIN (Hrsg.) (2005): Theorema Pythagoricum. Vechtaer fachdidaktische Forschungen und Berichte, Heft 12[6], Vechta.

[6] Zu beziehen über: Hochschule Vechta, IfD/Mathematik, Postfach 1553, 49364 Vechta

Erich Ch. WITTMANN, Dortmund

Mathematische Frühförderung vom Fach aus

Das Projekt „mathe 2000“ wurde vor 20 Jahren mit dem Ziel gegründet, das Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Abitur im Zusammenhang zu erforschen und aus einem Guss zu entwickeln. Die Projektarbeit erstreckte sich in den ersten 15 Jahren auf die Grundschule. Für diesen Bereich liegt das Konzept im „Handbuch produktiver Rechenübungen“ (Wittmann/Müller 1990/1992) und im Unterrichtswerk „Das Zahlenbuch“ (Wittmann/Müller 2004/05) vollständig ausgearbeitet vor. Die bei dieser Entwicklungsarbeit gemachten Erfahrungen bildeten die Grundlage für die Ausdehnung des Ansatzes auf die Frühförderung, die gegenwärtig im Zentrum der Projektarbeit steht und Gegenstand dieses Beitrags ist.

1. Grundkonzeption von „mathe 2000“

Der Ansatz von „mathe 2000“ zum Mathematiklernen stützt sich auf fünf Prinzipien, mit denen eine Verbindung von „Fach“ und „Kind“ angestrebt wird wie von Dewey (1902/1976) schon vor 100 Jahren gefordert:

(1) Konzentration auf tragende mathematische Grundideen und Sparsamkeit in Anschauungs- und Darstellungsmitteln

(2) Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen

(3) Produktives und automatisierendes Üben

(4) Förderung von Kindern mit unterschiedlichen Voraussetzungen und Interessen im gemeinsamen Unterricht (natürliche Differenzierung)

(5) Systemische Qualitätssicherung

Leitlinie ist die Auffassung von Mathematik als „Wissenschaft von Mustern“ (Wittmann 2003). Diese mathematische Fundierung zeigt sich nicht nur im ersten Prinzip, sondern durchzieht alle Prinzipien.

2.1 Grundsätzliche Überlegungen zur mathematischen Frühförderung

In der Psychologie und der Mathematikdidaktik wurden im Laufe der letzten 100 Jahre umfangreiche empirische Belege dafür gesammelt, dass Kinder bereits bei ihrer Geburt mit mathematischen Grundstrukturen ausgestattet sind und diese im Verlauf ihrer ersten Lebensjahre stetig

entwickeln, und zwar umso besser, je förderlicher die soziale Umgebung der Kinder ist. Dass eine mathematische Frühförderung sinnvoll und notwendig ist, steht daher seit langem fest, ist aber erst in der Diskussion um PISA ins öffentliche Bewusstsein gerückt (Hasemann 2005).

Ob die Entwicklung von Lernumgebungen für die mathematische Frühförderung nach den auf die „wohlverstandene" Mathematik bezogenen Prinzipien von „mathe 2000" überhaupt möglich ist, erscheint auf den ersten Blick fraglich, da die Auffassung von Mathematik als „Wissenschaft von Mustern" dem kindlichen Denken fremd zu sein scheint. Dieser Eindruck täuscht jedoch. Tatsächlich gab es bereits im 19. und 20. Jahrhundert Materialien, die diesen Prinzipien voll entsprechen und als Vorbild dienen können. Wegen ihrer pädagogischen Fundierung sind die Spielgaben von Friedrich Fröbel (Hoof 1977) und die Kinderbücher von Marion Walter für die geometrische Früherziehung hervorzuheben.

Die konstruktive Aufgabe der mathematischen Frühförderung im Rahmen von „mathe 2000" besteht darin, reale Verkörperungen mathematischer Strukturen bzw. kleine mathematische Modellwelten zu entwickeln, an denen die Kinder mathematische Muster erforschen und Grundwissen erwerben können. Die Motivation erfolgt in diesem Konzept aus dem Fach heraus, was die Materialien von „mathe 2000" grundlegend von anderen Materialien zur Frühförderung unterscheidet.

Als geeignete Form von Lernumgebungen für die Früherziehung bietet sich das mathematisch fundierte, zielgerichtete Spiel an. Wie bereits Friedrich Fröbel genau erkannt und beschrieben hat, entspricht das Spiel sowohl dem Wesen der Mathematik als auch dem Wesen des kindlichen Lernens. Zielgerichtete mathematische Spiele bieten einen natürlichen Rahmen für aktiv-entdeckendes und soziales Lernen, für produktives Üben und für natürliche Differenzierung. Die Wiederholung und Variation kognitiver Aktivitäten, die im Spiel stattfindet, führt zu einem ständigen Feedback und zur Verbesserung der Kenntnisse über Zahlen und Formen. Damit ist eine systemische Qualitätssicherung gewährleistet.

2.2 Praktische Umsetzung der Konzeption

Der Entwicklungsforschung im Projekt „mathe 2000" für den Vor- und Grundschulbereich liegen die in folgender Tabelle aufgelisteten Grundideen der Arithmetik und der Geometrie zugrunde, von denen jeweils die beiden letzten auf Anwendungen ausgerichtet sind. Für die Früherziehung scheiden die arithmetischen und geometrischen Grundideen 4 und 7 vollständig aus, die Grundideen 3 haben nur geringe Bedeutung.

Grundideen der Arithmetik	*Grundideen der Geometrie*
1. Zahlenreihe, Anzahlbegriff	1. Formen und ihre Konstruktion
2. Rechnen, Rechengesetze, Rechenvorteile	2. Operieren mit Formen
3. Zehnersystem	3. Koordinaten
4. Rechenverfahren	4. Maße und Formeln
5. Arithmetische Muster	5. Geometrische Muster
6. Zahlen in der Umwelt	6. Formen in der Umwelt
7. Übersetzung realer Situationen in die Sprache der Arithmetik	7. Übersetzung realer Situationen in die Sprache der Geometrie

Die ersten beiden Themenblöcke im „Zahlenbuch“ sind der Entwicklung des Zahlbegriffs und der strukturierten Anzahlerfassung gewidmet. Um einen schlüssigen Übergang vom Kindergarten zur Grundschule zu gewährleisten, wurden als Vorstufe für diese beiden Themenblöcke zwei Bände des „kleinen Zahlenbuchs“ entwickelt. Außer mathematischen Spielen enthalten diese Bände auch Bilder, die zum Zählen und zur Anzahlbestimmung auffordern (arithmetische Grundideen 1, 2, 3, 5, 6).

An zwei Beispielen soll die praktische Umsetzung des Ansatzes in Spiele illustriert werden.

In Müller/Wittmann 2002 findet sich das Spiel *„Volles Haus“*: Für jeden der beiden Spieler wird ein Spielplan mit einem Haus benötigt. Jedes Haus hat 6 Zimmer, die von 1 bis 6 nummeriert sind. Die Kinder würfeln abwechselnd und dürfen ein Plättchen in das Zimmer ihres Hauses legen, dessen Nummer der Würfel anzeigt – falls dieses Zimmer nicht schon besetzt ist. Dieses sehr einfache Spiel schult für die ersten sechs Zahlen die Beziehung zwischen Zahlname, Würfelbild und Ziffer.

Das Partnerspiel *„Versteckt – entdeckt“* (Müller/Wittmann 2004) fördert die strukturierte Erfassung von Anzahlen bis 6. Als Spielmaterial dienen 24 Karten, auf denen je 1 bis 6 Käfer, Bienen, Ameisen und Schmetterlinge in unterschiedlicher Anordnung abgebildet sind. Die Karten werden auf den Tisch gelegt, ein Kind schließt die Augen, das andere verändert den Platz der Karten und dreht einige Karten um. Das andere Kind öffnet dann die Augen und muss herausfinden, welche Karten „versteckt“ wurden. Im Spiel lernen die Kinder Anzahlen immer schneller auf einen Blick zu sehen, wie es der Intention des Spieles entspricht.

In Übereinstimmung mit dem Prinzip des aktiv-entdeckenden Lernens ist es Aufgabe der Erzieherinnen, die Kinder in die Spiele einzuführen sowie beim Spielen von Zeit zu Zeit zu beobachten und zu begleiten. Wichtig ist

es, dass Erwachsene, wenn sie mit Kindern spielen oder sie beobachten, keinerlei Wertungen „falsch/richtig“ vornehmen, sondern nur auf die Einhaltung der Regeln achten und Anregungen geben, am besten in Form von Fragen. Die Einführung und Begleitung kann in gewissem Umfang gut auch von älteren Kindern übernommen werden.

3. Institutionelle Rahmenbedingungen

Damit der in den „mathe 2000“-Materialien realisierte Übergang vom Kindergarten zur Grundschule in der Praxis wirklich bruchlos verläuft, bedarf es einer engen und vertrauensvollen Zusammenarbeit zwischen Kindergärten und Grundschulen. Dabei müssen die Eigenheiten der beiden Bildungsbereiche beachtet werden. Es ist weder sinnvoll, die Grundschule in den Kindergarten vorzuverlegen, noch den Kindergarten in die Grundschule hinein zu verlängern. Für die Mathematikdidaktik stellt sich die große Aufgabe, Erzieherinnen und Erzieher in ihrer Aus- und Fortbildung unter Respektierung ihrer besonderen Fähigkeiten und Erfahrungen mit mathematischen Grundlagen vertraut zu machen. Hier besteht ein besonders großer Nachholbedarf.

Literatur

Dewey, John (1902/1976): The Child and the Curriculum. In: Boydston, Jo A. (Ed.): The Middle Works, 1899-1924. Vol. 2, pp. 271-291. Carbondale: Southern Illinois University Press

Hasemann, Klaus (2005): Ordnen, Zählen, Experimentieren –Mathematische Bildung im Kindergarten. In Weber, S. (Hg.), Die Bildungsbereiche im Kindergarten, Freiburg: Herder, 181- 205

Hoof, Dieter (1977): Handbuch der Spieltheorie Fröbels. Braunschweig: Westermann

Müller, Gerhard N. /Wittmann, Erich Ch. (2002/2004). Das kleine Zahlenbuch. Band 1: Spielen und Zählen, Band 2: Schauen und Zählen. Seelze: Kallmeyer

Müller, Gerhard N. /Wittmann, Erich Ch. (2006). Das kleine Formenbuch. Band 1: Legen, Bauen, Spiegeln. Band 2: Falten, Bauen, Zeichnen. Seelze: Kallmeyer

Müller, Gerhard N. /Wittmann, Erich Ch. (2004/05). Das Zahlenbuch. Leipzig: Klett

Wittmann, Erich Ch. (2003): Design von Lernumgebungen zur mathematischen Frühförderung. In Faust, G. u.a. (Hg.). Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich. Bad Heilbrunn: Klinkhardt 2003, 49-63

Wittmann, Erich Ch. (2003): Was ist Mathematik und welche Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht der Grundschule? In: Baum, Monika / Wielpütz, Hans (Hg.): Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. Seelze: Kallmeyer, 18 – 46

Wittmann, Erich Ch. (2006). Mathematische Bildung. In: Fried, L./ Roux, S. (Hg.) (2006): Pädagogik der frühen Kindheit. Weinheim: Beltz