Benjamin ROTT, Hannover

Heurismen in den Problembearbeitungsprozessen von Fünftklässlern

Problemlösen spielt eine zentrale Rolle in der Mathematik und ist daher – nicht nur wegen curricularer Vorgaben – auch für Unterricht von großer Bedeutung. Im Gegensatz zu Routineaufgaben, für deren Bearbeitung Algorithmen herangezogen werden können, lassen sich Problemaufgaben durch eine personenspezifische Barriere kennzeichnen. Eine wichtige Rolle in Problemlöseprozessen spielen in diesem Zusammenhang **Heurismen** (Schoenfeld 1985, S. 44 f.), wobei es sich um „Methoden und Regeln von Entdeckung und Erfindung“ (Pólya 1949, S. 118) wie *Rückwärtsarbeiten* oder *Suche nach ähnlichen Aufgaben* handelt. Eine präzise Definition dessen, was ein Heurismus ist, findet sich nicht in der Literatur und ist vermutlich auch nicht möglich. Kilpatrick hat deswegen vorgeschlagen:

> „Let us forego such precision, therefore, and define a heuristic as any device, technique, rule of thumb, etc. that improves problem-solving performance. We consider heuristics to be typically provisional, without guarantee of effectiveness […].” (Kilpatrick 1967, S. 19)

Verschiedene Studien haben einen (wenn auch oft geringen) Zusammenhang zwischen dem Einsatz von Heurismen und dem Erfolg beim Problemlösen nachgewiesen (Zusammenfassung bei Schoenfeld 1985, S. 71 ff.).

Die Studie

In diesem Artikel möchte ich mich den folgenden beiden Fragen widmen:

- Verwenden Fünftklässler, die im Problemlösen nicht geschult wurden, Heurismen?
- Inwiefern hängt der Einsatz heuristischer Elemente mit dem Erfolg beim Problemlösen von Schülern zu Beginn der Sek. I zusammen?

Zur Beantwortung dieser Fragen dienen Videoaufnahmen aus den ersten vier Halbjahren (Ende 2008 bis Mitte 2010) der „Mathe AG an der Leibniz Universität“ (MALU). Es handelt sich bei MALU um ein Enrichment-Projekt für interessierte Fünftklässler Hannoveraner Gymnasien. Die Schüler arbeiteten etwa die Hälfte der 90-min. AG-Zeit in Paaren an Problemaufgaben. Drei der Aufgaben werden im Folgenden betrachtet (s. Tab. 1).

Methoden

Produktbewertung: Die Bearbeitungsergebnisse unserer Schüler wurden in vier Erfolgskategorien eingeteilt, die für die einzelnen Probleme konkretisiert wurden: (1) *Kein Ansatz*, wenn überhaupt kein sinnvoller Ansatz festgestellt werden konnte. (2) *Einfacher Ansatz*, wenn das Problem zu Teilen richtig bearbeitet wurde. (3) *Erweiterter Ansatz*, wenn das Problem zu großen Teilen korrekt bearbeitet wurde. Und (4) *Korrekter Ansatz*, wenn das Problem vollständig begründet gelöst wurde.

Diese Kategorien wurden für jede Aufgabe einzeln operationalisiert und die Produkte wurden von unabhängigen Ratern eingeteilt (Cohens $\kappa = .87$ bzw. $\kappa = .91$ bzw. $\kappa = 1.0$ für die drei Aufgaben); bei voneinander abweichenden Bewertungen wurde eine Einigung erzielt (*konsensuelle Validierung*).

Zwei Bierdeckel	**Marcos Zahlenreihe**	**Ach ja, das Schachbrett...**
Die beiden unten stehenden Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt. Untersuche die Größe der Fläche, die von **beiden** Bierdeckeln überdeckt wird! [In der Abb. ist diese Fläche rot gekennzeichnet.]	Marco möchte alle Zahlen von 1 bis 15 so in die 15 Kästchen schreiben, dass die Summe von jedem Paar benachbarter Zahlen eine Quadratzahl ergibt: Stehen beispielsweise in drei aufeinander folgenden Kästchen die Zahlen 10, 6, 3, so ergibt die 6 sowohl mit der 10 in dem linken Nachbarkästchen (10+6=16) als auch mit der 3 in dem rechten Nachbarkästchen eine Quadratzahl (6+3=9).	Peter spielt leidenschaftlich gerne Schach. Er spielt so gerne Schach, dass seine Gedanken auch dann um das Spiel kreisen, wenn er gerade gar nicht spielt. Neulich stellte er sich die Frage, wie viele Quadrate wohl auf einem Schachbrett zu finden sind. Versucht, Peters Frage zu beantworten!

Tabelle 1: Aufgabenstellungen [ohne die zugehörigen Abbildungen]

Prozesskodierung: Die Identifikation der Heurismen erfolgte zweischrittig: Da es keine präzise Definition des Begriffs „Heurismus" gibt (s.o.), wurde zunächst ein qualitativer Ansatz gewählt. In Zusammenarbeit mit einem Masterstudenten wurden alle Prozesse zu den oben genannten Aufgaben gesichtet (insgesamt etwa 930 Minuten Videomaterial). Dabei wurden alle Aktionen der Schüler herausgeschrieben, bei denen es sich um Problemlösetechniken, Faustregeln etc. handelte (*induktiver* Ansatz). Zusätzlich haben wir die Prozesse auf heuristische Tätigkeiten, wie sie in der Literatur beschrieben werden, untersucht (*deduktiver* Ansatz). Aus diesen Prozessmitschriften wurden Charakterisierungen für Heurismen der ausgewählten Aufgaben abgeleitet (siehe Tab. 2).

Nach diesem qualitativen Ansatz dienten die Charakterisierungen als Manual, auf dessen Basis mehrere Hilfskräfte die Prozesse unabhängig voneinander mit guter Interrater-Übereinstimmung kodiert haben. Die Ergebnisse dieses Kodierprozesses bilden die Basis der folgenden Auswertungen.

Kode	Beschreibung	Beispiele
Informative Figur	Das Anfertigen einer Skizze, eines Diagramms oder eines Graphen.	**[Bierdeckel]** Das Zeichnen möglicher Konfigurationen der beiden Quadrate. **[Schachbrett]** Das Zeichnen eigener (evtl. kleinerer) Schachbretter.
Spezialfall	Betrachten von besonderen Fällen oder Werten, z.B. Einsetzen von Werten wie 0 oder 1 in Gleichungen.	**[Bierdeckel]** Positionen der zwei Quadrate zueinander, in denen ersichtlich ist, dass die gesuchte Fläche ¼ beträgt.

Tabelle 2: Auszug aus dem Heurismen-Kodiermanual

Ergebnisse

Die Beantwortung der ersten Forschungsfrage, ob unsere Fünftklässler als untrainierte Problemlöser Heurismen verwenden, konnte bereits bei der Erarbeitung der Prozesskodierung (s.o.) positiv beantwortet werden. Im Rahmen dieses Artikels fehlt leider der Platz für eine ausführliche Darstellung. Zum Zusammenhang zwischen dem Heurismeneinsatz und dem Erfolg beim Problemlösen (2. Forschungsfrage) sind unterschiedliche Hypothesen denkbar: Zu erwarten wäre einerseits eine (grob) lineare Beziehung der Art „je mehr Heurismen, desto größer die Erfolgswahrscheinlichkeit". Andererseits könnten Schüler, die keinen Zugang zu einer Problemaufgabe finden, erfolglos einen Heurismus nach dem anderen ausprobieren – dies spräche dann eher für einen umgekehrt-u-förmigen Zusammenhang.

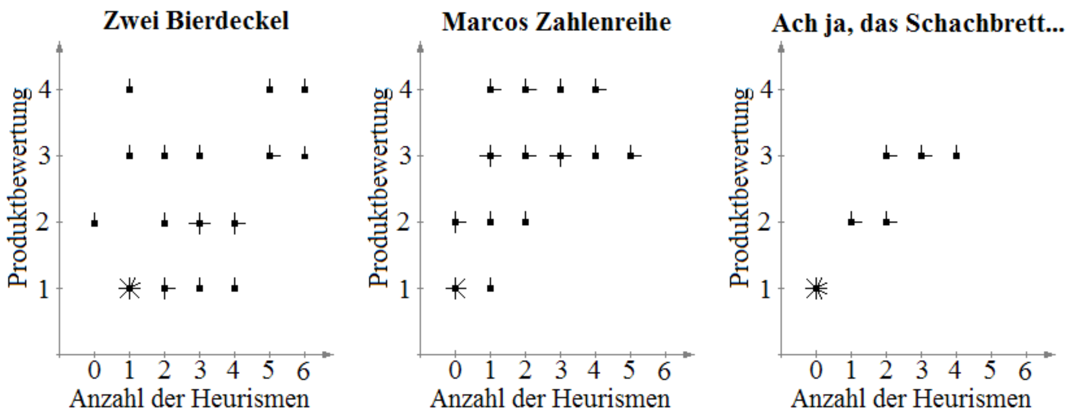

Abbildung 1: Die Zahl der Striche an den Punkten steht für die jeweilige Schüleranzahl

Abb. 1 zeigt die Anzahl der Heurismen im Vergleich zum Bearbeitungserfolg in einem Streudiagramm. Die Daten sprechen für (schwache) lineare Zusammenhänge, die durch die Berechnung der Korrelationskoeffizienten r_s (s. Tab. 3) bestätigt werden.[1] Gegen einen umgekehrt-u-förmigen Zu-

[1] Da die Produktbewertung nur ordinalskaliert vorliegt, wurde die Rangkorrelation nach Spearman ermittelt – im Gegensatz zur Produkt-Moment-Korrelation nach Pearson.

sammenhang in dieser Stichprobe sprechen zudem die Mittelwerte x der verwendeten Heurismen je Bewertungskategorie (s. Tab. 3) und die Tatsache, dass die Schüler mit einer großen Anzahl an Heurismen allesamt erfolgreich (Kategorie 3/4) waren. Dennoch gibt es, wie zu erwarten war, keine strikte „je mehr, desto besser"-Regel für den Heurismeneinsatz. Einige Schüler verwendeten von Anfang an eine zielführende Technik und lösten die Aufgabe damit, wohingegen andere auch durch den Einsatz verschiedener Heurismen keinen Erfolg bei der Bearbeitung erzielen konnten.

Zwei Bierdeckel	#	**Zahlenreihe**	#	**Schachbrett...**[2]	#
$x_{kat1} = 1{,}57$ $x_{kat2} = 2{,}89$ $x_{kat3} = 3{,}67$ $x_{kat4} = 4{,}00$	14 9 6 3	$x_{kat1} = 0{,}14$ $x_{kat2} = 0{,}60$ $x_{kat3} = 2{,}62$ $x_{kat4} = 2{,}43$	7 5 13 7	$x_{kat1} = 0{,}00$ $x_{kat2} = 1{,}50$ $x_{kat3} = 2{,}80$ x_{kat4} = ---	10 4 5 0
$x_{ges} = 2{,}56 \pm 1{,}66$	32	$x_{ges} = 1{,}72 \pm 1{,}58$	32	$x_{ges} = 1{,}05 \pm 1{,}31$	19
$r_s = 0{,}54$ ($p < 0{,}01$)		$r_s = 0{,}63$ ($p < 0{,}001$)		$r_s = 0{,}97$ ($p < 0{,}001$)	

Tabelle 3: Mittelwerte und Korrelationskoeffizienten zum Heurismeneinsatz

Diskussion

Die Ergebnisse zeigen, dass bereits junge Schüler – ohne entsprechendes explizites Training – Heurismen verwenden und dass ihre Problemlöseleistung davon profitiert. Dies ist auch für den Schulunterricht interessant, da entsprechende Trainingsprogramme nicht bei Null beginnen müssen, sondern auf dem Vorwissen aufbauen können. Vygotski spricht hier von der Zone der nächsten Entwicklung, die das Potential betrachtet, das in den bereits vorhandenen Fähigkeiten liegt (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 113). Geplant sind weitere (qualitative) Auswertungen, die den Fokus darauf legen, welche Heurismen tatsächlich hilfreich bei der Überwindung bestimmter Schwierigkeiten („Problembarrieren") sind.

Literatur

Bruder, Regina & Collet, Christina (2011): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Kilpatrick, Jeremy (1967): *Analyzing the solutions of word problems in mathematics: An exploratory study*. Unpublished doctoral dissertation, Stanford University.

Pólya, George (1949): *Schule des Denkens*. Tübingen: Francke.

Schoenfeld, Alan H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

[2] Ohne die 10 Bearbeitungen aus Kategorie 1 (Antwort: „64 Quadrate"), in denen das Problem als Routineaufgabe interpretiert wurde, lauten $x_{ges} = 2{,}22$ und $r_s = 0{,}73$ ($p < 0{,}05$), was von den Größenordnungen gut zu den anderen beiden Aufgaben passt..