Willi DÖRFLER, Klagenfurt

Was und wie wird in der Mathematik konstruiert?

In der Mathematik wird an vielen Stellen von Konstruktionen und vom Konstruieren gesprochen und je nach Kontext hat das sehr unterschiedliche Bedeutung und verschiedenen Charakter. Manchmal geht es um die Berechnung eines zunächst unbekannten mathematischen Objekts, dann wieder um den Entwurf ganz neuer Objektbereiche (wie etwa bei der „konstruktiven" Einführung der hyperreellen Zahlen). Die Redewendung „Wir bilden …" gehört auch zu diesem offensichtlich sehr inhomogenen und diffusen Sprachgebrauch. Ohne den Anspruch, damit allen Varianten des Konstruierens in der Mathematik gerecht zu werden, werde ich hier drei verschiedene Typen skizzieren, die sich hinsichtlich des Gebrauchs von Zeichen und Diagrammen (vgl. Dörfler, 2006) beim Konstruieren unterscheiden lassen.

Meine Grundposition hier ist, dass Mathematik als Tätigkeit und Gegenstand von Menschen gemacht wird und diese dabei Zeichen (im Sinne von Peirce) als Mittel der Tätigkeit benutzen und damit wieder Zeichen (meistens Diagramme) produzieren. Damit grenze ich mich ab von Sichtweisen (etwa bei Piaget, Brouwer, aber auch Glasersfeld), in denen die Mathematik auf geistigen/mentalen aber zeichenfreien Konstruktionen beruht, die im Individuum zu kognitiven Strukturen führen. Diese benötigen die Zeichen nur zur Darstellung, Beschreibung und Kommunikation (mathematische Objekte sind also demnach primär mentale Objekte). Ebenfalls primär deskriptive Qualität haben Zeichen und Zeichenkonstruktionen in realistischen/platonistischen Philosophien, in denen Zeichen Beschreibungen der von ihnen kategorisch verschiedenen Objekte sind. Es kann dann auch kein Objekt konstruiert werden, wir konstruieren nur deren Darstellungen (die dann allerdings auch unzutreffend sein können). Ich halte es hier mit Wittgenstein, dass mathematische Zeichen nicht deskriptiv sind und ihre Bedeutung im Gebrauch liegt (vgl. Mühlholzer, 2008). Ferner schließe ich aus, dass mathematische Konstruktionen über die Zeichen hinaus etwas bewirken: Das Schreiben von Strichlisten erschafft keine (abstrakten) natürlichen Zahlen. Wenn also mathematische Zeichen auf etwas referieren, dann sind dies wieder mathematische Zeichen.

Sehr häufig findet man in der Mathematik die Situation, dass innerhalb eines gegebenen Zeichensystems (z.B. Dezimalzahlen; elementare Algebra) nach den Regeln des Systems aus gegebenen Zeichen (Symbolen, Diagrammen) ein gesuchtes Zeichen ermittelt, also in gewissem Sinne konstruiert wird. Jede gewöhnliche Rechnung ist von dieser Art, ebenso das Lösen von Gleichungen. Eine übliche Redeweise dazu ist, dass das gesuchte mathematische Objekt bereits existiert und es eben nur mehr berechnet werden muss. Es entstehen dabei zwar neue Zeichen, die aber strukturell und vom Typ her bereits im Zeichensystem angelegt sind. Man bestimmt nur das spezielle Zeichen, das durch die gesetzten Bedingungen (etwa eine Gleichung) und die Regeln des Zeichensystems (Rechenregeln) festgelegt wird. Geometrische Konstruktionen gehören auch in diese Kategorie der „systemimmanenten“ Konstruktionen.

Das Interesse in diesem Beitrag liegt demgegenüber auf Konstruktionen „neuer“ mathematischer Gegenstandsbereiche. Neu bezieht sich dabei nicht vorrangig auf den historischen Prozess der Entwicklung von Mathematik, sondern darauf, wie Mathematik präsentiert und vermittelt wird, also durchaus eine didaktische Sicht. Metaphorisch ausgedrückt: wie lernen Lernende „mathematische Objekte“ kennen, was erfahren sie wodurch über diese. Natürlich stehen dahinter auch allgemeine epistemologische Fragen, etwa: wie „verweisen“ Zeichen /Diagramme in der Mathematik, wie gewinnen sie Bedeutung etwa im Lernprozess, vgl. dazu auch Dörfler (2011). Wie schon erwähnt, entsteht Neues (insbesondere für Lernende) in der Mathematik vorwiegend in der Form neuer Zeichen/Diagramme. Die folgende Unterscheidung richtet sich nach der Verwendungsform dieser Diagramme.

Die erste Art von Konstruktion (Diagramme als Objekte) ist dadurch charakterisiert, dass ein Diagrammsystem entworfen wird zusammen mit Regeln, nach denen mit den Diagrammen operiert (gerechnet) werden soll. Die neuen mathematischen Objekte treten als eine Art von Schreibfiguren auf, denen auch eine wahrnehmbare Struktur zukommt: so sollen wir schreiben und rechnen. Meist verwenden solche Entwürfe bereits konstruierte Diagrammsysteme, auf deren Objekte mittels Indizes verwiesen wird. Dabei kann es sich um ein umfangreiches Diagrammsystem (Schreibfiguren eines gewissen Typs) oder um einzelne Diagramme (meist als Formeln) handeln innerhalb eines umfassenderen Diagrammsystems. Für den ersten Fall sind reelle Matrizen ein illustratives Beispiel: eine Klasse von Schreibfiguren (Inskriptionen) mit verschiedensten “Rechenoperationen“ (vgl. Dörfler, 2007), durch die erstere zu mathematischen Objekten werden, deren Eigenschaften und Beziehungen innerhalb dieses Diagrammsystems „Matrizen“ untersucht werden (stets durch Operationen mit den Diagrammen/Schreibfiguren). Hier wird besonders deutlich, dass keine Veranlassung besteht, den mathematischen Diagrammen eine deskriptive Funktion durch Referenz zuzuschreiben. Die Bedeutung ist intern gegeben durch die Struktur der Schreibfiguren und die auf sie anwendbaren/vereinbarten Operationen. Deskriptive Verwendungen finden Matrizen (oder Diagramme als mathematische Objekte ganz allgemein) in den Anwendungen. Diagramme als mathematische Objekte beschreiben (nur) sich selbst. Andere Beispiele für diesen Typ von Konstruktionen sind: komplexe Zahlen, Dezimalzahlen, Quaternionen, Polynome, n-tupel aller Art (etwa auch endliche Körper), negative Zahlen, Polyominoes (siehe Golomb, 1994), lateinische Quadrate, (Beispiele für) endliche Geometrien, figurative Zahlen, didaktische Mittel wie Zahlenmauern. Obwohl hier die mathematischen Objekte gewissermaßen wahrnehmbar, mitteilbar und mit materieller Existenz versehen sind, ist die Nachkonstruktion durch Lernende ein aufwendiger Lern-, Übungs- und Gewöhnungsprozess, der (emotionale und intellektuelle) Zustimmung und Akzeptanz erfordert. Motivation und Legitimation können über Anwendungen entstehen, aber auch aus der Einladung zu einem komplexen Spiel mit den Diagrammen und Regeln zur Erforschung von Konsequenzen aus diesen. Das gilt auch für den anderen Fall, wo einzelne mathematische Objekte durch ein Diagramm (meist in einem System) konstruiert/entworfen werden. Ein Beispiel dafür ist die Definition der Exponentialfunktion (oder von sin, cos, etc.) als unendliche Reihe (reell oder komplex). Mit Diagrammen als Schreibfiguren (reguliert durch konsistente Operationsregeln) können also Typen von mathematischen Objekten (Matrizen, Quaternionen) oder einzelne Objekte (exp) konstruiert werden. Diese diagrammatische Konstruktion dominiert in der Schulmathematik.

Bei der zweiten Art der Konstruktion (Diagramme als Eigenschaften) mathematischer Objekte werden diese nicht als manipulierbare Diagramme sondern durch Eigenschaften festgelegt, wobei letztere in der Form manipulierbarer Diagramme vereinbart werden. In dieser wird auf die Objekte durch Indizes verwiesen (vgl. Dörfler, 2011). Beispiele sind die Definitionen für Stetigkeit oder Differenzierbarkeit (reeller) Funktionen. Mit stetigen Funktionen wird darin und auch in anschließenden Sätzen und Beweisen nicht direkt operiert, sondern es werden mittels der Diagramme Beziehungen zwischen den jeweiligen Eigenschaften hergestellt (etwa: aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit). Die Objekte selbst sind also nicht mehr „sichtbar“. Im Unterschied etwa zu den komplexen Zahlen gibt es kein Diagramm für den Objekttypus „stetige Funktion“. Wir können nur Beispiele angeben, an denen aber die jeweilige Eigenschaft nicht „wahrnehmbar“ ist, sondern durch Rechnung überprüft werden muss. Es zeigt sich hier ein qualitativer, kategorischer Unterschied, der sicher auch für Lernprozesse von Relevanz ist (Schlagworte: Unanschaulichkeit, Abstraktion; anschaulich sind nur mehr die Diagramme für die Eigenschaften): Die Objekte selbst bekommt man nicht mehr „in den Griff“. Andere Beispiele: konvergente Folge; Festlegung von „neutrales Element“ oder „inverses Element“ in der

Algebra; (formale) Axiomensysteme (etwa: Halbgruppe, Gruppe, Vektorraum).

Bei der dritten Konstruktionsart (narrative Konstruktion) geht es typischerweise um die Bildung/Konstruktion neuer mathematischer Objekte durch die Zusammenfassung von bereits auf einem der skizzierten Wege konstruierten Objekten eines bestimmten Typs. Dies ist der Fall, wenn wir von allen natürlichen, ganzen, reellen, komplexen Zahlen sprechen, also von den Objekten N, Z, R, C. Diese „Konstruktionen" erfolgen nun in keiner Weise mehr durch Diagramme sondern in rein sprachlicher Form nach einem Muster, das man als Sprechakt auffassen kann. Das sind (nach Austin oder Searle) sprachliche Handlungen, die nicht deklarativ sind (keine Aussagen machen), sondern soziale Vereinbarungen bewirken und damit eine soziale Wirklichkeit schaffen (für die, die ihnen zustimmen; Beispiele sind Versprechen und Verträge). Die Bedeutung von Zustimmung und Akzeptanz auf Seiten der Lernenden gewinnt daher hier dramatische Bedeutung. Wichtige Beispiele sind alle Konstruktionen durch Äquivalenzklassenbildung, wie etwa der rationalen Zahlen, der reellen Zahlen, oder extrem der hyperreellen Zahlen. Aber auch schon die „Bildung" der Kongruenzklassen in der Zahlentheorie oder allgemeiner von Quotientenstrukturen in der Algebra beruht auf Zusammenfassungen durch Sprechakte. Diese bezeichne ich als narrativ, weil sie gleichzeitig eine „Geschichte" erzählen, eine (nützliche) Fiktion begründen (wie etwa viele abstrakte Räume).

Literatur

Austin, J.L.(1972): Zur Theorie der Sprechakte. Stuttgart: Reclam.

Dörfler, W. (2007): Matrizenrechnung: Denken als symbolisches Handwerk. In: Barzel, B. u.a. (Hrsg.), Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker, 53-60. Hildesheim: Franzbecker

Dörfler, W. (2006): Diagramme und Mathematikunterricht. In: JMD 27, 200-219

Dörfler, W. (2011): Formen der Referenz in der Mathematik. In: BzMU 2011, 203-206. Münster: WTM Verlag.

Golomb, S.W. (1994): Polyominoes. Princeton Univ. Press, Princeton.

Mühlhölzer, F. (2008): Wittgenstein und der Formalismus. In: M. Kroß (Hrsg.), Ein Netz von Normen. Berlin: Parerga.

Searle, J.R. (1982): Sprechakte. Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft. Frankfurt .