Hans HUMENBERGER, Wien, Berthold SCHUPPAR, Dortmund

Problemlösen und Vernetzungen bei Zerlegungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in gleichmächtige summengleiche Teilmengen[1]

In Lehrplänen bzw. zugehörigen Präambeln und von Fachdidaktiker/innen wird immer wieder betont, dass *Vernetzen von Wissen* eine wichtige Forderung an nachhaltigen Unterricht ist; es sollen nicht nur kleinschrittige Häppchen linear nacheinander behandelt werden. Um dieser Forderung gerecht zu werden, eignen sich einerseits oft außermathematische Probleme („Realitätsbezüge"), andererseits aber auch rein innermathematische – wie das folgende. Beim *Problemlösen* und bei *heuristischen Vorgehensweisen* müssen allgemein implizit viele Vernetzungen geleistet werden, weil hier nicht nur nach einem vorher eintrainierten Schema gearbeitet wird, sondern Schüler/innen selbstständig einen bestimmten Problemkreis untersuchen (die Situation explorieren) und ihr bisheriges Wissen und Können vernetzend einbringen müssen. Hier bei unserem Thema, das auf ganz verschiedenen Klassenstufen behandelt werden kann (von der Grundschule bis Klasse 10 und sogar in der Lehramtsausbildung an der Universität), können diese Vernetzungen an zahlreichen Stellen explizit gemacht werden.

Das Einstiegsproblem: zwei gleichmächtige summengleiche Teilmengen

Unser Thema ist nicht realitätsbezogen, sondern primär innermathematisch. Schüler/innen verschiedenster Altersstufen können *selbständig* eine Situation explorieren, zu Vermutungen kommen, durch Probieren nebenbei viel rechnen und üben, nach Begründungen fragen und nach solchen suchen, d. h. im wahrsten Sinne des Wortes Mathematik *betreiben*. Das übergeordnete Lehrziel bei dieser Aufgabe ist also, *Mathematik als Prozess* wahrzunehmen – eine schon lange bestehende Forderung der modernen Mathematikdidaktik.

Problem: Für welche Werte von n kann man die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ in *zwei* summengleiche Teilmengen mit gleich vielen Elementen aufteilen?

---

[1] Eine ausführlichere Fassung ist erschienen (gemeinsam mit B. Schuppar) in: Brinkmann, A. u. a. (Hrsg., 2012): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht, Band 2, S. 115 – 125, Aulis Verlag.

Es ist klar, dass dies für $n = 1, 2, 3$ nicht klappt, erstmals funktioniert es bei $n = 4$: $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 4\} \cup \{2, 3\}$; hier haben die Teilmengen je zwei Elemente und die Summe ist jeweils 5. Bei $n = 5$ und $n = 7$ kann es natürlich nicht klappen, denn n muss ja mit Sicherheit gerade sein, wenn wir *zwei Teilmengen mit gleich vielen Elementen* fordern („Gleichmächtigkeit"). Bei $n = 6$ kann es auch nicht klappen, denn die Summe $1 + \ldots + 6 = 21$ ist nicht gerade. Bei zwei *summengleichen* Teilmengen müsste die „Gesamtsumme" aber gerade sein. Bei $n = 8$ funktioniert es wieder, z. B. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 7, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 4, 5, 8\} \cup \{2, 3, 6, 7\}$. Es gäbe noch andere Möglichkeiten der Zerlegung, aber diese sind besonders einfach und nahe liegend, weil man analog zu oben summengleiche Pärchen von außen nach innen bildet. Die Situation ist praktisch nur „verdoppelt", wobei diese „Verdopplung" auf zwei verschiedene Weisen passieren kann (siehe Abbildung 2):

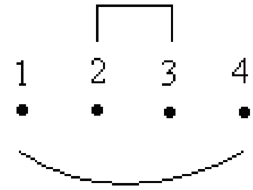

Abbildung 1 Pärchen

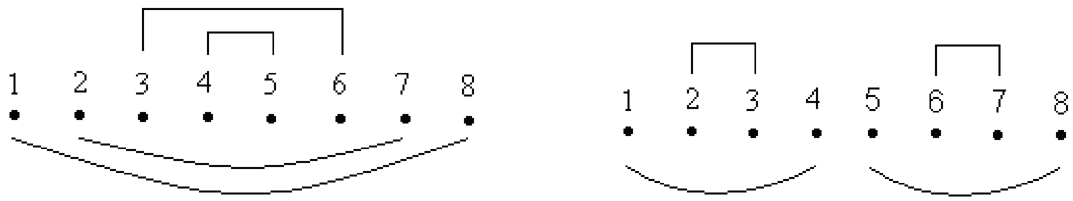

Abbildung 2 Pärchenbildungen bei $n = 8$

Hier sollte die Verallgemeinerungsfähigkeit der Idee bzw. des Musters „Pärchenbildung" betont werden, wobei *arithmetische* und *geometrische* Aspekte eine wichtige *Vernetzung* finden. Mathematik als die Wissenschaft von Mustern kann somit in einem sehr elementaren und frühen Stadium prozesshaft erfahren werden.

Diese Idee der *Pärchenbildung* kann man auch anders sehr illustrativ darstellen: Wir stellen die Zahlen $\{1, 2, \ . \ . \ . \ , \ n\}$ mittels einer „Zahlentreppe" („Stäbe", Vernetzung zu geometrischen Repräsentationen von natürlichen Zahlen, vgl. Abb. 3) dar und sehen auch in dieser Darstellungsform: Bei den Vielfachen von 4 kann man volle Viererblöcke (Vierertreppen) bilden und aus jeder Vierertreppe durch passendes Umlegen der ersten beiden Stäbe auf die zweiten beiden ein *Rechteck* mit Breite 2 machen. Alle diese Rechtecke lassen sich in der Mitte teilen: mit den jeweils linken Hälften bildet man die eine, mit den jeweils rechten die andere Teilmenge, die dann natürlich sowohl gleichmächtig als auch summengleich sind.

Bei $n = 9, 10, 11$ kann es wieder nicht klappen, bei $n = 12$ findet man dagegen leicht eine Zerlegung.

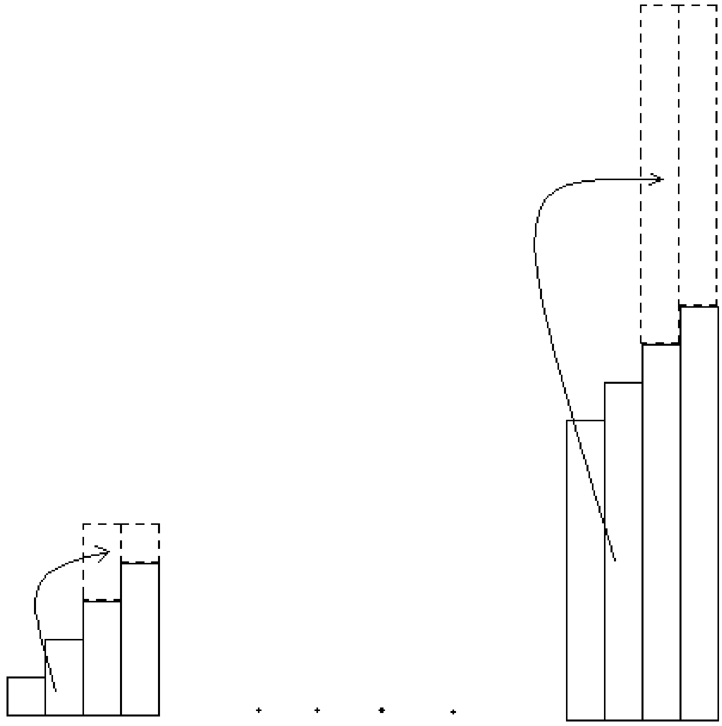

Abbildung 3 Zahlentreppe

Schüler/innen – auch schon sehr junge! – können ganz selbständig durch Probieren auf die **Vermutung** kommen: Beginnend mit $n = 4$ wird es vermutlich bei jedem vierten Wert von n klappen, d. h. bei $n = 4, 8, 12, 16, ...$ (das sind die *Vielfachen von 4*) und bei den anderen nicht. Auf ganz natürliche Weise ergibt sich aus dem *Prozess* quasi von selbst ein *Begründungsbedürfnis* für diese Vermutung – ohne dass die Lehrkraft das von sich aus ins Spiel bringen müsste. Eine Begründung ist leicht möglich.

Begründung:

Bei den Vielfachen von 4 ($n = 4k$) funktioniert es mit den summengleichen Pärchen von außen nach innen, die Situation von $n = 4$ ist da nur „ver-k-facht" (auf eine der beiden in Abb. 2 dargestellten Arten). Die ungeraden Zahlen ($4k + 1$ und $4k + 3$) kommen für n nicht in Frage, da man dann $\{1, 2, ..., n\}$ nicht in zwei *gleichmächtige* Teilmengen aufteilen kann. $n = 4k + 2$ kommt ebenfalls nicht in Frage, weil die Summe $1 + 2 + \ldots + n$ ungerade wäre (dann könnte man nicht zwei *gleiche Teilsummen* erreichen). Für diese Erkenntnis ist die Summenformel für $1 + 2 + \ldots + n$ noch gar nicht nötig: Die Summe $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ist gerade; mit 5 ist die Summe sicher ungerade, mit der 6 aber weiterhin ungerade; mit der 7 dann gerade und mit der 8 wieder gerade; dies geht nach der 8 natürlich in diesem 4-Rhythmus weiter, so dass man sagen kann, dass die Summe von 1 bis 6 (10, 14, 18, …, $4k + 2$, …) sicher immer ungerade ist. So eine Begründung ist schon in der Grundschule denkbar. In Klasse 10 kann natürlich mit der Summenformel gearbeitet werden.

Bemerkungen:

- Schon ganz junge Schüler/innen – Klasse 5 und auch Grundschule – können sich mit vielfältigen Aktivitäten (Probieren, Strategien) einbringen, auch wenn entsprechende Begründungen noch nicht immer erfolgen werden. Allein die Fragestellung gibt zu „übendem Entdecken" bzw. „entdeckendem Üben" (wie es H. Winter einmal treffend genannt hat) reichlich Anlass, wobei zwangsläufig auch jede Menge Vernetzungen passieren, auch wenn sie nur implizit ablaufen. Dieses Thema eignet sich sicher auch für differenzierenden Unterricht: Während schwächere Schüler/innen vielleicht nur rechnen, probieren und üben, erkennen andere vielleicht selbständig entsprechende Muster und noch andere evtl. sogar Begründungen; es müssen nicht alle Lernenden gleich mit dem Thema umgehen und gleich weit kommen!
- Ein wichtiger Aspekt ist hier auch der Unterschied notwendige – hinreichende Bedingungen. Genauer: Es ist zu zeigen, dass die obigen *notwendigen* Bedingungen („n muss gerade sein" und „die Summe $1 + \ldots + n$ muss gerade sein") auch *hinreichend* dafür sind, dass es eine gewünschte Zerlegung gibt. Selbst wenn man in der Grundschule nach keiner zugehörigen „Begründung" Ausschau hält, sondern nur das Muster entdeckt („Es klappt für $n = 4, 8, 12, \ldots$ und für die weiteren 16, 20, … wird es wohl auch klappen"), dann haben die Grundschulkinder schon einiges geleistet!

Die weiteren Fälle von „3 (s) summengleiche und gleichmächtige Teilmengen" und eine weiter gehende didaktische Reflexion findet man in der ausführlicheren Version (Fußnote auf der ersten Beitragsseite). In Humenberger/Schuppar 2011 wird das analoge Problem beschrieben, bei dem auf die Bedingung „gleichmächtig" verzichtet wird.

Literatur

Humenberger, H., Schuppar B. (2011): Problemlösen und Vernetzungen bei Zerlegungen von {1, 2, …, n} in summengleiche Teilmengen. In: Brinkmann, A. u. a. (Hrsg., 2011): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht, Band 1, S. 82–93, Aulis Verlag.