Gerald WITTMANN, Freiburg

Zur Konsistenz von Fehlermustern in der Bruchrechnung – Ergebnisse einer empirischen Studie

Ein Fehlermuster liegt dann vor, wenn sich bei strukturell gleichen Aufgaben auch strukturell gleiche Fehler zeigen (Prediger & Wittmann 2009). In der Bruchrechnung sind die Fehlermuster wohl bekannt und gut dokumentiert (Hennecke 1999; Padberg 2008). Offen bleibt aber die Frage, ob die Fehlermuster auch konsistent sind. Mit anderen Worten: Wenn ein(e) Schüler(in) mehrere strukturell gleiche Aufgaben innerhalb eines Tests löst, lässt sich dann bei allen Aufgaben auch dasselbe Fehlermuster oder – allgemeiner formuliert – derselbe Lösungsweg beobachten?

Ältere Studien zur Bruchrechnung zielen in erster Linie auf die Identifikation von Fehlermustern und die Häufigkeit ihres Auftretens. Jüngere Studien zeigen hingegen die Vielfalt individueller Lösungswege (Hennecke 1999 mittels Rechengraphen) und weisen nach, dass die Bruchrechnung für die meisten Schüler(innen) in disjunkte Aufgabenklassen zerfällt (Herden & Pallack 2000 mittels Cluster- und Faktorenanalysen). Ferner liefern Studien zum Lösen linearer Gleichungen in der Algebra die Hypothese, dass Fehlermuster vielfach nicht konsistent sind (Tietze 1988; Stahl 2000).

Design der Studie

Ein *Aufgabenset* zu jedem der vier Bereiche Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier Brüche sowie Addition eines Bruchs und einer natürlichen Zahl besteht aus jeweils sechs Aufgaben. Das Aufgabenset zur Multiplikation beispielsweise umfasst drei Aufgabenpaare, die sich untereinander nur in den gegebenen Zahlen unterscheiden – zwei Aufgaben mit ungleichnamigen Brüchen, zwei Aufgaben mit gleichnamigen Brüchen (bei verschiedenen Zählern) sowie zwei Aufgaben mit gleichen Brüchen:

$$\tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{1}{2} \text{ und } \tfrac{8}{5}\cdot\tfrac{3}{7},\ \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{5} \text{ und } \tfrac{5}{13}\cdot\tfrac{3}{13} \text{ sowie } \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{5}{2} \text{ und } \tfrac{4}{15}\cdot\tfrac{4}{15}$$

Jeder *Testbogen* umfasst 21 Aufgaben, also drei der vier Aufgabensets sowie drei weitere Füllaufgaben (ohne inhaltliche Bedeutung). Von jedem Testbogen gibt es wiederum neun Varianten, die sich in der Reihenfolge der Aufgaben unterscheiden, um Serieneffekte ausschließen zu können. An der Studie nahmen N = 428 Schüler(innen) der Jahrgangsstufen 6 und 7 von Real- und Werkrealschulen teil.

Während bei traditionellen Fehleranalysen in der Bruchrechnung die Lösungs*quoten* im Vordergrund stehen und erst in einem zweiten Schritt häufige Fehlermuster extrahiert werden, zielt die Kodierung in dieser Studie auf Lösungs*wege* und nicht auf korrekte oder falsche Lösungen; sie blendet gezielt Einmaleins-Fehler oder ähnliche Fehler aus. Für die Multiplikation zweier Brüche ergibt sich beispielsweise folgendes *Kodierschema*:

0 Nicht bearbeitet

1 Richtiger Lösungsweg (im Kopf oder schriftlich; es kann eine richtige, aber auch eine falsche Lösung sein, z. B. Einmaleins-Fehler).

3 Hauptfehlermuster „Nenner beibehalten“ (bei ungleichnamigen Brüchen nach vorherigem Gleichnamigmachen; es können auch weitere Fehler wie Einmaleins-Fehler auftreten).

9 Sonstiges (andere, seltenere Fehlermuster wie „Multiplizieren mit dem Kehrbruch“ oder nicht erklärbare Bearbeitungen).

Ergebnisse: Multiplikation zweier Brüche

Tabelle 1 bezieht sich auf die Häufigkeiten der Lösungswege für die sechs Multiplikationsaufgaben (N = 315). Bei ungleichnamigen Brüchen ist der richtige Lösungsweg häufiger als bei gleichnamigen. Im Falle gleicher Nenner wiederum zeigt sich das Hauptfehlermuster in jedem der beiden Aufgabenpaare dann häufiger, wenn der Nenner größer ist. Ferner macht ein kleiner Teil der Schüler(innen) ungleichnamige Brüche zunächst gleichnamig und behält dann den Nenner bei.

Kodierung	$\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{7}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{13}$	$\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}$	$\frac{4}{15}\cdot\frac{4}{15}$
0 Nicht bearbeitet	24	31	14	21	13	21
1 Richtiger Lös.weg	226	228	199	167	207	176
3 Nenner beibehalt.	30	25	74	102	53	91
9 Sonstiges	35	31	28	25	42	27

Tabelle 1: Multiplikation zweier Brüche – Häufigkeitstabelle

		$\frac{4}{15}\cdot\frac{4}{15}$ („große Zahlen“)				
		0	1	3	9	
$\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}$ („kleine Zahlen“)	0	11	1	0	1	13
	1	7	159	31	10	207
	3	0	2	50	1	53
	9	3	14	10	15	42
		21	176	91	27	315

Tabelle 2: Multiplikation zweier Brüche – Kreuztabelle

Tabelle 2 stellt den Zusammenhang der Lösungswege für die beiden Aufgaben zur Multiplikationen gleicher Brüche dar. 235 von 315 Schüler(innen) lösen beide Aufgaben auf dieselbe Weise, während 80 unterschiedlich vorgehen. Insbesondere rechnen 31 Schüler(innen) bei der Aufgabe mit „kleinen“ Zahlen gemäß einem richtigen Lösungsweg, während sie bei der Aufgabe mit „großen“ Zahlen den Nenner beibehalten. Nach dem Test von McNemar-Bowker (Bortz u. a. 2008) ist die Asymmetrie der Kreuztabelle signifikant ($\chi^2 = 39{,}015$; $df = 5$; $\alpha < 0{,}001$).

In Tabelle 3 werden die Lösungswege der Schüler(innen) bei den vier Aufgaben mit gleichem Nenner betrachtet. Diese vier Aufgaben lassen sich vorab als strukturgleich einordnen. Die Lösungswege sind jedoch nur bedingt konsistent: 135 Schüler(innen) rechnen alle vier Aufgaben entsprechend dem korrekten Weg, 35 drei von vier, 38 zwei von vier und 28 eine von vier. Ein ähnliches Bild ergibt sich auch für das Beibehalten des Nenners: Bei 40 Schüler(innen) tritt es jedes Mal auf, bei jeweils 28 in drei oder zwei von vier und bei 20 in einer von vier Aufgaben. Ergänzend hierzu: 11 der 40 Schüler(innen), die bei allen vier Aufgaben mit gleichnamigen Brüchen den Nenner beibehalten, bearbeiten auch die beiden Aufgaben mit ungleichnamigen Brüchen nach vorherigem Gleichnamigmachen auf dieselbe Weise (Konsistenz des Fehlermusters im gleichnamigen und ungleichnamigen Fall), während weitere 11 die beiden Aufgaben mit ungleichnamigen Brüchen entsprechend dem richtigen Lösungsweg rechnen (Konsistenz des Lösungswegs jeweils nur innerhalb des gleichnamigen und ungleichnamigen Falls).

	So viele Schüler(innen) rechnen *x*-mal …				
	0	1	2	3	4
Richtiger Lösungsweg	79	28	38	35	135
Nenner beibehalten	199	20	28	28	40

Tabelle 3: Multiplikation zweier Brüche – Häufigkeit gleicher Lösungswege

Diskussion und Folgerungen

Während ein erheblicher Teil der Schüler(innen) alle Multiplikationsaufgaben entsprechend einem korrekten Lösungsweg bearbeitet und sich diesbezüglich konsistent verhält, trifft dies in Bezug auf das Hauptfehlermuster „Nenner beibehalten“ nur für einen kleinen Teil zu. Ob die in einer Aufgabe gegebenen Zahlen „groß“ oder „klein“ sind, beeinflusst die auftretenden Lösungswege: Ein Fehlermuster tritt häufiger auf, wenn „große“ Zahlen gegeben sind und das Fehlermuster rechnerisch einfacher ist als der korrekte Lösungsweg. (Es besteht allerdings die Vermutung, dass dies nicht die Größe der Zahlen an sich ist, sondern der Umstand, ob die entsprechenden Einmaleins-Sätze automatisiert bzw. leicht zu bewältigen sind.)

In Konsequenz bedeutet dies, dass Lösungswege zumindest teilweise nicht gezielt gewählt, sondern *ad hoc generiert* werden, auch in Reaktion auf die gegebenen Zahlen (*Emergenzansatz*, vgl. Rathgeb-Schnierer 2010). Letztlich lässt sich dies als eine *unkontrollierte Aufgabenadaptivität* einordnen. Die verbreitete Bezeichnung als „Fehlerstrategie“ (vgl. Herden & Pallack 2000; Padberg 2008) ist deshalb kritisch zu sehen, da es sich eben nicht um eine Strategie entsprechend der in der Psychologie üblichen Bedeutung handelt (vgl. Zimbardo 1992).

Während die Konsistenz von Lösungswegen plausibel mit falsch gelernten (oder zumindest automatisierten) Verfahren erklärt werden kann, ist dies in Bezug auf die Inkonsistenz schwieriger. Zeigen Schüler(innen) bei einer Aufgabe ein Fehlermuster und ansonsten korrekte Lösungswege, so deutet dies auf einen Flüchtigkeitsfehler hin, der durch die intuitive Form der Fehlermuster begünstigt wird. Wenn Schüler(innen) innerhalb eines Aufgabensets zahlreiche unterschiedliche Lösungswege ausführen, lässt sich dies als „Ziffernrechnen“ interpretieren, als weitgehend unreflektiertes Verarbeiten von in der Aufgabe gegebenen Zahlen gemäß bekannter Schemata.

Literatur

Bortz, J., Lienert, G. A. & Boehnke, K. (2008): Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik. Springer: Heidelberg (3. Auflage)

Hennecke, M. (1999): Online-Diagnose in intelligenten mathematischen Lehr-Lern-Systemen. Dissertation: Universität Hildesheim

Herden, G. & Pallack, A. (2000): Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fehlerstrategien in der Bruchrechnung. Empirische Erhebung über 244 SchülerInnen der Klassen sieben von Gymnasien. In: Journal für Mathematik-Didaktik 21, S. 259–279

Padberg, F. (2008): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Spektrum: Heidelberg (4. Auflage)

Prediger, S. & Wittmann, G. (2009): Lernen aus Fehlern im Mathematikunterricht – (wie) ist das möglich? In: Praxis der Mathematik in der Schule 51(3), S. 1–8

Rathgeb-Schnierer, E. (2010): Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahres. In: Journal für Mathematik-Didaktik 31, S. 257–283

Stahl, R. (2000): Lösungsverhalten von Schülerinnen und Schülern bei einfachen linearen Gleichungen. Eine empirische Untersuchung im 9. Schuljahr und eine Entwicklung eines kategoriellen Computerdiagnosesystems. Dissertation: TU Braunschweig

Tietze, U.-P. (1988): Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik – Theoriebildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung. In: Journal für Mathematik-Didaktik 9, S. 163–204

Zimbardo, P. G. (1992): Psychologie. Springer: Berlin u. a. (5. Auflage)