Timo LEUDERS, Susanne PREDIGER, Stephan HUSSMANN, Bärbel BARZEL, Freiburg/Dortmund

Genetische Lernarrangements entwickeln – Vom Möglichem im Unmöglichen bei der Entwicklung der Mathewerkstatt

Theoretisch-historische Ausgangspunkte

Das Konzept des genetischen Lernens zieht sich in den letzten Jahrhunderten wie ein roter Faden durch die pädagogische und didaktische Literatur, früh schon bei Dewey:

> „Der Weg zum Verständnis eines entwickelten Produktes führt durch das Studium seines Werdeganges . . . Indem wir es im Werden studieren, wird manches unserem Verhältnis zugänglich, das heute zu verwickelt ist, um unmittelbar erfasst zu werden.“ (Dewey 1915, S. 283).

Im Fach Mathematik wurde (neben den Naturwissenschaften) seit jeher das genetische Prinzip besonders stark betont (etwa von Klein 1908 und Toeplitz 1927). Seit den 1960er Jahren wurden zahlreiche theoretische Fundierungen und Ausdifferenzierungen vorgelegt und Roths (1970) Ansatz der Rückverwandlung in überzeugenden Beispielen umgesetzt:

> „Alle methodische Kunst liegt darin beschlossen, tote Sachverhalte in lebendige Handlungen zurückzuverwandeln, aus denen sie entsprungen sind: Gegenstände in Erfindungen und Entdeckungen, Werke in Schöpfungen und Pläne in Sorgen, Verträge in Beschlüsse, Lösungen in Aufgaben, Phänomene in Urphänomene.“ (Roth, 1970, S. 116)

Anspruchsvoll ist nicht nur die Umsetzung dieser Forderungen, sondern auch die genauere theoretische Fassung und Abgrenzung des facettenreichen didaktischen Prinzips. Nicht jedes entdeckende Lernen ist genetisch; genetisches Lernen ist auch nicht notwendig historisch: Schon Toeplitz (1927) unterschied die direkte historisch-genetische von einer indirekten, nur an die historischen Kernideen anknüpfenden Vorgehensweise. Genetisches Lernen ist auch nicht nur im problemlösenden Unterricht zu realisieren, sondern kann sich auch im nachvollziehenden Folgen eines Vortrags entfalten. Schließlich ist eine genetische Begriffsbildung nicht ausschließlich an Anwendungskontexte gebunden, sondern kann sich auch innermathematisch vollziehen (siehe Strukturprobleme unten).

Wir wählen für die folgenden Betrachtungen diese (einengende) Definition: *Genetisches Lernen ist der durch Probleme angestoßene individuelle, aktive Vollzug eines Prozesses der Konstruktion eines mathematischen Begriffes oder Zusammenhangs, der sich schließlich als Lösung des Ausgangsproblem erweist.* Damit sind wir nah an Freudenthals „Mathematik in statu nascendi“ (Freudenthal 1973, S. 113).

Fragestellungen und Vorgehensweisen

Trotz der langen Tradition des genetischen Prinzips und wiederholter „Existenzbeweise“ durch einzelne Konkretisierungen bleiben folgende zwei zentrale Fragen zu Umsetzbarkeit und Wirkungen offen:

1. Inwiefern kann das (bislang vor allen in ausgewählten Vorzeigebeispielen umgesetzte) genetische Prinzip tatsächlich für alle Inhalte im regulären Unterricht auch für schwächere Lernende umgesetzt werden?
2. Wie verlaufen die initiierten Lernprozesse tatsächlich?
   Welche Wirkungen haben sie?

Im Rahmen des langfristigen KOSIMA-Projekts (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen; Hußmann, Leuders, Barzel & Prediger 2011) bearbeiten wir diese Fragestellungen im Forschungsprogramm der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Gravemejier & Cobb 2006; Prediger & Link 2012) und verfolgen dabei vier Arbeitsbereiche:

- Implementation des genetischen Prinzips (und zahlreicher anderer Prinzipien, vgl. Barzel et al. 2011) durch ***Design von Lernumgebungen***, die in die Schulbuchreihe Mathewerkstatt (Barzel, Leuders, Hußmann & Prediger 2012) für die Klassen 5-10 mittlerer Schulformen einfließen.
- ***Curriculare Exploration*** des Möglichen im Unmöglichen durch kritische Reflexion der Designprozesse mit dem langfristigen Ziel, die Theorie des genetischen Prinzips weiter zu entwickeln.
- ***Erprobung der Lernumgebungen*** zur Weiterentwicklung und zur Spezifizierung des Bedarfs an Unterstützungen.
- ***Empirische Beforschung der initiierten Lernprozesse***, derzeit vorrangig in Bezug auf die Wirkungen im Prozess der Vorstellungsentwicklung (z.B. Prediger 2011a; Schnell & Prediger 2012; sowie in diesem Band Zwetzschler, Richter, Schnell, Hußmann & Schindler) und Teilaspekten von Kompetenzentwicklung (Ehret, in diesem Band, Philipp & Leuders 2012). Angestrebt ist in Zukunft auch eine breitere Evaluation der Wirksamkeit.

Die der curricularen Exploration zugrundeliegenden Designprozesse umfassen bzgl. des genetischen Prinzips folgende drei Schritte:

1. die Spezifizierung von Kernideen und Kernfragen,
2. die Suche nach geeigneten Kontexten und
3. die Konstruktion geeigneter Kontextprobleme (vgl. Leuders et al. 2011).

Hierbei wurden fünf Herausforderungen des genetischen Prinzips und mögliche Ansätze zur Überwindung herausgearbeitet (und werden in der Langfassung des Artikels an Beispielen konkretisiert):

Herausforderung 1: Wenn Offenheit die Zielerreichung gefährdet - Zeitökonomie und Abgrenzungswissen

Offene Kontextprobleme laden ein zur divergenten, kreativen horizontalen Mathematisierung. Dies ist bildend und höchst erwünscht, stellt jedoch Lehrkräfte im Unterricht vor zweierlei Herausforderungen: Zum einen ist die Entwicklung alternativer Mathematisierungen *inhaltlich* nicht immer zielführend. Dann muss zum richtigen Zeitpunkt deutlich werden, welche individuellen Vorschläge warum nicht der konventionellen Mathematik entsprechen (vgl. Prediger 2011b). Zum anderen ist es zuweilen *zeitlich* nicht möglich, alle Alternativen zu entwickeln. Dann muss ein Schulbuch nach einer Exploration auch engere Wege zur Konvergenz ermöglichen.

Herausforderung 2: Wenn Kontextprobleme nicht passend sind – Authentizität, Altersgemäßheit und Kontextkohärenz

Einige Probleme führen zwar genetisch zur intendierten Mathematik, lassen sich aber kaum in Kontexten altersgemäß konstruieren. So müssen etwa für die Entwicklung der Idee der relativen Häufigkeit die Zahlen klein sein, echte Kontextprobleme aber hantieren gerade mit unübersichtlich großen Zahlen. Auch führt der Anspruch, eine gewisse Kohärenz innerhalb eines Kontexts herzustellen, zuweilen zur Notwendigkeit von Anpassungen. Sucht man z.B. in Klasse 5 nach einem genetischen Weg zum Mittelwert, so kann man überzeugende genetische Vorschläge (wie z.B. Lengnink 2008) mitunter wegen mangelnder Passung zur Altersgruppe nicht wählen. Wir haben uns für das Problem entschieden: „Haben die Jungen oder Mädchen unserer Klasse den größeren Fuß?“ (Barzel & Leuders 2012) das auf natürliche Weise zur Lösung des „gleichmäßigen Aufteilens“ führt.

Herausforderung 3: Wenn zu Erfindendes schon alltäglich ist - Enttrivialisierung und Verfremdung

Manche Kernideen und Konzepte können Lernende nicht mehr selbst erfinden, weil sie ihnen aus dem Alltag längst vertraut sind, wie z.B. die Koordinaten als Antwort auf die Kernfrage „Wie kann man Orte gut beschreiben?“. Dann muss die fertige Mathematik enttrivialisiert und die dahinter liegende Kernidee ins Bewusstsein zu rücken. Dazu hilft die Technik der Verfremdung, z.B. durch den Kontext der Bienen, die zur Beschreibung von Orten Polarkoordinaten nutzen (Hußmann & Weber 2012).

Herausforderung 4: Wenn Kontextprobleme nicht mehr funktionieren – vertikale Mathematisierung

Nicht alle mathematischen Inhalte lassen sich aus Kontextproblemen entwickeln, zum Beispiel der Übergang von der inhaltlichen Vorstellung der

Gleichwertigkeit von Brüchen (die Lernende anhand der relativen Häufigkeit selbst erfinden können) hin zum Kalkül des Erweitern und Kürzens. Ähnliches gilt für andere Schematisierungsprozesse oder Verallgemeinerungen. Dann müssen durch Strukturprobleme *vertikale Mathematisierungen* (Treffers 1987, S. 247) angeregt werden. Zwar ist das Erweitern und Kürzen keine Antwort auf ein Kontextproblem, doch die allgemeine Idee der Kalkülisierung ist Antwort auf die Kernfrage, wie man komplexe Denkwege schematisieren und dadurch das Denken entlasten kann. Diese kann auch für Lernende erlebbar gemacht werden (vgl. Prediger 2011a).

Herausforderung 5: Wenn Vorschusslernen die Sinnstiftung bedroht - genetische Zwischenplattformen

In der traditionellen fachsystematischen Anordnung mancher Themen geraten genetische Beziehungen aus dem Blick und das Lernen wird zu einem Vorschusslernen. „Genetisch gedacht" helfen binomische Formeln beispielsweise bei der Lösung des Problems der Ermittlung von Extrema und Zielwerten quadratischer Probleme und müssten im streng genetischen Sinne auch hierfür entwickelt werden. Das würde aber zu einem unterrichtlichen Bogen von vielen Wochen führen und Lernende sowohl inhaltlich als auch in der Wahrnehmung der genetischen Struktur überfordern. Hier gilt es, „genetische Zwischenplattformen" zu finden, also lokale Probleme und dazu passende Kontexte, die das genetische Entwickeln von Mathematik für die Lernenden plausibel erscheinen lassen, auch wenn die zentralen Verwendungszusammenhänge noch nicht verfügbar sind. So lässt sich für das Thema „binomische Formeln" die Frage untersuchen, wie man durch das Arbeiten mit Termen Rechenwege verstehen und vereinfachen kann. Im Kontext von Zahlenzaubereien gibt es zahlreiche Phänomene, die auf quadratische Terme führen (Leuders, Marxer & Rülander 2011).

Fazit

Neben empirischen Untersuchungen sind auch curriculare Explorationen eine wichtige fachdidaktische Forschungsmethode. Die konsequente, flächendeckende Durcharbeitung und Umsetzung didaktischer Prinzipien bringt für das altvertraute Konzept des genetischen Lernens neue praktische und theoretische Einsichten in Zusammenhänge, Einschränkungen und Möglichkeiten im Unmöglichen.

Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012) (Hrsg.): Mathewerkstatt 5. Berlin: Cornelsen. (Ebenso mit anderer Hrsg-Namenreihenfolge Klasse 6-10).

Alle Autorinnen und Autoren haben am Projekt gleichberechtigt mitgewirkt. Weitere Literatur in der Langfassung des Beitrags unter www.ko-si-ma.de → Publikationen.