

Sebastian REZAT, Gießen

## **Von der Propädeutik zum algebraischen Denken: Überlegungen zur Zahlbegriffsentwicklung der negativen Zahlen von der Primar- zur Sekundarstufe**

### **Einleitung**

Das Verhältnis zwischen Zahlen und Algebra wird in der einschlägigen Literatur sowohl aus einer algebraischen als auch aus einer arithmetisch-propädeutischen Perspektive gekennzeichnet: Die algebraische Perspektive artikuliert VOLLRATH in seinem Standardwerk zur Algebra in der Sekundarstufe: „Der Algebraunterricht kann wesentliche Beiträge zum Verständnis der Zahlen leisten, wenn in ihm die Regeln des Rechnens und die Zusammenhänge zwischen diesen Regeln deutlich gemacht werden.“ (Vollrath, 2003, S. 22). Im Gegensatz dazu bringt die arithmetisch-propädeutische Perspektive zum Ausdruck, dass ein tiefes Verständnis der Zahlen und ihrer Strukturen zu einem besseren Verständnis der Algebra beitragen kann. In diesem Sinne fordern BERLIN et al. (2009), „dass algebraisches Denken frühzeitig im Zusammenhang mit arithmetischen Aktivitäten entwickelt werden sollte“ (S. 273) und „man die inhaltliche Bindung erst lösen [sollte], wenn sie vorher bestanden hat und kräftig gewesen ist“ (S. 291).

Die Themenstränge ‚Zahlen‘ und ‚Algebra‘ stehen in Schulbüchern und in der didaktischen Literatur in der Regel nebeneinander in gewisser Isolation. Die engen Verflechtungen beider Themenstränge werden zwar betont (vgl. z. B. Vollrath, 2003, S. 5-6), aber Vorschläge zu einer integrierten Behandlung von Zahlbereichserweiterungen und Algebra sind rar.

Die Befunde zum algebraischen Denken von Kindergarten- und Grundschulkindern (vgl. z. B. Kaput, Carraher, & Blanton, 2008) sprechen dafür, die Behandlung von Zahlen und Algebra von der Primarstufe bis hin zur Sekundarstufe zu überdenken. Dies soll im vorliegenden Beitrag am Beispiel der negativen Zahlen konkretisiert werden. Zunächst wird kurz umrissen, was unter einer Propädeutik der Algebra verstanden wird und auf zentrale Ergebnisse verwiesen. Aus diesen Überlegungen werden Folgerungen gezogen, die schließlich anhand der negativen Zahlen konkretisiert werden.

### **Propädeutik der Algebra**

Der Übergang von der Arithmetik zur Algebra wird in der einschlägigen Literatur als „algebra problem“ (Kaput, 2008) bezeichnet und als „cognitive gap“ (Linchevski & Herscovics, 1996) charakterisiert. Das Ziel

der Propädeutik der Algebra ist es, diesen Sprung zu verkleinern bzw. besser vorzubereiten. Im Vordergrund steht dabei die Einführung in algebraisches Denken: “The fundamental purpose of early algebra should be to provide students with a set of experiences that enables them to see mathematics—sometimes called the science of patterns—as something they can make sense of, and to provide them with the habits of mind that will support the use of the specific mathematical tools they will encounter when they study algebra” (Schoenfeld, 2008, S. 506). Algebraisches Denken wird dabei häufig mit ‘Generalisieren’ gleichgesetzt und meint auf einer ersten Stufe insbesondere “die Fähigkeit, in arithmetischen Zusammenhängen Strukturen und Formen zu erkennen [und] diese begrifflich [...] zu beschreiben“ (Berlin, et al., 2009, S. 273).

In der einschlägigen Literatur finden sich Belege dafür, dass die Propädeutik der Algebra ein erfolgsversprechender Ansatz ist. Da Variable das zentrale Mittel der algebraischen Sprache zum Generalisieren sind, liegt ein Schwerpunkt der Untersuchungen auf Studien zum Variablenbegriff. Diese zeigen, dass Grundschul Kinder in der Lage sind, Variablen als Mittel zum Generalisieren zu verwenden und dabei intuitiv verschiedene Variablenaspekte zu erfassen (vgl. z. B. Fischer, 2009; Specht, 2009).

### **Folgerungen**

1. Die Befunde zum algebraischen Denken von Kindergarten- und Grundschulkindern deuten darauf hin, dass mathematische Begriffe sowie Denk- und Arbeitsweisen, die bislang der Sekundarstufe vorbehalten waren, wie z. B. die negativen Zahlen, bereits in der Primarstufe auf intuitivem Niveau im Sinne einer Propädeutik thematisiert werden können, um epistemologische Sprünge besser vorzubereiten bzw. zu glätten.
2. Darüber hinaus ist es kennzeichnend für Ansätze zur Propädeutik der Algebra, dass diese sich bislang auf das Erkennen von Mustern und Strukturen in den natürlichen Zahlen beschränken. Im Sinne einer engeren Verschränkung der Themenstränge ‚Zahlen‘ und ‚Algebra‘ in der Sekundarstufe I erscheint es sinnvoll, algebraisches Denken auch im Rahmen der Zahlbereichserweiterungen in anderen Zahlbereichen, wie z. B. den negativen Zahlen, zu fördern.

### **Konkretisierung am Beispiel der negativen Zahlen**

Die Auseinandersetzung mit negativen Zahlen ist bislang insbesondere durch historische Betrachtungen, epistemologische Überlegungen und die Darstellung und Analyse von didaktischen Modellen gekennzeichnet. Empirische Befunde zum Lernen und zum Verständnis negativer Zahlen sind

rar. Vielmehr ist gerade die Didaktik der negativen Zahlen von der Annahme geprägt, dass „geistige Hürden, die sich dem Verständnis eines mathematischen Gegenstandes im Laufe seiner geschichtlichen Entwicklung entgegengestellt haben, auch die Lernprozesse unserer heutigen Schüler/innen blockieren können“ (Hefendehl-Hebecker, 1989, S. 7). Dies ist jedoch zunächst eine Hypothese, die einerseits empirisch zu belegen wäre und andererseits angesichts veränderter soziokultureller Bedingungen hinterfragt werden kann.

JAHNKE und STEINBRING problematisieren die übliche Thematisierung negativer Zahlen in Sachkontexten. JAHNKE (2003, S. 21) sieht „die mit den negativen Zahlen verfolgte Intention [...] klar im algebraischen Kalkül. Die Interpretation erfolgt durch Sachsituationen, die diesen Kalkül nicht benötigen“. STEINBRING (1994, S. 278) verweist auf epistemologische Sprünge zwischen dem mathematischen Kalkül und den Sachsituationen: „Letztlich bedarf der Begriff der negativen Zahlen samt zugehöriger mathematischer Operationen ähnlich formaler, autonomer Regeln wie die Algebra. Es gibt ein System in sich stimmiger Operationsregeln, das den Kalkül der negativen Zahlen formal beschreibt. Dieses System ‚negative Zahlen‘ wird nicht aus der Realität deduziert, noch ist es unmittelbar auf reale Zusammenhänge beziehbar“. Beide Aussagen verweisen einerseits darauf, dass eine ergänzende Thematisierung der negativen Zahlen im Sinne einer Propädeutik der Algebra epistemologisch angemessener und ‚ehrlicher‘ wäre, als sie vornehmlich als Mittel um „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“ (Winter, 1995, S. 37) zu behandeln. Andererseits ist aufgrund der von STEINBRING angesprochenen Analogie zwischen dem algebraischen Kalkül und dem Kalkül der negativen Zahlen (das auf der Menge der ganzen Zahlen ja in der Tat dasselbe ist) anzunehmen, dass Lernende mit dem Kalkül ähnliche Probleme haben, wie mit dem algebraischen Kalkül. In diesem Sinne ist eine Propädeutik der negativen Zahlen in der Primarstufe analog zur Propädeutik der Algebra anzudenken. Dafür sprechen einerseits die veränderten soziokulturellen Bedingungen: Lernende erfahren heute negative Zahlen als selbstverständliche Objekte der Lebenswelt. Andererseits verweisen Erfahrungsberichte auf eine erfolgsversprechende Propädeutik negativer Zahlen in der Primarstufe (vgl. z. B.: Borges, 1995; Hativa & Cohen, 1995). Anstelle der Einführung der negativen Zahlen in der Sekundarstufe I ließe sich hier stärker die Erkundung der Strukturen des Kalküls der negativen Zahlen im Sinne einer Propädeutik der Algebra in den Vordergrund rücken, das im Zusammenhang mit Permanenzreihen ja bereits eine Rolle spielt. Damit einher ginge auch eine engere Verschränkung der The-

menstränge ‚Zahlen‘ und ‚Algebra‘ im Sinne der arithmetisch-propädeutischen Perspektive.

## Literatur

- Berlin, T., Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Melzig, D. (2009). Vom Rechnen zum Rechenschema - zum Aufbau einer algebraischen Perspektive im Arithmetikunterricht. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 270-291). Weinheim: Beltz.
- Borges, R. (1995). Negative Zahlen in der Grundschule? *Mathematische Unterrichtspraxis*, 16(1), 21-30.
- Fischer, A. (2009). Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen - Zahl- und Variablenauffassungen von Fünftklässlern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30(1), 3-29.
- Hativa, N., & Cohen, D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 28(4), 401-431.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1989). Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion - geistige Hindernisse in ihrer Geschichte. *mathematik lehren*(35), 6-12.
- Jahnke, H. N. (2003). Numeri Absurdi Infra Nihil. Die negativen Zahlen. *mathematik lehren*(121), 21-22, 39-40.
- Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Hrsg.), *Algebra in the Early Grades* (S. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). *Algebra in the Early Grades*. New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lincevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30(1), 39-65.
- Schoenfeld, A. H. (2008). Early Algebra as Mathematical Sense Making. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Hrsg.), *Algebra in the Early Grades* (S. 479-510). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Specht, B. J. (2009). Variablenverständnis und Variablen verstehen. Empirische Untersuchungen zum Einfluss sprachlicher Formulierungen in der Primar- und Sekundarstufe. Hildesheim: Franzbecker.
- Steinbring, H. (1994). Symbole, Referenzkontexte und die Konstruktion mathematischer Bedeutung - am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 15(3-4), 277-309.
- Vollrath, H.-J. (2003). *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*(61), 37-46.