Christof WEBER, Berlin

Eine Grundvorstellung des Logarithmus: die verallgemeinerte Stellenanzahl

Der Logarithmus wirft für die meisten Gymnasiastinnen und Gymnasiasten große Verständnisprobleme auf. So sind am Ende der Schulzeit Aussagen wie folgende nicht selten: „Ich möchte endlich mal verstehen, was der Logarithmus *wirklich* ist.“ Oder: „Erklären Sie mir doch bitte: Was *ist* der Logarithmus eigentlich?“ Trotz wochenlanger Arbeit scheint der Logarithmus in den Köpfen der Lernenden nicht zur gleichen Selbstverständlichkeit – ja eigenständigen Existenz – gereift zu sein wie etwa die Quadratwurzel oder der Sinus. Offenbar verdichtet sich der Logarithmus nicht zunehmend zu einer gedanklichen Entität, mit der verständig argumentiert und gearbeitet werden kann, sondern bleibt bis zum Schluss eine *black box*, mit der ein Gefühl des Sperrigen oder gar der Bedeutungsarmut einhergeht. Woran könnte das liegen, und wie könnte diesem Missstand abgeholfen werden?

1. Ein sperriges Thema

Seit über zweihundert Jahren wird der Logarithmus in der Regel nach dem Vorbild von Eulers „Vollständige Anleitung zur Algebra“ eingeführt. Nach der Umschreibung des Begriffs („der Logarithmus von *b* zur Basis *a* ist der Exponent, mit dem man *a* potenzieren muss, um *b* zu erhalten“) folgen die zentralen Eigenschaften (Logarithmengesetze, Basiswechselsatz). Anschließend sind Exponential- und Logarithmusgleichungen zu lösen, bevor Anwendungen und Logarithmusfunktionen thematisiert werden.

Einige wenige Studien haben Schülerschwierigkeiten zum Logarithmus erhoben. So wird als eine der typischen *misconceptions* die Behandlung des Logarithmus als Objekt und die Übergeneralisierung von Gesetzen genannt (Boon Liang und Wood 2005). Dies kommt in Fehlern wie der Division „durch log“ ($\log(7x-12)=2\log x$ ® $7x-12=2x$) oder dem Ausmultiplizieren ($\log(7x-12)=\log 7x-\log 12$) zum Ausdruck.

Solche Schwierigkeiten werden gerne auf die *Schreibweise* zurückgeführt, ist doch $\log_a b$ ein „stark verdichtetes Informationsbündel“, das schwierig „aufzuschnüren und zu deuten“ ist (Appel 1992). So ist der Logarithmus nicht nur eine zweistellige Operation (Basis *a*, Numerus *b*), sondern auch ein Fachbegriff, dessen Bedeutung alles andere als selbsterklärend oder gar sinnstiftend ist: Wie kommt man dazu, einen Exponenten *Logarithmus* zu nennen, also „Verhältnis-Zahl“? (Siehe Wolff 1961, 118.)

Für die Schwierigkeiten mindestens so sehr verantwortlich dürfte aber auch die bereits zitierte *inverse Begriffsfassung* des Logarithmus sein. Ähnlich wie die Erklärung „blau ist das Gegenteil von nichtblau“ eher eine logisch-korrekte Aussage ist denn einen Begriff aufschließt, ist die Definition des Logarithmus über das inverse Potenzieren kaum erkenntnisbefördernd.

2. Ein Blick in den benachbarten Garten

In der Unterrichtspraxis ist zu beobachten, dass einzelne Schülerinnen und Schüler nach einer Weile des Umgangs mit dem Logarithmus einen eigenen Sprachgebrauch ausbilden und davon sprechen, „den x-ten Logarithmus einer Zahl zu ziehen“. Könnte dieser Fokus auf eine mit dem Logarithmus verbundenen Prozess, eine direkte *Handlung*, bewirken, dass ihnen der Logarithmus weniger sperrig und damit verständlicher wird?

Nicht von ungefähr erinnert diese handlungsorientierte Formulierung an das Radizieren – oder eben an das „Ziehen der Wurzel“ (für den historischen Ursprung des Wurzel-Begriffs und -Zeichens siehe Felgner 2005). Aus mathematischer Sicht mag es zwar erstaunlich sein, dass sich das Wurzel-Thema als weniger sperrig erweist als das Logarithmus-Thema, sind doch beide mögliche Umkehrungen der Potenzrechnung. Aus lernpsychologischer Sicht sind jedoch eine ganze Reihe Gründe denkbar:

- Mit dem Quadrieren als Rechenart haben sich die Lernenden seit den ersten Jahren der Sekundarstufe *vertraut* machen können. Allgemeine Exponenten und das Exponentieren werden erst viel später thematisiert.
- Die Formulierung des „Wurzel-Ziehens“ beschreibt eine *Handlung* und ist durch ihre Anknüpfung an „Alltagssprache“ *suggestiv*.
- Quadratwurzeln natürlicher Zahlen lassen sich mit Zirkel und Lineal *geometrisch konstruieren* (zum Beispiel mit der Wurzel-Spirale).
- Mancherorts wird die Quadratwurzel einer Zahl noch *händisch berechnet* (schriftliches Wurzelziehen, näherungsweise: Heron-Verfahren).

Derart „konstruktive“ Gründe scheinen dazu zu führen, dass das Radizieren von den Lernenden eher akzeptiert wird und kaum je Verständnisprobleme aufwirft (obschon Objekte wie $\sqrt[2{,}3]{4}$ alles andere als selbsterklärend sind).

3. Den Logarithmus verständlich machen

Zentrale fachliche Aspekte des Logarithmus sind der Logarithmus a) als Exponent, b) als Inversoperation (Wolff 1961), c) als Überführung einer multiplikativen in eine additive Struktur, d) als Funktion und e) als Wachstumsmodell (Büchter und Leuders 2005). Verglichen mit den konstruktiven

Seiten des Wurzel-Begriffs haben all diese Aspekte nur wenig Potenzial für Konstruktivität. Dennoch nimmt sich die Didaktik dieses Problems – so weit ich sehe – nicht an und macht nur punktuelle Vorschläge, wie der Logarithmus verständlich(er) gemacht werden könnte. Zum Beispiel:

- Nachzeichnen der historischen Entwicklung des Symbols (Appel 1992)
- Operatives Erarbeiten des Logarithmus (Büchter und Leuders 2005)
- Diskutieren typischer „misconceptions“ (Boon Liang und Wood 2005)
- Verwenden eines anderen, suggestiven Begriffs (z.B. „*a*-box of“ (Hammack und Lyons 1995), „Exponentensucher“ (Bennhardt 2009)) oder einer anderen Begriffsfassung des Logarithmus-Symbols (Gallin 2011).

Ein didaktisches Konzept, welches das Ziel hat, zentrale Begriffe verständlich zu machen, ist das Konzept der *Grundvorstellungen* (vom Hofe 1995). Grundvorstellungen verknüpfen mathematische Inhalte und Begriffe mit adäquaten Sach- und Handlungssituationen und geben so wieder, was sie aus fachlicher Sicht bedeuten. Solcherart als Scharnier zwischen Mathematik und Lebenswelt fungierend, unterstützen Grundvorstellungen das Sinnerleben und ein verständiges Mathematikmachen. Für natürliche und gebrochene Zahlen und für die Grundrechenarten sind bereits verschiedene Grundvorstellungen bestimmt worden. Auch auf der Sekundarstufe kennt man Grundvorstellungen, zum Beispiel zum Begriff der Funktion oder zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. Und wie könnte so eine Sach- und Handlungssituation zur Aufgabe „berechne den Zehnerlogarithmus von 50“ aussehen?

Ähnlich wie bei der Bestimmung der Grundvorstellungen von Grundrechenarten ist eine geeignete Anwendung bzw. Handlungssituation zu finden. Eine solche ist die Berechung der Stellenanzahl einer Zahl, ohne dass sie dazu ausgeschrieben werden müsste. So hat eine Million im Dezimalsystem sieben Stellen, während der Zehnerlogarithmus einer Million gleich 6 ist. Und die derzeit größte Primzahl $2^{43112609}-1$ hat 12'978'189 Stellen, weil $\log_{10}(2^{43112609}) = 43112609 \cdot \log_{10}(2) \approx 12978188{,}5$ ist. Damit kann der Logarithmus als *verallgemeinerte Stellenanzahl* aufgefasst werden: *Der Logarithmus* $\log_a b$ *berechnet die Anzahl Stellen von b im System zur Basis a, vermindert um 1.*

4. Indizien für die Tragfähigkeit der Stellenanzahl-Grundvorstellung

Wie alle Grundvorstellungen hat auch die verallgemeinerte Stellenanzahl ihre Grenzen. So bleibt erklärungsbedürftig, wie die Stellenzahl bei nicht-natürlicher Basis *a* zu verstehen ist. Und selbstverständlich kann sie nur für gewisse Fragestellungen produktiv gemacht werden, für andere nicht.

Dennoch wohnt ihr eine große Überzeugungskraft inne, vermutlich aufgrund ihres handlungsorientierten Charakters. Sie wird nicht nur sehr gut angenommen, sondern auch noch nach Jahren erinnert. Zwei Indizien:

- Nach der Einführung des Logarithmus (über verschiedene Grundvorstellungen) und des Lösens von Exponentialgleichungen geht es nach den Weihnachtsferien um die Logarithmusfunktion und deren Anwendungen. Zur Erkundung bearbeitet die Klasse den Auftrag, wie hoch der Graph des Logarithmus über der x-Achse liegt, wenn die x-Achse ein- resp. zweimal um den in cm gemessenen Erdäquator geschlungen wird. Eine leistungsschwache, aber engagierte Schülerin berechnet den ersten y-Wert zu 9,6 cm. Für den zweiten Wert erwartet sie den doppelten Wert, erhält aber 9,9 cm. Zuerst wundert sie sich über die Nichtlinearität des Logarithmus, um dann zu argumentieren: *„Weshalb liegt er nicht beim 19,2 cm (dem doppelten)? Ich denke, dass dies mit der Anzahl der Stellen zusammenhängt. Diese ändern sich ja nicht. Also ist, wenn man die Zahlen* [gemeint sind die x-Werte, C.W.] *als Exponent mit Basis schreibt, nur die Basis unterschiedlich. Nicht aber der Exponent."*
- Eine Schülerin soll in ihrer mündlichen Matura-Prüfung das uneigentliche Integral $\int_1^\infty 1/x \cdot \mathrm{d}x$ bestimmen. Zuerst notiert sie die Stammfunktion $\ln x$ und argumentiert dann: „$\ln x$ *geht für x gegen* ∞ *ebenfalls gegen* ∞*, denn mit zunehmendem x nimmt auch dessen Stellenanzahl zu!*"

Welche weiteren Grundvorstellungen des Logarithmus den Schülerinnen und Schülern eine solide Argumentationsbasis anbieten, um Mathematik verständig zu betreiben, wird an anderer Stelle zu klären sein.

Literatur

Appel, H. (1992): Zur Schreibweise der Logarithmusfunktion. In: PM 34, 16–18.

Bennhardt, D. (2009): Der Logarithmus – tradierte Fachbegriffe oder sinnstiftende Kreativität. In: Praxis der Mathematik in der Schule 51(29), 44–45.

Boon Liang, Ch., Wood, E. (2005): Working with Logarithms: Students' Misconceptions and Errors. In: The Mathematics Educator 8(2), 53–70.

Büchter, A., Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Cornelsen.

Felgner, U. (2005): Über den Ursprung des Wurzelzeichens. In: Math. Sem.ber. 52, 1–7.

Gallin, P. (2011): Mathematik als Geisteswissenschaft. In: M. Helmerich et al. (Hrsg.): Mathematik Verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven. Vieweg und Teubner, 105–116.

Hammack, R., Lyons, D. (1995): A Simple Way to Teach Logarithms. In: Mathematics Teacher 88(5), 374–375.

vom Hofe, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Spektrum.

Wolff, G. (1961): Handbuch der Schulmathematik, Bd. 1. Schroedel Verlag.