Uta HAESEL-WEIDE, Dortmund

Ablösung vom zählenden Rechnen: Struktur-fokussierende Deutungen

Dass mathematische Muster und Strukturen zum (flexiblen) Rechnen genutzt werden, gilt als Konsens in der Mathematikdidaktik. Gleichermaßen ist bekannt, dass Kinder, die verfestigt zählend rechnen, keine Beziehungen zwischen Zahlen und Operationen sehen und nutzen. Bei der Ablösung vom zählenden Rechnen ist deshalb ein zentrales Ziel, mathematische Strukturen zu erkennen, zu konstruieren und zu nutzen. Im Rahmen des ZebrA-Projekts (Zusammenhänge erkennen und besprechen – Rechnen ohne Abzählen) wurden unterrichtsintegrierte Förderbausteine entwickelt, um Kinder gezielt anzuregen, verschiedene strukturelle Deutungen als Alternative zum zählenden Rechnen zu entwickeln und untereinander zu diskutieren.

Eine mathematische Struktur kann auf zweierlei Weisen in den Blick genommen werden. Strukturen, als „Beziehungen zwischen den Bestandteilen eines Musters“ (Lüken, 2010, S. 573) können beschrieben, fortgesetzt oder mit der Struktur eines anderen Musters verglichen werden. Erkannte Strukturen können bei der Lösung von Aufgaben eines Musters genutzt werden, z.B. wird das Ergebnis von 17-7=10 genutzt, um das Ergebnis der Aufgabe 17-8= __ zu ermitteln. Dabei sind die Strukturen nicht empirisch greifbar und sichtbar, sondern müssen von jedem Individuum in die Zeichen hineingedeutet werden (vgl. Steinbring, 2000). Es geht also darum, in bzw. zwischen den Zeichen eines Musters Strukturen zu erkennen bzw. zu konstruieren. Dies ist für zählend rechnende Kinder eine Herausforderung, da verfestigt zählendes Rechnen dadurch charakterisiert wird, dass eben kein Zusammenhang zwischen Aufgaben hergestellt wird, sondern Aufgaben isoliert voneinander betrachtet und bearbeitet werden. Zur Ablösung vom zählenden Rechnen ist es jedoch notwendig, Beziehungen zwischen Zahlen und Operationen zu erkennen und zu nutzen, da jedes andere Vorgehen beziehungsreiches Handeln erfordert.

Während in einer quantitativen Studie die Wirksamkeit der Förderung untersucht wird (vgl. Wittich, Nührenbörger & Moser Opitz, 2010), stellt die hier vorgestellte qualitative Studie die Art und Weise der Auseinandersetzung der zählend rechnenden Kinder mit den Bausteinen dar. Dazu wird ein Spektrum an verfestigt zählenden Rechnern ausgewählt, deren Deutungen bei der Arbeit an den Förderbausteinen analysiert wird. Um vielfältige Deutungsprozesse anzuregen, arbeiten die Kinder in einem kooperativen Setting in einem heterogen zusammengesetzten Partnerteam und werden durch das methodische Design immer wieder zum Austausch über die Aufgaben angeregt. Diskursive Aufgaben und die möglicherweise unterschiedlichen Deutungen der Kinder haben das Ziel, die zählend rechnenden Kinder zu einer Sicht auf Strukturen anzuregen und ihre Deutungen zu erweitern. Aus Sicht der qualitativen Studie interessiert, welche Deutungen die Kinder vornehmen: Inwiefern fokussieren sie auf Zählaktivitäten während der Deutung der Aufgabe oder (und wenn ja, wie) sind sie in der Lage, mathematische Strukturen zu erkennen und zu nutzen? Welche Zahl- oder Aufgabenbeziehungen werden von ihnen auf welche Weise gesehen?

Einblick in den Baustein: Verwandte Subtraktionsaufgaben

In der Fördereinheit „Verwandte Subtraktionsaufgaben“ beschäftigen sich die Kinder mit Aufgabenpaaren, die sie zunächst für sich allein lösen bzw. zu einer vorgegebenen Aufgabe selbst entwickeln sollen (vgl. Abb. 1). In einem zweiten Schritt werden strukturell parallele Aufgabenpaare miteinander verglichen (vgl. Abb. 2). Über die zu findenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede soll ein Blick über die einzelnen Zahlen und Aufgaben hinaus auf die mathematische Struktur gerichtet werden.

Erster Schritt: Aufgabenpaare lösen

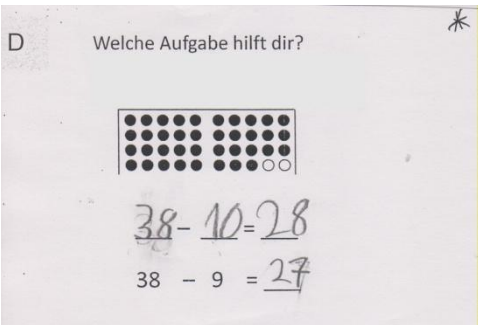

Abb. 1: Bearbeitung von Mary

Die Schülerin Mary findet zur vorgegebenen Aufgabe 38-9=__ eine passende einfache Aufgabe. Diese löst sie auch zuerst, allerdings zählt sie dabei an den Fingern rückwärts. Anschließend schaut sie auf die gegebene Aufgabe, sagt: „Das ist dann einer weniger“ und notiert 27 als Ergebnis von 38-9. Mary sieht also an dieser Stelle eine Struktur in den Zeichen. Sie betrachtet die Zahlbeziehungen von 10 und 9 und überträgt diese Beziehung auf die Ergebnisse. Dass die Verringerung des Subtrahenden zu einer Erhöhung der Differenzen führt, beachtet sie nicht. Die Szene zeigt zweierlei:

(1) Mary leitet aus dem Ergebnis einer zählend ermittelten Aufgabe das Ergebnis der Nachbaraufgabe ab. Obwohl sie das Ergebnis der aus mathematikdidaktischer Sicht „einfachen“ Aufgabe 38-10 nicht abrufen kann, scheint sie in der Lage zu sein, Strukturen zu erkennen und ist motiviert, diese auch zu nutzen.

(2) Ferner reicht das Erkennen von Zahlbeziehungen bei den Nachbaraufgaben zur Subtraktion nicht aus, um Aufgabenbeziehungen zu

konstruieren. Dies ist nur möglich, wenn die Beziehungen unter Berücksichtigung der Operationen betrachtet werden.

Zweiter Schritt: Aufgabenpaare vergleichen

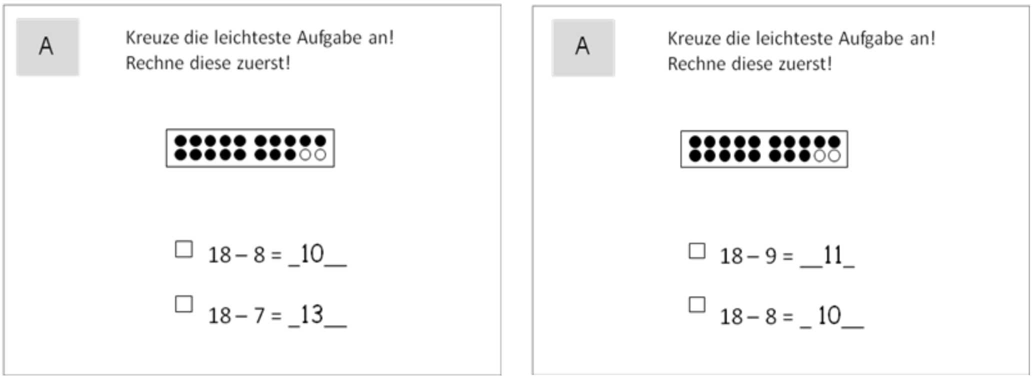

Abb. 2a & 2b: Karte von Thomas Karte von Max

Dem Schülerpaar Thomas und Max aus einer zweiten Klasse mit Gemeinsamen Unterricht liegen folgende bearbeitete Karten vor (vgl. Abb. 2a & 2b). Die Kinder haben bereits festgestellt, dass die Aufgabe 18-8 auf beiden Karten gleich ist. Die Lehrerin kommt nun hinzu und fordert die Kinder auf auch zu betrachten, was unterschiedlich ist.

Thomas Hey hier ist das ja neun (*zeigt auf die „9“ der Aufgabe „18 – 9 = 11“*) und da ist es acht (*zeigt auf die „8“ der Aufgabe „18 – 8 = 10“ auf seinem Arbeitsblatt*) also einer mehr ist es dann und da (*zeigt auf die „18“ der Aufgabe „18 – 7 = 13“*) ist einer weniger.

Lehrkraft Mhm. (*7 sec. Pause*) Stimmen denn dann auch alle Ergebnisse so wie sie sind?

Thomas Mmm nein. Da hab ich zehn (*zeigt auf die „10“ der Aufgabe „18 – 8 = 10“*) und dreizehn (*zeigt auf die „13“ der Aufgabe „18 – 7 = 13“*) und Max hat zehn (*zeigt auf die „10“ der Aufgabe „18 – 8 = 10“ auf Ms Arbeitsblatt*) und elf (*zeigt auf die „11“ der Aufgabe „18 – 9 = 11“*).

Der zählende Rechner Thomas beschreibt die Beziehungen zwischen den Subtrahenden. Er fokussiert auf das sich verändernde Zeichen in den vorgegebenen Aufgaben und betrachtet den Ausschnitt aus der Folge der natürlichen Zahlen (7, 8, 9). Dabei scheint er die Subtrahenden als Mengen zu deuten und die Veränderungen ebenfalls kardinal zu betrachten. Obwohl eine Zahlenfolge betrachtet wird, deutet Thomas diese nicht im Kontext des zählenden Rechnens, sondern zeigt eine Deutung mit Blick auf Strukturen zwischen Zahlen. Allerdings zieht er keine Folgerungen für die Aufgabenbeziehung. Weder von sich aus noch auf Nachfrage der Lehrerin scheint er die Konsequenzen aus den Beziehungen der Subtrahenden für die Ergebnisse zu betrachten. Thomas bleibt bei der Betrachtung der Zahlbeziehung und nimmt keine Aufgabenbeziehung in den Blick.

Zusammenfassende Interpretation beider Szenen

Beide Szenen zeigen Deutungen verfestigt zählend rechnender Kinder, die über den Bezug zum Zählen hinaus gehen. Es wird sichtbar, dass die Kinder die für die Aufgabenpaare zentrale Struktur der sich im Sinne der Zahlreihe verändernden Subtrahenden erkennen. Diese wird von beiden Kindern kardinal interpretiert, d.h. sie zeigen an dieser Stelle, dass sie Zahlen eine andere Bedeutung zuweisen können als die Funktion als Zählzahl. Mary nutzt die erkannte Zahlbeziehung, um die Ergebnisse in analoger Beziehung zu bestimmen. Sie hat die Motivation, das zählend ermittelte Ergebnis zu nutzen, um sich weitere langwierige Zählprozesse zu ersparen (vgl. Gaidoschik, 2010). Allerdings berücksichtigt sie die gegensinnigen Veränderungen nicht, die bei dieser Art der Verwandtschaft von Subtraktion gelten. Thomas zieht keine Folgerungen aus den erkannten Beziehungen der Subtrahenden für die Ergebnisse. Auch auf Nachfrage der Lehrerin scheint er keine Beziehungen zwischen den sich verändernden Subtrahenden und entsprechenden Differenzen zu sehen. Allerdings erkennt auch sein leistungsstärkerer Partner an dieser Stelle nicht, dass die Ergebnisse so nicht stimmen können. Beide Szenen zeigen die Komplexität, die bewältigt werden muss, um Strukturen zwischen Nachbaraufgaben bei der Subtraktion zum Ableiten von Ergebnissen zu nutzen. Aus den erkannten Zahlbeziehungen unter Berücksichtigung der Operationen Erkenntnisse für die Ergebnisse zu ziehen, scheint (nicht nur) für zählend rechnende Kinder eine große Herausforderung zu sein. Ablöseprozesse vom zählenden Rechnen bewegen sich im Spannungsfeld einer ersten Annäherung an Zahlbeziehungen bei gleichzeitiger Aufrechterhaltung von zählenden Vorgehensweisen und nur einer geringen Fokussierung auf Operationsbeziehungen. Sie sind durch einzelne Fördermaßnahmen in Bewegung zu bringen, aber nicht leicht aufzulösen.

Literatur

Gaidoschik, M. (2010). Wie Kinder rechnen lernen - oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt a. M: Peter Lang.

Lüken, M. (2010). Ohne "Struktursinn" kein erfolgreiches Mathematiklernen - Ergebnisse einer empirischen Studie zu Bedeutung von Mustern und Strukturen am Schulanfang. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 573-576

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion - Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. In: Journal für Mathematikdidaktik, 1, 28-49.

Wittich, C.; Nührenbörger, M. & Moser Opitz, E. (2010). Ablösung vom zählenden Rechnen – Eine Interventionsstudie für die Grund- und Förderschule. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 935-938.