Bianca BEUTLER, Braunschweig

„Das ist das gleiche, nur anders." – Vorschulkinder erkennen geometrische und arithmetische Beziehungen beim Umstrukturieren von Flächen und Bauwerken

Eine fortgeschrittene Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung zeigt sich unter anderem im Erkennen und Nutzen geometrischer und arithmetischer Beziehungen. Die Entwicklung der Strukturierungsfähigkeit wird daher maßgeblich sowohl von der Entwicklung geometrischer als auch von der Entwicklung arithmetischer Fähigkeiten vorangetrieben. Doch wie genau greifen die verschiedenen mathematischen Entwicklungsverläufe ineinander? Lassen sich Indizien für übergeordnete Entwicklungsprozesse finden?

1. Erkenntnisse zur Fähigkeit räumlicher Strukturierung

Die Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung äußerst sich in der Strukturerkennung, -herstellung und -nutzung bei verschiedenen geometrischen Anordnungen und Größen, insbesondere beim Erfassen von Konfigurationen zwei- oder dreidimensionaler Elemente. Die individuelle Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung verhält sich nach Mulligan und Mitchelmore (z. B. 2009) aufgabenübergreifend konsistent und verändert sich nur im zeit-lichen Verlauf. Interindividuell reichen die kindlichen Repräsentationen vom Fehlen jeglicher struktureller Elemente bis hin zur vollständigen Integration numerischer und räumlicher Strukturelemente. Im Modell zur „Entwicklung von Strategiekomplexen zur räumlichen Strukturierung am Beispiel von Bildern zu Würfelkonfigurationen" von Merschmeyer-Brüwer (2001) sowie in der Beschreibung von Ebenen der „visuellen Strukturierungsfähigkeit" beim Umgang mit arithmetischen Anschauungsmitteln nach Söbbeke (2005) wird weiterhin deutlich, dass eine geringe Strukturierungsfähigkeit mit konkreten empirischen Deutungen, dem Beachten einzelner sichtbarer Elemente, einem stark zerlegenden Gliedern und dem Abzählen in Einerschritten verbunden wird. Für Würfelbauwerke erfolgt oft eine Orientierung an einzelnen Flächen anstelle des Erfassens dreidimensionaler Elemente. Eine hohe Strukturierungsfähigkeit zeigt sich hingegen im Strukturieren einer Konfiguration in Subeinheiten, im Beachten von Beziehungen zwischen Einzelelementen und den Subeinheiten sowie in strukturbezogenen Abzählstrategien bzw. im Ermitteln einer Anzahl durch Rechenoperationen. Söbbeke ergänzt die Fähigkeit strukturellen Umdeutens.

Die Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung steht weiterhin in hoher Korrelation zur allgemeinen Mathematikleistung (vgl. Lüken 2012) und sie entwickelt sich bei leistungsschwächeren Kindern nicht immer positiv (vgl. Mulligan, Mitchelmore & Prescott 2005). Letzteres ist besonders problematisch, da Strukturierungsfähigkeit gerade für die sinnvolle Nutzung arithmetischer Anschauungsmittel als wesentlicher Schritt zur Ausbildung arithmetischer Konzepte benötigt wird (vgl. Söbbeke 2005, Lorenz 1992).

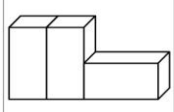
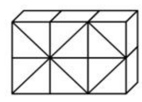
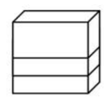
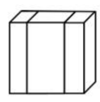
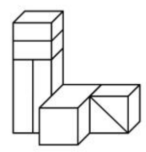
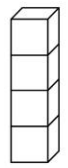
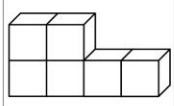
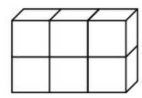
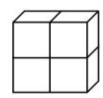
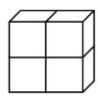
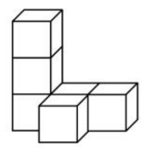
2. Die Entwicklung des Teil-Ganzes-Konzepts

Ein für die Zahlbegriffsentwicklung wesentliches arithmetisches Konzept, das aus theoretischer Sicht in einem Zusammenhang zu räumlichen Fähigkeiten steht, ist das Teil-Ganzes-Konzept (vgl. Beutler 2011). Nach Resnick (1989) ist es zunächst als protoquantitatives Schema verfügbar und bezieht sich somit auf nicht exakt quantifizierte Mengen. Mit dem Erwerb von Zahlwortreihenfolge und Zählprinzipien beginnt eine Integration von Mengen- und Zahlenwissen, sodass Teil-Ganzes-Beziehungen bei exakten Mengen innerhalb der „mathematics of quantities“ nun handelnd und zählend auswertbar sind. Erst auf der Ebene der „mathematics of number“ wird das Teil-Ganzes-Konzept auf Anzahlen bezogen. Mit zunehmender Erfahrung werden Zahlentripel für derartige Zahlbeziehungen abgespeichert, sodass nichtzählende Rechenstrategien möglich werden (vgl. auch Gaidoschik 2010).

3. Empirische Studie zu Zusammenhängen von Strukturierungsfähigkeit und dem Anwenden des Teil-Ganzes-Konzepts

In einem Dissertationsprojekt zur Untersuchung von Zusammenhängen zwischen der Fähigkeit zum räumlichen Strukturieren und dem Fortschritt der Zahlbegriffsentwicklung werden 25 Vorschulkinder einerseits durch den standardisierten Test TEDI-MATH hinsichtlich ihrer numerisch-rechnerischen Fähigkeiten verortet, andererseits dienen halbstandardisierte Interviews mit Aufgaben zur räumlichen Strukturierung einer qualitativen Analyse von Lösungen und Bearbeitungsstrategien. Die entwickelten Aufgabensequenzen thematisieren die Seriation, das Bestimmen von Anzahlen, das Angleichen von Strukturen, das Wiedererkennen von Teilstrukturen, das Umstrukturieren und das Vervollständigen von Strukturen. Zum Einsatz kommen Konfigurationen aus Punkten, Quadraten, konkreten Würfeln sowie Schrägbilder von Würfelbauwerken. In einer Aufgabensequenz zum Umstrukturieren konkreter Bauwerke werden den Kindern nacheinander sechs verschiedene Bauwerke aus nichtwürfelförmigen Bausteinen unter einem Plexiglaskasten präsentiert. Die Kinder sollen jeweils die Anzahl an Würfeln ermitteln, die sie für ein Würfelbauwerk gleicher Größe benötigen, und anschließend das Würfelbauwerk herstellen. Nachdem der Plexiglaskasten entfernt wird, dürfen die Kinder vorgegebenes und hergestelltes Bauwerk zusammenstellen und noch einmal vergleichen. Gegebenenfalls sollen die Kinder ihr Bauwerk korrigieren und erneut die Anzahl benötigter Würfel ermitteln.

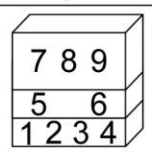
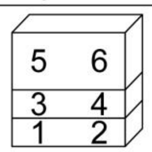
Die Aufgabensequenz beinhaltet drei Typen intendierter Umstrukturierung: Zerlegen, Zusammenfassen sowie Zerlegen und Zusammenfassen:

Intendierte Umstrukturierung	Zerlegen in kleinere Einheiten		Zusammenfassen zu größeren Einheiten	Gleichzeitiges Zerlegen und Zusammenfassen zu neuen Einheiten		
Nr.	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Vorgegebene Bauwerke						
Herzustellende Bauwerke						

4. Erste Ergebnisse zum Umstrukturieren von Bauwerken

Um Zusammenhänge von Strukturierungsfähigkeit und arithmetischen Fähigkeiten zu identifizieren, werden zu allen Aufgabensequenzen die Videos, Transkripte und Zeichnungen hinsichtlich Lösungskorrektheit, erfolgter Strukturierung, Strategien der Anzahlerfassung, Verwendung arithmetischer Konzepte und aufgabenspezifischer Aspekte analysiert.

In der Aufgabensequenz zum Umstrukturieren ergibt sich zunächst aus der Anzahl korrekter Lösungen das Anspruchsniveau der Aufgaben (A1 als Absicherung des Aufgabenverständnisses bleibt unbeachtet): Bei A2 nennen 18 von 25 Kindern zu Beginn die korrekte Anzahl an benötigten Würfeln, bei A3 sind es 15 und bei A4 bis A6 nur 5 oder 6 Kinder. Aufgaben zum Umstrukturieren im Sinne eines Zerlegens in kleinere Einheiten scheinen damit am leichtesten zu sein. Eine Analyse aller erfolgten Umstrukturierungen während der ersten Anzahlermittlung ergibt, dass fast alle Kinder in kleinere Einheiten zerlegen, sie jedoch nur selten zu größeren Einheiten zusammenfassen (zu Aufgabe A4 siehe Abbildung; die Zahlen entsprechen den beobachteten Zählprozessen).

Häufigste Strukturierung bei der Ermittlung der Anzahl benötigter Würfel in Aufgabe A4: **Zerlegen in kleinere Einheiten**	
ohne Systematik	mit Systematik
	

Anwendungen des Teil-Ganzes-Konzepts zeigen sich in ordinalen Strategien wie *Alles Auszählen* oder *Weiterzählen*, in Mischstrategien mit Verwendung von Ordinal- und Kardinalzahlen sowie in kardinalen Anzahlbenennungen von Teil- und Gesamtmengen. Während die meisten Strategien der „mathematics of quantities“ nach Resnick zuzuschreiben sind, finden sich auch Strategien der „mathematics of numbers“, insbesondere wenn die Kinder Rechenfakten aufsagen und auf Mengenbeziehungen anwenden.

Eine Voraussetzung für die Entwicklung des Teil-Ganzes-Konzepts für Zahlen ist das Verwenden von Kardinalzahlen, das als ein Denken einer Menge „als Ganzes für sich“ (Gaidoschik 2010), d.h. als ein Zusammenfassen von einzelnen Elementen zu interpretieren ist. Als Weiteres ist ein Zusammendenken zweier Teil- zu einer Gesamtmenge gefordert. In den Untersuchungen fällt auf, dass Kinder häufig Strukturen in Teile zerlegen und diese meist auch mit Kardinalzahlen quantifizieren. Ein darauf aufbauendes Zusammenfügen der Teile zu einer Gesamtmenge lässt sich jedoch nur selten beobachten. Es ergeben sich Parallelen zur Fähigkeit zum Umstrukturieren, bei der sich ebenfalls das gleichzeitige Zerlegen und Zusammenfassen als besondere Schwierigkeit erwiesen hat. Dies lässt vermuten, dass generell ein Zerlegen schon auf niedrigeren und ein gleichzeitiges Zerlegen und Zusammenfassen erst auf höheren Entwicklungsstufen möglich ist.

Literatur

Beutler, B. (2011): Vorschulkinder integrieren Mengen- und Zahlenwissen beim Vergleichen und Verändern von Punktmustern. In: Haug, R. & Holzäpfel, L. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM Verlag.

Gaidoschik, M. (2010): Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt: Lang.

Lorenz, J. H. (1992): Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht – Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Göttingen: Hogrefe.

Lüken, M. (2012): Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht: Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern. Münster: Waxmann.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2001): Räumliche Strukturierungsprozesse bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen – Empirische Untersuchungen mit Augenbewegungsanalysen. Frankfurt: Lang.

Mulligan, J., Mitchelmore, M. & Prescott, A. (2005): Case Studies of Children’s Development of Structure in Early Mathematics: A Two-Year Longitudinal Study. In: Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Hrsg.): Proceedings of the 29th PME, 4. Melbourne: PME, 1-8.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009): Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. In: Mathematics Education Research Journal, 21, 33-49.

Resnick, L. B. (1989): Developing mathematical knowledge. In: American Psychologist, 44, 162-169.

Söbbeke, E. (2005): Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.