Michael SCHMITZ, Jena

Papierfalten auch im Mathematikunterricht
Begründungen und Beispiele

Unter Papierfalten wird oft die alte japanische Kunst des Origami verstanden. Dennoch gibt es auch bei uns in Deutschland eine Tradition für das Falten von Papier. Dabei kann man im Besonderen an Friedrich Fröbel (1782 – 1852) denken, der den pädagogischen Wert des Papierfaltens hervorhob, es mehr schematisch betrachtete und es in die Ausbildung von Kindergärtnerinnen integrierte. Interessant ist, dass um 1890 die japanische Regierung ein System der Vorschulerziehung einführte, das sich an westlichen Vorbildern orientierte. Sie übernahmen die Praktiken Fröbels, speziell das schematische Papierfalten, und richteten Kindergärten ein. Durch die Einführung dieses westlichen Systems konnte die eigene japanische Tradition des Papierfaltens gestärkt werden und führte zu einer breiten Basis für Origami in Japan (vgl. Lister, 2003).

Eine moderne Erklärung, was Origami ist, stammt von Kunihiko Kasahara: „Origami ist ein traditionelles Faltspiel, in dem bildnerisch-ästhetische, funktionelle und geometrisch-mathematische Prinzipien zusammenfließen.“ (Kasahara, 2000). Hier soll noch ergänzt werden, dass es im Origami auch hervorragende Möglichkeiten gibt, „eine handwerkliche Tätigkeit mit den geistigen Erfordernissen beim Erlernen und im Umgang mit der Mathematik hilfreich zu verbinden“ (Flachsmeyer, 2009). Damit ist aber auch schon das Ziel dieses kleinen Beitrages beschrieben: Es soll aufzeigt werden, dass Origami mathematische Überlegungen ermöglicht, die im Mathematikunterricht in vielfältiger Weise genutzt werden können. Außerdem wird an Hand von kurzen Hinweisen auf Beispiele deutlich, dass sich beim Papierfalten eine Vielzahl von Persönlichkeitseigenschaften und Kompetenzen (im Hinblick auf die Bildungsstandards) entwickeln lassen, womit sich auch die Einbeziehung des Papierfaltens in den Mathematikunterricht begründen lässt. Insbesondere unterstützt das Falten von Papier:

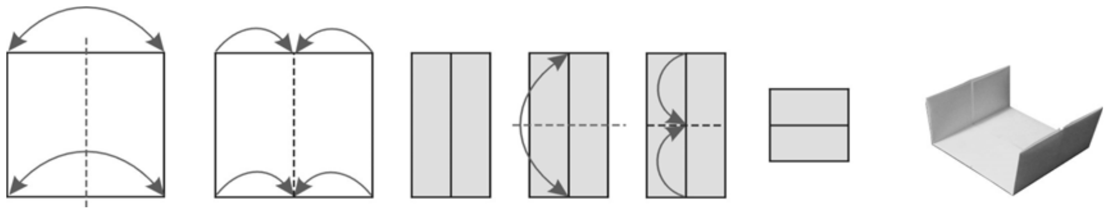
- die Entwicklung wichtiger Persönlichkeitseigenschaften und Kompetenzen (Beobachten, Vor- und Nachmachen, Sorgfalt, Genauigkeit, Sauberkeit, Ausdauer, Stärkung der Konzentration)
- die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- die Entwicklung der mathematischen Fachsprache
- die Begreifbarkeit der Mathematik
- weitere Übungsmöglichkeiten zu vielen Inhaltsbereichen

- das Sammeln von Erfahrungen im Problemlösen und regt zum Experimentieren mit Mathematik an
- die Entwicklung von Kreativität
- das differenzierte Arbeiten im Mathematikunterricht

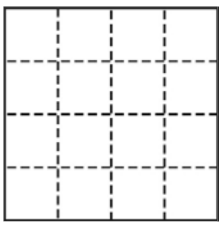
Die folgenden Beispiele sollen das obige verdeutlichen. Ausführliche Beschreibungen zu den genannten Beispielen, weitere Anregungen und Literaturhinweise findet man auf www.mathegami.de unter 'Downloads' bzw. 'Literatur'.

1. Beispiel (Würfel und Quader)

Aus einem quadratischen Blatt lässt sich leicht ein Modul für den Bau eines Würfels herstellen, wie es in der Bildfolge gezeigt ist.



Bei der Herstellung dieses Moduls kann man sehr gut über Eigenschaften von Quadraten und Rechtecken sprechen. Auch die Veränderung von Seitenlängen, Umfang und Flächeninhalt im Faltprozess kann thematisiert werden.

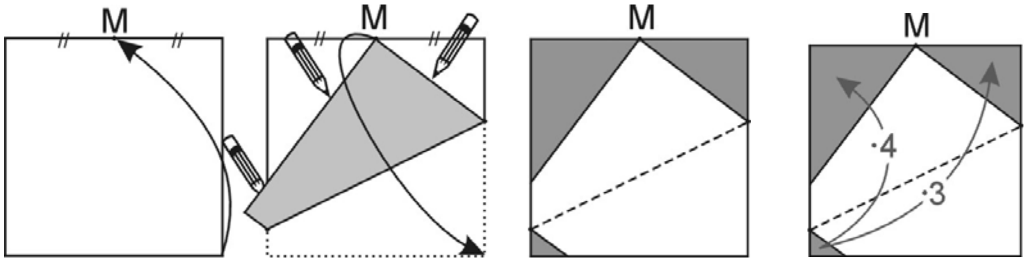


Öffnet man das kleine, zusammengefaltete Quadrat wieder, so erhält man das Ausgangsquadrat, welches in 16 kleine Quadrate durch Faltlinien eingeteilt ist. Nun kann man nach der Anzahl aller möglichen Quadrate beziehungsweise Rechtecke, die keine Quadrate sind, in diesem Faltmuster fragen.

Stellt man sechs Exemplare dieses Moduls her, so kann man daraus einen Würfel zusammenstecken. Durch dieses Herstellen werden die Eigenschaften eines Würfels bewusster erlebt, seine Elemente (Ecken, Kanten, Flächen) besser wahrgenommen und Raumvorstellung entwickelt sich weiter. Nun kann experimentiert werden: Kann man ausgehend von den Würfelmodulen neue Module erfinden, mit denen man Quader bauen kann?

2. Beispiel (Satz von Haga)

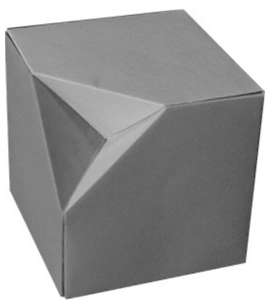
Ausgangspunkt ist wieder ein Quadrat, von dem man durch Falten den Mittelpunkt M einer Kante (im Bild die oben liegende) bestimmen.



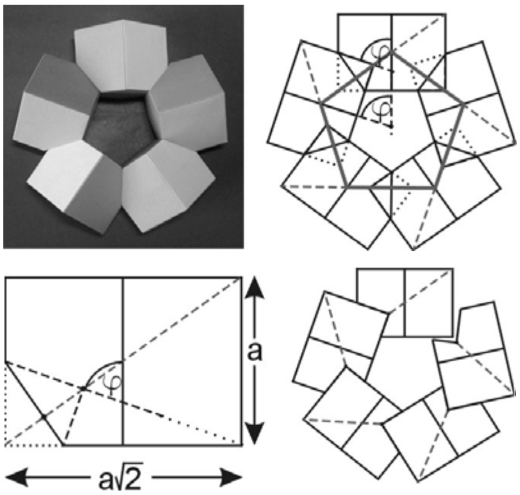
Nun faltet man die im Bild gezeigte Ecke auf diesen Kantenmittelpunkt und markiert die Faltlinie. Anschließend kennzeichnet man mit einem Stift die von M ausgehenden Kanten des umgefalteten Trapezes. Dieses Trapez ragt an einer Stelle über das Ausgangsquadrat hinaus. Ebenfalls markiert man mit einem Stift auf der Rückseite des Trapezes die zugehörige Quadratkante. Anschließend wird das umgefaltete Trapez wieder in seine Ausgangslage zurückgefaltet und auf dem Quadrat sind drei markierte Dreiecke zu sehen, wie es in der Bildfolge gezeigt ist. Nun kann man zeigen, dass diese drei Dreiecke ähnlich zueinander sind. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras kann man auch die Seitenlängen dieser drei Dreiecke berechnen. Dabei stellt man fest, dass es sich um pythagoreische Dreiecke handelt. Das ist der Satz von Haga. Aufgrund der Ähnlichkeit kann nun der Ähnlichkeitsfaktor der Dreiecke untereinander berechnet werden. Ausgehend vom kleinen Dreieck findet man die Ähnlichkeitsfaktoren 3 und 4, wie es im Bild oben rechts gezeigt ist. Da noch eine Ecke im Quadrat kein Dreieck enthält, kann man nun fragen, ob sich dort durch Umfalten des Ausgangsquadrates noch ein Dreieck erzeugen lässt, das zum kleinen Dreieck den Ähnlichkeitsfaktor 2 hat. Diese Fragestellung eröffnet z.B. die Möglichkeit zum Experimentieren. Dabei spielt natürlich neben dem Finden einer Lösungsmöglichkeit auch das Begründen der Richtigkeit des gewählten Verfahrens eine wichtige Rolle.

3. Beispiel (Kolumbuswürfel)

Aus den oben beschriebenen Würfelmodulen kann man auch Module machen, mit denen man den Kolumbuswürfel zusammenstecken kann (siehe www.mathegami.de).



Neben Körperberechnungen (Oberfläche und Volumen) kann man fünf solche Würfel zu einem Fünfeckring zusammensetzen.

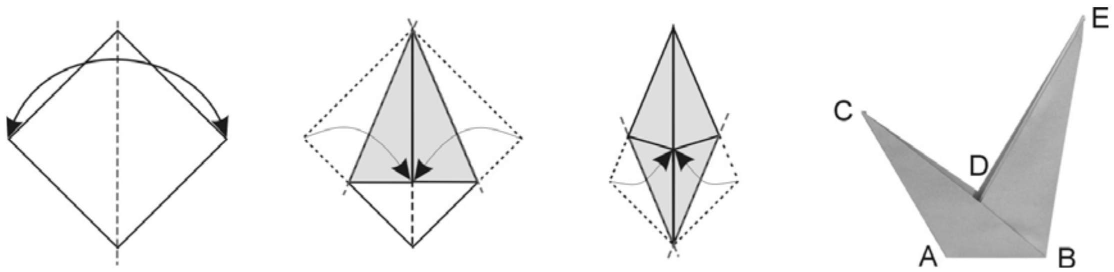


Links ist ein Foto eines solchen Fünfeckrings von oben und daneben eine schematische Zeichnung zu sehen. Es sieht so aus, dass dabei ein regelmäßiges Fünfeck gebildet wird, was natürlich zu hinterfragen ist.

Analysiert man die Situation, so muss man feststellen, dass der gesuchte Zentriwinkel nicht den gewünschten 72° entspricht. Folglich wird hier kein regelmäßiges Fünfeck gebildet. Neben der zugehörigen Rechnung, die Kenntnisse im Umgang mit trigonometrischen Funktionen voraussetzt, kann hier auch über (mathematische) Exaktheit und praktische Genauigkeit diskutiert werden.

4. Beispiel (Gras – Kongruenz von Dreiecken)

Auch hier ist ein Papierquadrat der Ausgang, in das zuerst eine Diagonale gefaltet wird. Der weitere Faltvorgang ist in der Abbildung gezeigt. Vom Quadrat kommt man dabei zuerst zu einem Drachenviereck und dann zu einem Rhombus. Beides kann natürlich begründet werden. Anschließend wird der Rhombus zu der Origamifigur 'Gras' zusammengelegt.



In dieser Figur sind die beiden sichtbaren Dreiecke ABC und DBE kongruent zueinander. Auch das kann begründet werden.

Literatur

Flachsmeyer, J. (2009): Mathematikdidaktische Belange des Origami. In: Math. Semesterberichte 56, 201-214.

Kasahara, K. (2000): Origami figürlich und geometrisch. Augustus.

Lister, D. (2003): Die Geschichte des Papierfaltens. Eine deutsche Perspektive. In: Der Falter, Nr. 35 - April 2003 (Teil 1), Nr. 37 - April 2004 (Teil 2).

www.papierfalten.de/documents/papierfalten-deutschland.pdf

Schmitz, M.: www.mathegami.de