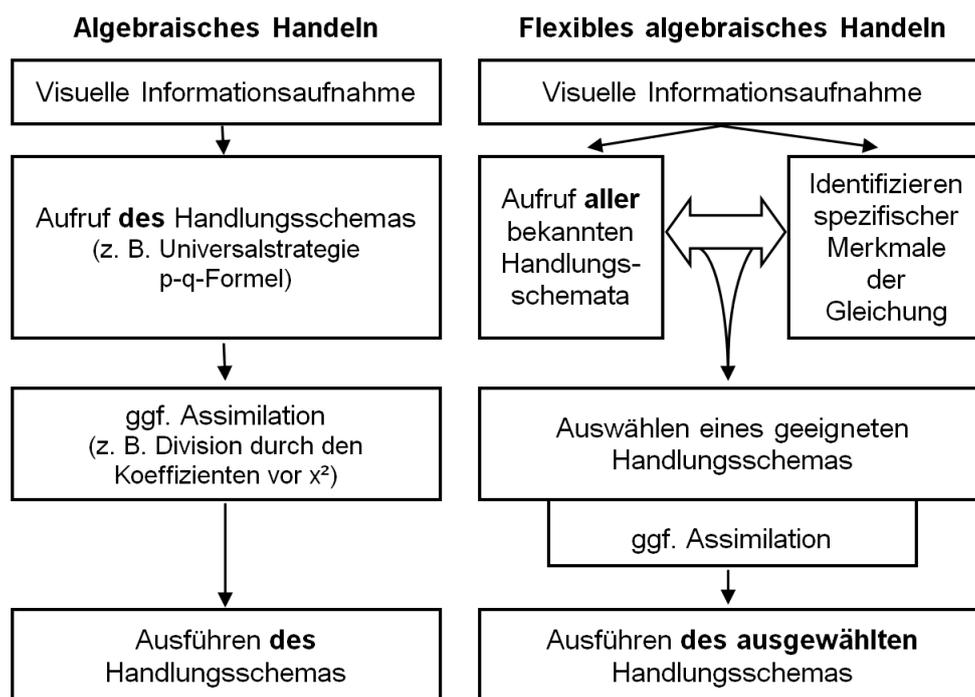


Jan BLOCK, Braunschweig

## „Aber das rechnet man doch mit der p-q-Formel!“ – Wie erfassen Schülerinnen und Schüler Merkmale quadratischer Gleichungen?

Von Schülerinnen und Schülern wird am Ende der Sekundarstufe I erwartet, dass sie verschiedene Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen anwenden können (vgl. z. B. KMK 2004, 15). Hierzu gehören insbesondere die Anwendung einer Lösungsformel, das Verfahren mit quadratischer Ergänzung, das Faktorisieren bzw. Ablesen der Lösungen aus einer Faktorisierung unter Kenntnis der Nullteilerfreiheit und das Erkennen der Unlösbarkeit. Um mit einer möglichst geringen Anzahl möglichst fehlerunanfälliger Rechnungen zur Lösung zu gelangen, sind die Verfahren je nach Merkmalen der Gleichung mehr oder weniger geeignet.

Die Fähigkeit, eine in diesem Sinne adäquate Bearbeitungsmethode zur Lösung einer algebraischen Problemstellung auszuwählen, lässt sich in Anlehnung an den Begriff des flexiblen Rechnens in der Arithmetik (z. B. Rathgeb-Schnierer 2006) als flexibles algebraisches Handeln bezeichnen. Dies ist von den spezifischen Aufgabenmerkmalen und den Mitteln des Lernenden abhängig. Flexibles algebraisches Handeln ist gebunden an Aufgabenstellungen, zu deren Bearbeitung es mindestens zwei unterschiedliche Wege gibt. Für quadratische Gleichungen lässt sich dieses einem algebraischen Handeln gegenüberstellen, bei dem nur eine Universalstrategie zur Verfügung steht.



Algebraisches Handeln entspricht einem Modell von Malle zur Beschreibung des Bearbeitungsprozesses bei algebraischen Termumformungen (vgl. Malle 1993, 163ff). Wesentliches Merkmal des Modells zum flexiblen algebraischen Handeln sind die kognitiven Verarbeitungsprozesse, bei denen den wahrgenommenen Merkmalen Bedeutungen zukommen, sodass zwischen den aufgerufenen Schemata und den wahrgenommenen spezifischen Merkmalen Beziehungen hergestellt werden können. Diese führen dann zur begründbaren Auswahl eines geeigneten Handlungsschemas.

In einer explorativ angelegten Laborstudie wird mit Mitteln qualitativer Forschung der Frage nachgegangen, inwieweit Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe die Identifikation spezifischer Merkmale quadratischer Gleichungen gelingt und welche Bedeutungszuweisungen vorgenommen werden.

Zur Beantwortung dieser Frage bedarf es geeigneter Aufgabenstellungen, die über das Lösen quadratischer Gleichungen hinausgehen. Analysen von Lösungswegen der Probanden oder von Retrospektiven der Probanden auf ihre Lösungswege geben nur indirekt Hinweise auf die zu rekonstruierenden kognitiven Prozesse beim Erfassen der Gleichungen. Hinweise auf prominente Merkmale, die von den Probanden erfasst werden, können jedoch gewonnen werden, wenn eine oder mehrere Gleichungen gleichzeitig vorgelegt werden, ohne dass das Lösen Ziel der Auseinandersetzung ist. Vielmehr müssen die Aufgabenstellungen eine Reflexion der vorliegenden Gleichungen ermöglichen. Derartige, auf einer Metaebene angesiedelte Aufgabenstellungen, werden in dieser Studie als Metaaufgaben bezeichnet. Sie beinhalten einen analysierenden oder generierenden Umgang mit einer Menge von Aufgaben (hier Gleichungen), die in einem für die die Metaaufgabe bearbeitende Person erkennbaren Zusammenhang stehen müssen.

#### Typen von Metaaufgaben (unterschieden nach Tätigkeiten)

Analysieren	Sortieren	nach selbst zu formulierenden Kriterien
		nach subjektiven Kriterien
		nach objektiven Kriterien
	Beschreiben/ Begründen	einer vorgelegten Sortierung in Gruppen
einer vorgelegten Sortierung in einer Reihenfolge		
Generieren	Erfinden	als Fortsetzung einer Folge
		in einem vorgegebenen fachlichen Kontext
	Variieren	ausgehend von einer Initialaufgabe

Es werden zwei Typen von Metaaufgaben unterschieden: Bei analysierenden Metaaufgaben kann eine vorgegebene Menge von Aufgaben auf verschiedene Arten analysiert werden. Bei generierenden Metaaufgaben hingegen entwickeln die Probanden ausgehend von einem Kontext oder einer Initialaufgabe neue Aufgaben, deren Zusammenhang zum vorgegebenen Kontext oder zur Initialaufgabe beschrieben werden muss.

In der Studie bearbeiten die Probanden drei Aufgabenstellungen:

Aufgabe 1: Gegeben ist die quadratische Gleichung  $x^2 + 2x - 6 = 0$ .  
Erfinde ausgehend von dieser Gleichung durch Veränderung neue Gleichungen.

Bei Aufgabe 1 handelt es sich um eine generierende Metaaufgabe, um das Variieren einer Initialaufgabe ohne Vorgabe von Strategien. Schupp (2002) stellt das Variieren von Aufgaben durch Schülerinnen und Schüler ausführlich als Konzept für die Unterrichtsgestaltung dar, hier hingegen dient es einem diagnostischen Zweck. Die Wahrnehmung von spezifischen Merkmalen der Initialaufgabe ermöglicht erst deren zielgerichtete und begründbare Variation. Die Bearbeitung zeigt an, welche Merkmale der Gleichung erfasst und als relevant eingestuft werden. Erläuterungen der Versuchspersonen während des Entwickelns der Variationen erlauben es festzustellen, welches Wissen Verwendung findet und welche Überlegungen und Strategien zu der jeweiligen Variation geführt haben.

Aufgabe 2: Löse die Gleichungen.  
Die Reihenfolge der Bearbeitung ist beliebig wählbar.

Bei Aufgabe 2 müssen fünf quadratische Gleichungen gelöst werden, die sich hinsichtlich der Syntax der Gleichungen und der auftretenden Terme und bzgl. der geeigneten Lösungsverfahren unterscheiden. Funktion von Aufgabe 2 ist es, zu erfassen, welche Lösungsverfahren von den Probanden verwendet werden und wie der Umgang mit diesen Verfahren beherrscht wird bzw. welche Fehler auftreten.

Aufgabe 3: Auf den 20 Karten sind Gleichungen gegeben. Sortiere die Karten mit den Gleichungen. Beachte: Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten die Karten zu sortieren.

Zu Aufgabe 3, einer analysierenden Metaaufgabe, erhalten die Probanden 20 Karten mit quadratischen Gleichungen, die so ausgewählt sind, dass ein breites Spektrum bzgl. der anwendbaren Lösungsverfahren und der syntaktischen Unterschiede in der Gestalt der Gleichungen und auftretenden Terme abgedeckt ist. Weitere Sortierkriterien können semantische Aspekte wie z. B. Bezüge zu den zugehörigen Graphen entsprechender Parabeln oder subjektive Kriterien, etwa die Vermeidung negativer Zahlen, sein. Durch

das Nennen der Sortierkriterien werden die bewusst wahrgenommenen Merkmale erkennbar. Mit Hilfe der verbalisierten Begründungen für die Sortierungen soll erfasst werden, welche Bedeutungen den Merkmalen jeweils zugeschrieben werden.

Die Auswertungen einer Vorstudie zeigen, dass die verwendeten Metaaufgaben geeignet sind, Hinweise auf kognitive Prozesse der Wahrnehmung und Bedeutungszuweisung, die beim flexiblen algebraischen Handeln relevant sind, zu erhalten. Bei der Auswertung von Aufgabe 3 wird deutlich, dass zahlreiche Zusammenhänge eine Rolle spielen. Vorgelegte Sortierungen und deren Begründungen lassen z. B. die Analogiebildung der Probanden zu Prozessen beim Lösen linearer Gleichungen (Isolieren der Variablen; Prinzip des Gegenoperators, vgl. z. B. Vollrath 1999) erkennen. Ebenso tritt die Bedeutung des Verständnisses für das Gleichheitszeichen (vgl. z. B. Siebel 2005) hervor, wenn Probanden nach der „Größe der Ergebnisse der Gleichung“ sortieren und hiermit nicht die Lösungen der Gleichung meinen, sondern die Zahl oder den Term auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens. Ein dominierender Aspekt bei den Sortierungen ist das Auftreten von Klammern in den Termen der Gleichung. Insbesondere die Anwendbarkeit binomischer Formeln auf die Terme der Gleichung wird als relevantes Kriterium genannt, selbst wenn dies im Widerspruch zu den verwendeten Lösungsverfahren bei Aufgabe 2 steht.

Die Studie lässt Hinweise für eine praxisnahe Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsentwicklung zum Thema quadratische Gleichungen erwarten. Die Relevanz von Metaaufgaben für diagnostische Zwecke und ihr Einsatz im Unterricht im Hinblick auf flexibles algebraisches Handeln werden reflektiert.

## **Literatur**

- KMK (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz) (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003. Köln: Luchterhand.
- Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig: Vieweg.
- Rathgeb-Schnierer, E. (2006): Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Hildesheim: Franzbecker.
- Schupp, H. (2002): Thema mit Variationen. Hildesheim: Franzbecker.
- Siebel, F. (2005): Elementare Algebra und ihre Fachsprache. Mühlthal: Verlag allgemeine Wissenschaft.
- Vollrath, H.-J. (1999): Algebra in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum.