

Larissa ZWETZSCHLER, Dortmund

## **„Häh? Das geht doch gar nicht. (...) Man kann aber nicht einfach andere Werte einsetzen.“ – Erforschung eines Lernwegs zur Gleichwertigkeit von Termen**

Zahlreiche Studien belegen Schwierigkeiten im Umgang mit und beim Verständniserwerb von Termen (Malle 1993, Rosnick / Clement 1980, u.v.a), dies gilt auch für die Gleichwertigkeit von Termen, der inhaltlichen Verstehensbasis für das spätere Termumformen (Prediger 2009, u.v.a.). Vorgelegt wurden auch vielfältige Vorschläge für vorstellungsorientierte Unterrichtskonzepte hin zur Gleichwertigkeit von Termen (Wellstein 1978, Mason 2005 u.v.a.).

Wenig ist dagegen bisher über die tatsächlichen Lernprozesse bekannt: Wie entwickeln sich bei den Lernenden inhaltliche Vorstellungen zur Gleichwertigkeit? Welche Lernangebote brauchen die Lernenden, um die intendierten Vorstellungen zu entwickeln, und wie wirken diese Lernangebote?

### **1. Methodologischer Rahmen:**

#### **Fachdidaktischer Entwicklungsforschung**

Diese Fragestellungen werden im Rahmen der hier vorgestellten Studie im Programm der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Cobb & Gravemeijer 2006, Prediger & Link 2012) verfolgt, bei der das Design von Lehr-Lernarrangements mit der Beforschung der initiierten Lernprozesse eng verknüpft wird. Den methodischen Kern bilden Design-Experimente in Labor- und Klassensituationen in iterativen Entwicklungszyklen. Diese werden videographiert, transkribiert und interpretativ ausgewertet.

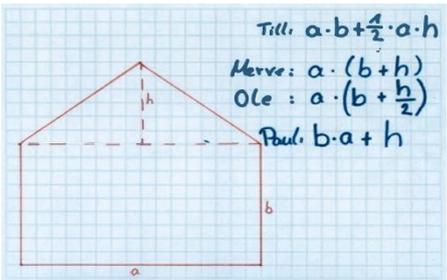
Die Studie wird im Rahmen des Dortmunder Forschungs- und Nachwuchskollegs FUNKEN (Fachdidaktische Entwicklungsforschung zu diagnosegeleiteten Lehr-Lernprozessen) durchgeführt.

### **2. Entwicklung des Lehr- Lernarrangements**

Die Konstruktion des Lehr- Lernarrangements für Schülerinnen und Schüler der 8. Klasse des mittleren Schulabschlusses orientiert sich an bereits in der Theorie skizzierten Lernwegen zur Gleichwertigkeit von Termen (Wellstein 1978, Mason 2005 u.v.a.): die gleichen geometrischen Figuren werden durch unterschiedliche Terme beschrieben (vgl. Aufgabe 1). Der Vergleich der Terme führt auf die inhaltliche Vorstellung der *Beschreibungsgleichheit*. Aus dieser Vorstellung wird anschließend die inhaltliche Vorstellung der *Einsetzungsgleichheit* und das Kalkül, die *Umformungsgleichheit* entwickelt (Prediger 2009 in Anlehnung an Malle 1993).

Typisch sind für die ersten beiden Schritte etwa folgende kognitive Aktivitäten aus Aufgaben, deren kontextuelle Einbindung hier aus Platzgründen ausgespart wird (aus Prediger, Zwetschler, Schmidt 2011):

(1) Welche Kinder berechnen den zu gleichen Flächeninhalt? Prüfe, ob die gegebenen Terme den Flächeninhalt der Graphik berechnen.



(2) Setze Zahlen in die Terme ein, um prüfen, welche gleichwertig sind. Was stellst du fest?

a	b	h	$a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$	$a \cdot (b+h)$
1	1	1	1,5	
1	2	1	2,5	
2	1	3	5	

Im Folgenden soll ein exemplarischer Einblick in die Empirie an dieser inhaltlich bedeutsamen Übergangsstelle von der Beschreibungsgleichheit zur Einsetzungsgleichheit gegeben werden.

### 3. Rekonstruierte Hürde im Lernprozess: Allgemeinheit von Term und Figur

#### *Fallbeispiel Paula und Daniel*

Paula und Daniel (Klasse 8 Gesamtschule) bearbeiten in einem Design-Experiment die Aufgabe 1. Dabei berechnen sie den Flächeninhalt der Figur zunächst auf einem eigenem Weg und bestimmen dazu die konkreten Seitenlängen durch Zählen der Kästchen in der Figur und orientieren sich somit nicht an den gegebenen Termen. Um anschließend zu prüfen, welche der gegebenen Terme den gleichen Flächeninhalt beschreiben, setzen sie ihre konkreten Zahlen in diese ein und überprüfen die Ergebnisse anhand ihres errechneten Referenzwertes. Einzelne Teilterme ordnen Paula und Daniel durch das Wiederfinden der Termstruktur in der Graphik zu.

Nach der Bearbeitung der Aufgabe 1 erhalten Paula und Daniel die Tabelle aus Aufgabe 2, in der die Passung von zwei der gegebenen Terme durch das Einsetzen geprüft werden soll. Die Lernenden sind allerdings irritiert durch die Aufgabenstellung und bearbeiten diese zunächst nicht.

Paula: Wir haben die richtigen Zahlen eingesetzt und er hat irgendwelche genommen?

Daniel: Häh? Das geht doch gar nicht. (...) Man kann aber nicht einfach andere Werte einsetzen.

Paulas und Daniels Irritation über die Herangehensweise blockiert den intendierten Lernweg von der Beschreibungsgleichheit zur Einsetzungsgleichheit. Sie zeigen ein - in vielen Episoden der Design-Experimente rekonstruierbares - Verständnis von den Variablen als konkreten Seitenlängen, das bereits von Küchemann (1980) dokumentiert wurde.

#### *Analyse der Hürde und ihrer Ursachen*

Bei genauerer Analyse dieser Hürde zeigt sich das zugrundeliegende geometriedidaktische Problem: die Lernenden interpretieren die gegebene Graphik als eine *Zeichnung* mit konkreten Längen, und nicht als allgemeine *Figur* (zum Beispiel repräsentiert in Form einer Figureschar). Variablenterme als Ausdruck von Allgemeinheit werden hier also deshalb nicht verstanden, weil die Figuren in ihrer Allgemeinheit nicht erfasst werden, sondern lediglich von der konkreten Zeichnungen auf das Objekt geschlossen wurde (Parzys 1988).

Dieser Hürde steht eine wichtige Ressource gegenüber, dass nämlich viele Lernende wie Paula und Daniel mit großer Selbstverständlichkeit das Einsetzen *einer* Zahl als Weg zum Überprüfen der Beschreibungsgleichheit nutzen.

Zu erarbeiten ist folglich nicht die Einsetzungsgleichheit insgesamt, sondern die *Allgemeinheit* des Einsetzens: Zwei Terme sind nur dann gleichwertig, wenn sie für alle Einsetzungen denselben Wert ergeben. Besonderer Aufmerksamkeit bedarf also der allgemeine Term, da Schülerinnen und Schüler ihre Erfahrungen aus konkreten Berechnungen nicht direkt in Beziehung zu allgemeinen Termen setzen (können) (Lee / Wheeler 1989).

#### **4. Konsequenzen für das Lehr-Lernarrangement: Aufbau inhaltlicher Vorstellungen zur Beschreibungsgleichheit**

Unter Ausnutzung der Ressource der Schülerinnen und Schüler, das Einsetzen einzelner Zahlen zum Überprüfen zu nutzen, lässt sich die Hürde der Allgemeinheit von Term und Figur durch eine Veränderung im Design des Lehr-Lernarrangements als überwindbar gestalten: Ein verständiger Vorstellungsaufbau zur Beschreibungsgleichheit, im Rahmen eines hier beschriebenen Lehr- Lernarrangements, bedarf besonderer Lerngelegenheiten, um eine Figur und einen allgemeinen Term zunächst zu identifizieren und anschließend vergleichen zu können.

In einem ersten Schritt deuten die Lernenden einen gegebenen Term an der graphischen Darstellung (Zeichnung). Um anschließend die Allgemeinheit sowohl der Figur, als auch des Terms zu erfahren, soll eine Figureschar, in der Rolle eines bridging tools, die bisher unverstandenen und unvereinten

Vorstellungen aufbauen und versöhnen. Schülerinnen und Schüler nähern sich dabei einer allgemeinen Vorstellung, durch das wiederholte Zeichnen und Berechnen der Figur mit unterschiedlichen Werten. Anschließend sind Lernende in der Lage, unterschiedliche Terme als allgemeine Beschreibungen einer allgemeinen Situation oder Figur zu erkennen und somit Vorstellungen zur Beschreibungsgleichheit aufzubauen.

Diese Veränderung des Lernweges wurden konkretisiert im Design und erprobt in weiteren Design-Experimenten in Klassen- und Laborsituationen im Winter 2011/12, deren Auswertung nun weiter verfolgt wird.

## 5. Literatur

- Cobb, P. / Gravemeijer, K. (2006): Design research from a learning design perspective. In: Akker van den, J. / Gravemeijer, K. / McKenney, S. / Nieveen, N. (2007): Educational design research. London [u.a.], Routledge. S. 17-51.
- Küchemann, D. E. (1980): The Understanding of Generalized Arithmetic by Secondary School children. Unveröffentlichte Dissertation. Chelsea College, University of London, London.
- Lee, L. / Wheeler, D. (1989): The Arithmetic Connection. Educational Studies in Mathematics 20 (1). S. 41-54.
- Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig [u.a.], Vieweg.
- Mason, J. (2005): Developing Thinking in Algebra. Paul Chapman.
- Parzys, B. (1988): «Knowing» vs «seeing». Problems of the plane representation of space geometry figures. In: Educational Studies in Mathematics 19(1). S. 79-92.
- Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Beltz, Weinheim 2009, 213-234.
- Prediger, S. / Zwetzschler, L. / Schmidt, U. (2011): Preise des Fensterbauers – Flächenberechnungen automatisieren und Terme vergleichen. Kapitel in Erprobungsfassung aus Leuders, T. / Hußmann, S. / Barzel, B. (Hrsg.): Mathewerkstatt 8, Cornelsen. Berlin.
- Prediger, S. / Link, M. (2012): Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. Erscheint in: Bayrhuber, H. et al. (Hrsg.): Formate Fachdidaktischer Forschung. Waxmann, Münster.
- Rosnick, P. / Clement, J. (1980): Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions. In: The Journal of Mathematic Behavior 3(1), S. 3-27.
- Wellstein, H. (1978): Abzählen von Gitterpunkten als Zugang zu Termen. In: Didaktik der Mathematik 6(1), 54-64.