Dominik FAAS, Landau

Schülerwettbewerbe beim Tag der Mathematik – Einblicke in Aufgaben und Schülerlösungen

Initiiert und koordiniert vom *Zentrum für Mathematik* findet seit 1992 jährlich der *Tag der Mathematik* statt. Dabei nehmen Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 11 und 12 an mathematischen Wettbewerben teil. Zu den verschiedenen Standorten gehörte im Jahr 2011 erstmals auch der Campus Landau der Universität Koblenz-Landau.

In diesem Beitrag soll zunächst auf die Ziele von Schülerwettbewerben im Fach Mathematik eingegangen werden. Eine besondere Rolle beim Erreichen dieser Ziele spielt die Auswahl der Aufgaben. Wir beschäftigen uns daher mit den Besonderheiten von (guten) Wettbewerbsaufgaben und stellen typische Aufgaben vom Tag der Mathematik 2011 vor. Schließlich untersuchen wir Auffälligkeiten bei den Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler. Daraus ergeben sich Hinweise auf Strategien und Schwierigkeiten mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler beim Problemlösen.

Ziele von Schülerwettbewerben

H. Langmann formuliert in Bezug auf den Bundeswettbewerb Mathematik einige Ziele, die auch für andere Schülerwettbewerbe Gültigkeit besitzen. Er schreibt unter anderem: „Der Wettbewerb möchte bei Schülerinnen und Schülern das Interesse für Mathematik wecken und sie zu intensiver Beschäftigung mit mathematischen Problemen anregen. Mathematisch Interessierten soll die Möglichkeit gegeben werden, an anspruchsvollen Aufgaben ihre Fähigkeiten zu erproben und weiterzuentwickeln. Außerdem möchte man mit einem Wettbewerb mathematisch besonders befähigte Schülerinnen und Schüler finden und fördern."

Ein Mathematik-Wettbewerb bietet also für interessierte Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, Spaß und Freude bei der Beschäftigung mit Mathematik zu entwickeln und sich mit Problemstellungen auseinanderzusetzen, die über das hinausgehen, was im täglichen Unterricht üblicherweise behandelt wird. Auch kann im Rahmen eines Wettbewerbs eine Kontaktherstellung zwischen begabten Jugendlichen erfolgen und durch Teambildung die Kommunikation über Mathematik gefördert werden.

Der Tag der Mathematik

Der Tag der Mathematik richtet sich an die mathematisch begabten Schülerinnen und Schüler, jedoch nicht nur an die Spitzenbegabten. Beim Gruppenwettbewerb und den sogenannten *Mathematischen Hürden* (dabei wird das Lösen mathematischer Aufgaben mit einem Bewegungselement verbunden) nehmen Teams mit jeweils 3-5 Schülerinnen und Schülern teil, zusätzlich gibt es noch einen Einzelwettbewerb.

Aufgaben von Schülerwettbewerben

Beim Erreichen der genannten Ziele ist sind die Aufgaben des Wettbewerbs ein entscheidender Faktor. P. Jainta nennt im Zusammenhang mit der Fürther Mathematik-Olympiade unter anderem die folgenden Kriterien:

- „Lehrplankonformität": Damit die Schülerinnen und Schüler grundsätzlich die Möglichkeit haben, eine Aufgabe zu lösen, muss diese mit schulischen Mitteln zu bewältigen sein. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Inhalte der Aufgaben dem „aktuellen Lernstoff" entsprechen müssen, wodurch die Wahl geeigneter Lösungsmethoden zumindest teilweise vorgegeben wäre.
- „Non-Standard": Die Wettbewerbsaufgaben weichen hinsichtlich der Art der Fragestellung von den im Unterricht üblicherweise gestellten Aufgaben ab. Eine Lösung erfordert daher „Fantasie, Kreativität und Ausdauer".
- „Offene Aufgaben": „Dosiert" eingesetzt sind offene Aufgaben für einen Mathematik-Wettbewerb gut geeignet.

Ein Wettbewerb sollte somit (zumindest teilweise) aus Aufgaben bestehen, die das Problemlösen in den Vordergrund stellen. Zur Lösung sind dabei heuristische Strategien und Hilfsmittel (z.B. Probieren, Rückwärtsarbeiten, Einsatz bekannter Methoden, Tricks, usw.) hilfreich oder erforderlich. Zudem sollte es verschiedene Lösungswege geben, so dass die Wahl der einzusetzenden Methoden den Schülerinnen und Schülern überlassen wird. Dabei kann es auch erforderlich sein, Bekanntes in ungewohnten Situationen einzusetzen (Transfer).

Beispielaufgaben vom Tag der Mathematik 2011

Die folgenden Aufgaben sind Teil der Wettbewerbe vom Tag der Mathematik 2011. Sie wurden von einem Aufgabenausschuss des Zentrums für Mathematik unter Leitung von Prof. Dr. G. Stein und Alfred Böhm erstellt.

Wir betrachten zunächst die folgende Aufgabe, die als Einstiegsaufgabe in den Hürdenwettbewerb unter Einsatz der binomischen Formeln nicht allzu schwierig zu lösen ist. Die Formulierung der Aufgabe ist jedoch ungewohnt und das Ergebnis (x=2011) ist ein wenig unerwartet.

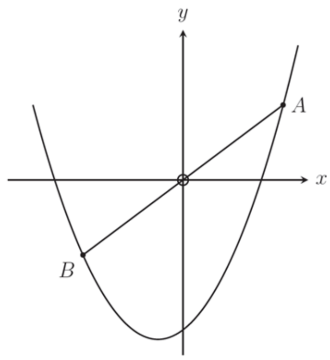
$$\boxed{\text{Für welches } x \text{ gilt } (10^{2009}+25)^2-(10^{2009}-25)^2=10^x\ ?}$$

Bei der folgenden Aufgabe aus dem Einzelwettbewerb kann man sich der Lösung durch Probieren nähern. Alternativ kann diese aber auch vollständig systematisch mittels Schlussfolgerungen im Rahmen der Teilbarkeitslehre gefunden werden.

> Die fünfstellige Zahl $a679b$ ist durch 72 teilbar.
>
> Bestimmen Sie die Ziffern a und b.

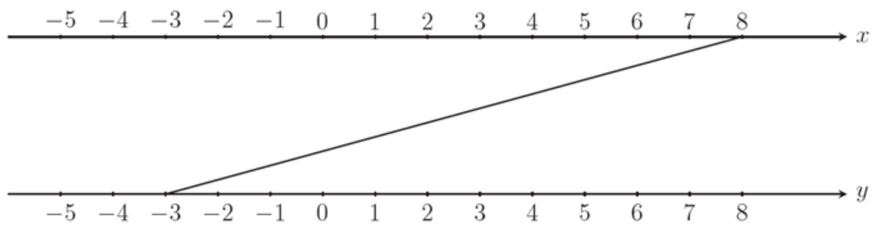
Bereits etwas schwieriger ist diese Aufgabe (aus dem Einzelwettbewerb). Eine geometrische Bedingung muss dabei in einer ungewohnten Situation (Parabeln, Analysis) in verwertbare Gleichungen umgesetzt werden.

> Die Punkte A und B liegen auf der Parabel $y = 4x^2 + 7x - 1$.
>
> Der Koordinatenursprung O ist Mittelpunkt der Strecke AB.
>
> Berechnen Sie die Länge von AB.



Schließlich liegt bei der folgenden offenen Aufgabe aus dem Gruppenwettbewerb, bei der auch ein Beweis zu führen ist, eine für Schülerinnen und Schüler ungewohnte Situation vor, da hier x- und y-Achse parallel zueinander verlaufen. Nachdem man zunächst (durch Probieren und Experimentieren) festgestellt hat, dass sich alle „Lösungsstrecken" in einem Punkt schneiden, ist eine Begründung dafür zunächst keinesfalls naheliegend. Es können dabei jedoch vielfältige Methoden aus unterschiedlichen Bereichen (Geometrie, Analysis, Vektorrechnung, …) zum Einsatz kommen.

> Eine Lösung der Gleichung $3x + 4y = 12$ ist $x = 8$ und $y = -3$.
>
> Man kann diese Lösung auf zwei parallelen Achsen eintragen und durch eine sogenannte Lösungsstrecke miteinander verbinden:



> Bestimmen Sie weitere Lösungen der Gleichung $3x + 4y = 12$, tragen diese auf den parallelen x- und y- Achsen ein und verbinden diese Lösungspunkte mit einer Strecke.
>
> Welche Eigenschaft haben diese Lösungsstrecken?
>
> Begründen Sie diese Eigenschaft.

Ein Blick auf die Schülerlösungen (Landau, 2011)

Bei der (nicht empirischen) Untersuchung der Lösungen der Schülerinnen und Schüler zu den Wettbewerbsaufgaben 2011 in Landau konnten die folgenden Aspekte festgestellt werden:

- Bei der oben vorgestellten Aufgabe zur Teilbarkeit („Für welche Ziffern a, b ist a679b durch 72 teilbar?“) nutzten viele der Schülerinnen und Schüler ein Wechselspiel zwischen Probieren und dem Einsatz hilfreicher Schlussfolgerungen (wie beispielsweise der Erkenntnis, dass b gerade sein muss), um zur Lösung zu kommen. Dies entspricht einer Strategie des „halbsystematischen Probierens“.
- Beim Umsetzen von (ungewohnten) geometrischen Bedingungen in algebraische Gleichungen traten oft Schwierigkeiten auf. War dies gefordert kamen viele Schülerinnen und Schüler nicht weiter oder nutzten einen fehlerbehafteten oder sogar völlig unsinnigen Schluss.
- Dennoch gab es – hinsichtlich des Schwierigkeitsgrads der Aufgaben und der begrenzten zur Verfügung stehenden Zeit – auch einige bemerkenswert geschickte Lösungen oder Lösungsansätze. Dabei wurden bekannte Methoden kreativ und zielführend eingesetzt.

Eine abschließende Frage

Nachdem wir in diesem Beitrag Kriterien für Aufgaben von mathematischen Schülerwettbewerben untersucht und einige dieser Aufgaben vorgestellt haben, soll die Frage aufgeworfen werden, ob es sinnvoll ist, mehr solcher Aufgaben auch im (täglichen) Mathematik-Unterricht zu behandeln. Es handelt sich dabei um Non-Standard-Aufgaben, bei denen Probleme gelöst werden, die den Einsatz verschiedener heuristischer Strategien und Methoden in unbekannten Situationen erfordern. Diese Frage soll aber hier nicht beantwortet werden.

Literatur

Langmann,H. (1997): Bundeswettbewerb Mathematik. In:Der Mathematikunterricht, 43(6), 23– 32.

Jainta,P. (2005): Gedanken zur Förderung mathematisch interessierter Schüler: am Beispiel der Fürther Mathematik-Olympiade. In:Der Mathematikunterricht, 51(5), 55-59.

Fegert,K. (2005): Bundeswettbewerb Mathematik. Gedanken zu Anforderungen und Aufgabenstellung. In:Der Mathematikunterricht, 51(5), 37-43.