

Jan WÖRLER, Würzburg

## **Analyse & Simulation von Kunstwerken: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung**

Die Werke der Gattung „Konkrete Kunst“ haben eine besondere inhaltliche Nähe zur Mathematik: häufig werden Zahlenreihen, Elemente der Kombinatorik oder der Geometrie als ästhetische Muster in den Kunstwerken umgesetzt (vgl. z. B. Lauter/Weigand 2007). Wie diese Bezüge im Mathematikunterricht gewinnbringend eingesetzt werden können, wurde etwa in Wörler 2009b ausführlich dargelegt. Darin werden Analyse und Simulation der Kunstwerke als Vorstufe und Übungsfeld für die Modellierung von Realsituationen angesehen. Das Arbeiten mit den Werken kann im Mathematikunterricht demnach in zwei Phasen erfolgen (vgl. Wörler 2009a): In der Phase I identifizieren die Schülerinnen und Schüler unter der Leitfrage „*Was steckt an Mathematik in diesem Bild?*“ die bildbestimmenden mathematischen Faktoren, was im Vergleich zu Modellierungsaufgaben mit Alltagskontext hier – aufgrund des vom Künstler zugrunde gelegten mathematisch-logischen Konstruktionsschemas – deutlich einfacher ist. In der Phase II werden die gefundenen Zusammenhänge dann auf Papier oder mittels Computersimulationen variiert, wodurch neue Muster entstehen, die wiederum unter mathematischen Gesichtspunkten analysiert werden können und damit tiefere Einblicke in das modellierte System, seine Elemente und Strukturen erlauben.

### **Forschungsfragen**

Im Rahmen einer explorativen empirischen Studie sollte untersucht werden, inwieweit derartige Aufgaben im Unterricht eingesetzt werden können und wie Schülerinnen und Schüler mit ihnen umgehen. Genauer sollte den folgenden Forschungsfragen nachgegangen werden:

- **Frage I:** Können Lernende im regulären Schulunterricht ein mathematisches Modell zu einem Bild aufstellen? (*Ergebnis*)
- **Frage IIa:** Können einzelne Arbeitsschritte des 2-Phasen-Modells beobachtet werden, wenn sie ein Kunstwerk modellieren (Phase I)? (*Prozess*)
- **Frage IIb:** Treten im Arbeitsprozess der Lernenden Rückkopplungsschleifen auf, in denen das Modell schrittweise verfeinert wird (Phase I)? (*Prozess*)

- **Frage III:** Finden die Schülerinnen und Schüler durch Variation oder Simulationen eines Kunstwerkes (Phase II) mathematische Zusammenhänge, die sich aus dem statischen Bild nicht ergeben?
- **Frage IV:** Wie hoch ist die Bereitschaft der Lehrenden, derartige Aufgaben im MU einzusetzen?

### **Untersuchungsdesign und -methoden**

Die oben genannten Fragstellungen legen eine Zweiteilung der Untersuchung nahe: Zur Klärung der Fragen I-III wurden 100 Schülerinnen und Schüler der 9. und 10. Jahrgangsstufe zweier Gymnasien bei der Analyse von Kunstwerken der Konkreten Kunst videographiert. Dazu standen in allen Klassen mindestens drei Unterrichtsstunden zur Verfügung, in denen die Schülerinnen und Schüler zunächst einzeln, danach weitgehend selbstständig in Kleingruppen zu 5–6 Personen aufgabengeleitet Modelle zu den Bildern aufstellten und anschließend – teils am Computer, teils direkt auf den Aufgabenbögen – variierten. Es wurden jeweils drei bis vier dieser Gruppen bei ihrer Arbeit mit den Aufgaben aufgezeichnet und die Videos anschließend transkribiert. Zusätzlich wurden Vorkenntnisse in den Fächern Mathematik und Kunst, sowie die Einstellungen der Schülerinnen und Schüler (Beliefs) zu diesen Themenbereichen über einen Fragebogen erhoben.

Zur Beleuchtung der Forschungsfrage VI wurde die Teilstudie „Lehrende“ im Rahmen einer Veranstaltung der Fortbildungsreihe „TiMu – Technologien im Mathematikunterricht“ (<http://timu.dmuw.de>) an der Universität Würzburg durchgeführt. 16 Lehrerinnen und Lehrer unterfränkischer Realschulen und Gymnasien nahmen daran teil. Um ihnen das Thema „Konkrete Kunst im Mathematikunterricht“ nahe zu bringen, bearbeiteten die Lehrenden nach einem Impulsvortrag zunächst Aufgabenbeispiele – analog zur Teilstudie „Lernende“ in Kleingruppen. Sie untersuchten dabei dieselben Kunstwerke, wie vorher die Schülerinnen und Schüler, und hielten sich im Wesentlichen auch an dieselben Aufgabenstellungen. Allein die Bearbeitungszeit, die für die einzelnen Aufgaben zur Verfügung gestellt wurde, war gegenüber dem „Schüler-Teil“ reduziert. Über eine nachgeschaltete Onlinebefragung ( $n = 9$ ) hatten die Lehrkräfte dann die Möglichkeit, die Aufgaben aus ihrer Sicht kritisch auf die Eignung für den Mathematikunterricht zu hinterfragen.

### **Erste Ergebnisse der Untersuchung**

Eine erste Auswertung der Transkripte und Dokumente aus beiden Teilen der Untersuchung zeigt keine wesentlichen Unterschiede in der Qualität der

Aufgabenbearbeitung zwischen Lernenden und Lehrenden und auch keine zwischen den unterschiedlichen Jahrgangsstufen der Lernenden. Die folgenden Ergebnisse der Teiluntersuchung der Lernenden lassen sich also analog auch auf die Gruppe der Lehrenden übertragen.

Die Schülerdokumente belegen, dass Lernende ein Modell zu einem Kunstwerk aufstellen können, wenn sie sich auf die Aufgaben einlassen (zu **Frage I**); ausnahmslos jede der Gruppen hat eine mathematische Beschreibung der Kunstwerke oder zumindest von wesentlichen Teilbereichen der jeweiligen Bilder gefunden.

Dass bei der mathematischen Analyse die Arbeitsschritte des 2-Phasen-Modells auftreten, hat sich bereits in der Voruntersuchung gezeigt (zu **Frage IIa**) und wurde bei der hier vorgestellte empirische Untersuchung bereits in die Aufgabenstellungen integriert. Daher stand im Hinblick auf den Zusammenhang zwischen der Modellierung von Kunstwerken und der Modellierung von Realsituationen die **Frage IIb** nach Rückkopplungsschleifen im Arbeitsprozess im Fokus, ist doch die schrittweise Optimierung eines bereits gefundenen Modells eines der wesentlichen Charakteristika jeder Modellierung. Die Transkripte aus beiden Teiluntersuchungen dokumentieren, dass im Verlauf des Analyseprozesses immer wieder Vermutungen der Bauart „XYZ könnte eine Rolle beim Aufbau des Bildes spielen“ aufgestellt werden, die dann direkt am Bild – etwa durch nachmessen, abzählen, einzeichnen – überprüft und schließlich verworfen oder zur Basis der weiteren Analyse angenommen werden. Nach und nach arbeiteten die einzelnen Gruppen auf diese Weise bildbestimmende Einflussgrößen heraus, die in ihrer Gesamtheit als Modell des Bildes angesehen werden können (je nach Kunstwerk gibt es drei bis fünf derartiger Faktoren). Diese Beobachtung zeigt, dass die einzelnen Teilschritte der Modellierungsphase (vgl. 2-Phasen-Modell, s. o.) kreislaufartig mehrfach hintereinander durchlaufen werden, und sie spiegelt auch den hohen Differenzierungsgrad der Aufgaben wider: während einige Gruppen nur wenige Einflussgrößen identifizierten und so vergleichsweise einfache Modellbeschreibungen zu den Bildern fanden, konnten leistungsfähigere Schülerinnen und Schüler durch eine intensivere Analyse deutlich feinere Modelle vorlegen. In diesem Zusammenhang gibt es keine Anzeichen dafür, dass eine positive individuelle Einstellung gegenüber der „Kunst“ einen Einfluss auf die Qualität der Modellierung hat.

Während die Lernenden bei der Variation der gefundenen Zusammenhänge (Phase II) auf Papier interessante Lösungswege zeigten, fiel ihnen das Arbeiten an computergestützten Simulationen der Kunstwerke (**Frage III**) schwer. Es scheint für den „alltäglichen“ Mathematikunterricht nicht ziel-

führend zu sein, Simulationen zu Kunstwerken im Unterricht erst zu entwickeln. Zwar ist dies möglich (etwa mit der Software SCRATCH), doch der enorme Aufwand legt nahe, derartige Vorhaben in gesonderten Projekten oder – fächerübergreifend – im Informatikunterricht anzugehen. Werden den Schülerinnen und Schülern dagegen fertige Simulationen zu einzelnen Kunstwerken mit dann notwendigerweise vordefinierten Variationsmöglichkeiten an die Hand gegeben, so können weiterführende mathematische Fragestellungen von ihnen nur dann gefunden und erfolgreich angegangen werden, wenn das zugrunde liegende Kunstwerk und seine Struktur vorher eingehend von ebendiesen Lernenden analysiert wurde. Eine genauere Auswertung der Schülerarbeiten steht hier allerdings noch aus.

Für die Lehrerinnen und Lehrer, die an der Untersuchung teilgenommen haben, gelten diese Aussagen analog. Zwar bearbeiteten sie die Aufgaben i. d. R. schneller erfolgreich und drückten sich mathematisch präziser aus, als die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Teilstudie „Lernende“, kamen aber letztlich zu den gleichen Ergebnissen. Die Befragung der Lehrkräfte hat ergeben, dass sie Aufgaben im Kontext der „Konkreten Kunst“ als motivationsfördernd einstufen und im eigenen Unterricht einsetzen würden. Sie sahen dabei vor allem den „ungewohnten Zugang zur Mathematik“ und die gute Möglichkeit zur – sogar jahrgangsstufenübergreifenden – Differenzierung als didaktisch relevant an. Der Einbettung von Simulationen zu Kunstwerken in den Mathematikunterricht stand zumindest gut die Hälfte der befragten Lehrenden positiv gegenüber.

### **Zusammenfassung**

Die Analyse und Simulation von Kunstwerken der Konkreten Kunst kann ein geeigneter Einstieg oder eine Übungsumgebung für das Modellieren von Realsituationen sein. Einzelne Schritte der Modellierung sind dabei durch direkten Vergleich mit dem vorgelegten Kunstwerk visuell überprüfbar. Eine Einbettung in den realen Unterricht ist ohne weitere Vorbereitung als dreistündige Einheit möglich und bietet interessante Anlässe zur Binnendifferenzierung.

### **Literatur**

- Lauter, M.; Weigand, H-G. (Hrsg.) (2007): Ausgerechnet ... Mathematik und Konkrete Kunst, Spurbuchverlag, Baunach.
- Wörler, Jan (2009a): Konkrete Kunst: Mathematik in Bildern finden und dynamisch erforschen. In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, WTM-Verlag, Münster, 2009, S. 955–958
- Wörler, Jan (2009b): Folgen in der Konkreten Kunst: Gesetzmäßigkeiten erkennen und fortsetzen. In: Mathematik lehren, Heft 157, Dezember 2009, S. 20–26