

Maike SCHINDLER, Dortmund, Stephan HUßMANN, Dortmund

„Plus ist gut, minus ist schlecht“ – Eine Lernprozessstudie zur Rolle des Kontextes und des Transfers im Bereich der negativen Zahlen

Im vorliegenden Beitrag werden die Konzeption und erste Ergebnisse einer Lernprozessstudie dargestellt. Die Zielperspektiven dieser Studie sind: Erkenntnisse zu individuellen Begriffsentwicklungen von Schülerinnen¹ zu den negativen Zahlen zu erlangen, Theorieentwicklung zum Begriff der negativen Zahl zu leisten und die Entwicklung einer Lernumgebung zu begleiten, in der die Einführung der negativen Zahlen innerhalb eines Kontextes erfolgt. Es wird – neben weiteren – den Fragen nachgegangen, über welche individuellen Begriffe die Schülerinnen *vor* der Einführung ganzer Zahlen verfügen und inwiefern die Schülerinnen zur Bearbeitung von Rechenaufgaben auf Kontexte oder die Zahlengerade zurückgreifen. Im Anschluss an eine Unterrichtsreihe zu ganzen Zahlen wird untersucht, inwiefern sich Entwicklungen des individuellen Begriffs der negativen Zahl vollzogen haben und inwiefern die Schülerinnen dazu in der Lage sind, ihr Wissen in andere Kontexte zu transferieren.

Im Rahmen des Projektes Kosima (Barzel et al. 2011) wurde eine Lernumgebung entwickelt mit dem Ziel, ausgehend von einem realistischen Kontext die Entwicklung eines tragfähigen individuellen Begriffs der negativen Zahl zu ermöglichen. Der gewählte Kontext musste dabei u.a. den Ansprüchen genügen, (a) an die Erfahrungen und die Lebenswelt der Schülerinnen anzuknüpfen und (b) tragfähig für alle Rechenoperationen mit ganzen Zahlen zu sein (Leuders et al. 2011). Um an die Erfahrungen der Schülerinnen anzuknüpfen, wurde der Kontext Guthaben und Schulden gewählt. Da die gängigen Modelle im Kontext Guthaben und Schulden jedoch nur bedingt authentisch und auch nicht für alle Rechenoperationen uneingeschränkt tragfähig sind, wurde mit der Lernumgebung „Schulden und Guthaben“ (Hußmann/Schindler 2013) ein neues Modell entwickelt, welches eine sinnstiftende Interpretation von Zahl- und Rechenzeichen für alle Grundrechenarten ermöglicht. In diesem Modell werden die Rechenzeichen als zeitliche Operationen und die Zahlzeichen als Bestand bzw. Veränderung gedeutet.

¹ Das generische Femininum bezieht sich in diesem Beitrag auf beide Geschlechter.

Für die Entwicklung des Begriffs der negativen Zahl sind drei Dimensionen und der Wechsel zwischen ihnen von Bedeutung (vgl. Bruno 1997): (1) Kontexte, die den Begriff bedeutsam machen und Ankerpunkte in der Realität bilden, (2) die Zahlengerade als wesentliches Anschauungsmittel sowie (3) die formal-symbolische Dimension – eine dekontextualisierte Darstellung der Aufgaben (vgl. Abb. 1). Bei der Gestaltung der Lernumgebung im Projekt Kosima wurden diese drei Dimensionen, der Wechsel zwischen ihnen sowie empirische Ergebnisse zu Schwierigkeiten von Schülerinnen beim genannten Wechsel berücksichtigt, da davon ausgegangen wird, dass sich ein tragfähiger Begriff der negativen Zahl nur im Wechselspiel aller Dimensionen ausbilden kann.

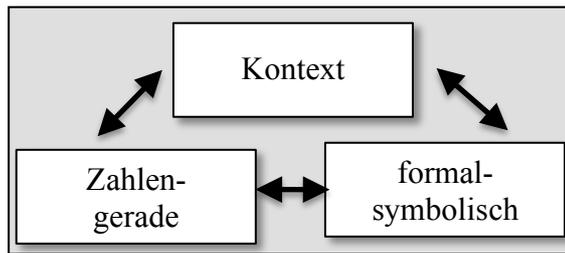


Abbildung 1 Drei Dimensionen für das Lernen des Begriffs der negativen Zahl

Bei der Gestaltung der Lernumgebung im Projekt Kosima wurden diese drei Dimensionen, der Wechsel zwischen ihnen sowie empirische Ergebnisse zu Schwierigkeiten von Schülerinnen beim genannten Wechsel berücksichtigt, da davon ausgegangen wird, dass sich ein tragfähiger Begriff der negativen Zahl nur im Wechselspiel aller Dimensionen ausbilden kann.

Der theoretische Rahmen zur Rekonstruktion individueller Begriffe und deren Transfer setzt sich aus zwei Bezugsrahmen zusammen: Aus einer sprachphilosophischen Perspektive – in Anlehnung an Robert Brandom –, in der Begriffe in ihrem Gebrauch als Festlegungen und Inferenzen betrachtet werden, auf der einen Seite und aus einer entwicklungspsychologisch-lerntheoretischen Perspektive – in Anlehnung an Gérard Vergnauds „Theory of Conceptual Fields“ –, in der individuelle Begriffe als Tripel aus Situationen, symbolischen Repräsentanten und operationalen Invarianten betrachtet werden, auf der anderen Seite. Aus diesen beiden Bezugsrahmen wurde ein Analyseschema entwickelt (vgl. Hußmann/Schacht 2009, Schacht 2012), mit welchem individuelle Begriffe von Schülerinnen aus deren Sprechhandlungen rekonstruiert werden können. Das Analyseschema orientiert sich im Wesentlichen an *Festlegungen*, mit denen handlungsleitende Annahmen der Lernenden als *Concepts-in-action* (Kategorien zur Auswahl von Informationen in einer Situation) und *Theorems-in-action* (handlungsleitende Behauptungen in der jeweiligen Situation) erfasst werden, an den *Situationen*, in denen Festlegungen eingegangen werden und den *Darstellungen*, in denen Festlegungen sichtbar werden.

Die empirische Studie wurde in einer sechsten Klasse einer Gesamtschule im Ruhrgebiet durchgeführt. Im Rahmen der Untersuchung erfolgte eine Einführung in die Thematik der ganzen Zahlen mit der o.g. Lernumgebung. Dies wurde eingerahmt durch halbstandardisierte Einzelinterviews – zum einen in Form von Vorinterviews zum Erfassen der Vorkenntnisse, zum anderen in Form von Nachinterviews zur Analyse der Entwicklungen des

Begriffs der negativen Zahl und des Transfers in andere Kontexte. In den folgenden Interviewausschnitten soll exemplarisch die Rekonstruktion des Begriffsgebrauchs eines Schülers skizziert werden.

Im *Vorinterview* befindet sich der Schüler Dietrich in der Situation, bei den Zahlen -27 und -31 – beide als Zahlenkarten vorliegend – die größere zu bestimmen. Seine Sprechhandlungen sind:

... Die ... 31 minus 31 .. weil die Zahlen, weil die Zahl (nimmt die -31 in die Hand) schon allein größer ist auch wenn sie jetzt ohne minus wär, dann wär sie ja auch größer als die 27 (zeigt auf die -27)

Dietrich legt sich darauf fest, dass -31 größer ist als -27 und er begründet dies mit der Festlegung, dass die Zahl, die ohne Minuszeichen größer ist, auch *mit* Minuszeichen größer ist. Letztere Festlegung kann bei Dietrich in mehreren Situationen rekonstruiert werden und stellt damit ein Theorem-in-action dar (vgl. Abb. 2). Das Concept-in-action, das er als Fokus wählt, ist die Ordnung der natürlichen Zahlen (bzw. der Zahlen „ohne Minuszeichen“). Dietrichs Sprechhandlungen erfolgen ausschließlich in der formal-symbolischen Dimension – die Zahlengerade und Kontexte scheint er nicht zu gebrauchen. Der rekonstruierte Begriffsgebrauch scheint zudem auf spiegelbildliche Ordnungsrelationen für negative Zahlen hinzudeuten, was sich in weiteren Situationen bestätigt.

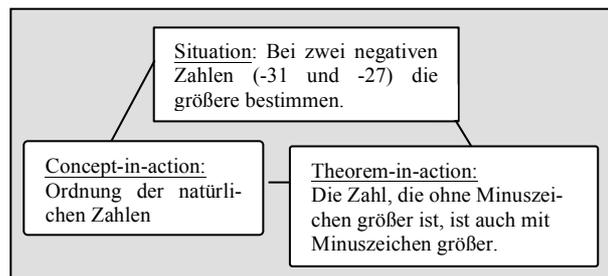


Abbildung 2 Rekonstruierter Begriffsgebrauch Vorinterview

Im *Nachinterview* befindet Dietrich sich in einer ähnlichen Situation, in der er die Zahlen -12 und -8 vergleicht. Seine Sprechhandlungen sind:

(Nimmt die Karten in die Hand, hält sie nebeneinander und betrachtet sie.) Die minus acht ist größer weil die näher an der Null ist. ... Ja, und wenn eine Zahl näher an der Null ist, dann ist sie größer

Er nutzt hier mit der Entfernung zur Null ein anderes Concept-in-action (vgl. Abb. 3) als im Vorinterview und setzt damit einen anderen Fokus. Das Theorem-in-action, welches rekonstruiert werden kann, deutet nun auf geänderte Ordnungsrelationen hin, welche sich im weiteren Verlauf

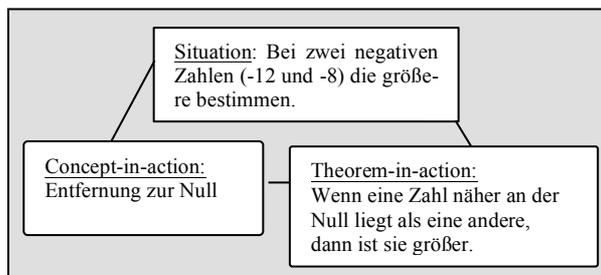


Abbildung 3 Rekonstruierter Begriffsgebrauch Nachinterview

des Interviews bestätigen. Auf die Nachfrage, wie er sich dies vorstelle, zeichnet Dietrich eine Zahlengerade, an der er seine Festlegung verdeutlicht. Es kann rekonstruiert werden, dass nun auch die Dimension der Zahlengerade für seine Festlegungen und Inferenzen Bedeutung gewonnen hat.

Um den *Transfer* aus dem Kontext „Guthaben und Schulden“ in andere Kontexte, in denen negative Zahlen relevant sind, zu betrachten, bearbeiten die Schülerinnen im Nachinterview Aufgaben in unterschiedlichen Kontexten. In der Situation, bei zwei Orten unterhalb des Meeresspiegels den höheren zu bestimmen (Kontext Höhenmeter), zeigten die Schülerinnen bspw. unterschiedliche Arten des Transfers. Während einige Schülerinnen mit Äußerungen wie „Das ist genauso wie bei den Aufgaben die wir als erstes hatten, die wenn da eine Zahl näher an der Null dran ist, dann ist die äh .. dann ist die Zahl größer.“ über eine Art dekontextualisiertes Modell der Zahlengerade verfügen zu scheinen, welches die Basis für den Transfer darstellt, scheinen andere Schülerinnen sich eng am Kontext der Lernumgebung zu orientieren und daran festzuhalten (bspw. „Ist wie die Schulden halt nur mit Höhe.“).

Erste Ergebnisse der dargestellten Studie weisen darauf hin, dass die Schülerinnen über sehr unterschiedliches Vorwissen zum Begriff der negativen Zahl verfügen, dass sich mittels des gewählten Theorierahmens Entwicklungen der individuellen Begriffe sowie Transfers rekonstruieren lassen, dass den Schülerinnen ein Transfer auf unterschiedliche Art und Weise gelingt und, dass der Kontext und das Modell der Lernumgebung sich in Kombination mit der Zahlengerade als tragfähige Stütze zum Aufbau des Begriffs der ‚negativen Zahl‘ eignen.

Literatur

- Barzel, B. / Hußmann, S. / Leuders, T. / Prediger, S. (2011). Kontexte und Kernideen – Aspekte eines theoriegeleiteten und praxiserprobten Schulbuchkonzepts. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*, 71-74.
- Bruno, A. (1997): La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. In: *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 29, 5-18.
- Hußmann, S. / Schindler, M. (2013): Schulden und Guthaben – negative Zahlen. In: *Mathewerkstatt 6*. Cornelsen-Verlag.
- Hußmann, S. / Schacht, F. (2009): Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*, 339-342.
- Leuders, T. / Hußmann, S. / Barzel, B. / Prediger, S. (2011): „Das macht Sinn!“ Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 53(37), 2-9.
- Schacht, F. (2012): Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff. Wiesbaden, Vieweg-Teubner Verlag.