

Wir setzen $a = \sqrt{v^2 + w^2}$, $b = \sqrt{u^2 + w^2}$ und $c = v - u$, das sind die Längen der drei Seiten des Dreiecks.

Wo liegen in einem solchen Dreieck Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt? Die Gleichung der Trägergeraden der Höhe h_a durch den Eckpunkt A ist $-(x - u)v + yw = 0$. Dazu finden wir die Steigung der Trägergeraden der Seite a als $-\frac{w}{v}$, was einen Normalvektor $\begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix}$ auf h_a impliziert. Die Höhe durch den Eckpunkt C liegt auf der y -Achse, die zugehörige Trägergerade hat daher die Gleichung $x=0$. Der Schnittpunkt ist $(0 | -\frac{uv}{w})$, womit der Höhenschnittpunkt H gefunden ist.

Die Mittelsenkrechte s_{AB} der Seite AB hat die Gleichung $x = \frac{u+v}{2}$. Die Mittelsenkrechte s_{AC} der Seite AC hat einen Normalvektor $\begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix}$ wegen der Steigung $-\frac{w}{u}$ der Trägergeraden von b . Die Gleichung der zugehörigen Trägergeraden ist dann $-(x - \frac{u}{2})u + (y - \frac{w}{2})w = 0$. Der Schnittpunkt von s_{AB} und s_{AC} ist $(\frac{u+v}{2} | \frac{w}{2} + \frac{uv}{2w})$, der Umkreismittelpunkt U .

Der quadrierte Abstand von U zum Eckpunkt C ist $(\frac{u+v}{2})^2 + (\frac{w}{2} - \frac{uv}{2w})^2 = \frac{u^2w^2 + v^2w^2 + w^4 + u^2v^2}{4w^2} = \frac{a^2b^2}{4w^2}$. [Ein Computeralgebrasystem (CAS) liefert zumindest $\frac{(u^2+w^2) \cdot (v^2+w^2)}{4 \cdot w^2}$.] Die Wurzel daraus ist der Umkreisradius r .

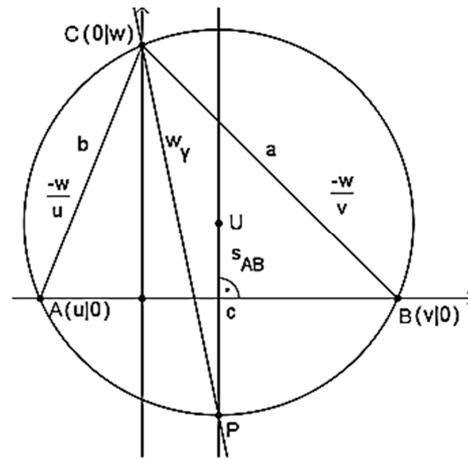
Der gespiegelte Höhenschnittpunkt

Spiegle den Höhenschnittpunkt von verschiedenen Dreiecken an den (Trägergeraden der) Seiten! Was fällt Dir auf? Wo liegen diese Punkte, egal, ob das Dreieck spitz- oder stumpfwinkelig ist? Was passiert, wenn das Dreieck rechtwinkelig ist? – Wir erkennen: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an den Seiten des Dreiecks, dann liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis.

Es genügt, dies für die Seite des Dreiecks zu begründen, die auf der x -Achse liegt. Wir können das ja für jede der drei Dreiecksseiten erreichen, indem wir das Dreieck in geeigneter Weise ins Koordinatensystem legen. Spiegelt man den Höhenschnittpunkt H um die Seite AB , dann erhält man $(0 | \frac{uv}{w})$. Der quadrierte Abstand dieses Punktes zum Umkreismittelpunkt U ist $(\frac{u+v}{2})^2 + (\frac{w}{2} - \frac{uv}{2w})^2$. Die Wurzel daraus ist der Umkreisradius r , wie bereits in der obigen Rechnung gezeigt worden ist. Somit liegt der gespiegelte Höhenschnittpunkt auf dem Umkreis.

Der Schnittpunkt von Mittelsenkrechte und Winkelhalbierender

Konstruiere die Winkelhalbierenden eines Dreiecks und schneide diese mit dem Umkreis des Dreiecks! Betrachte die Schnittpunkte ungleich den Ecken bei verschiedenen Dreiecken und miss ihre Entfernungen von den Ecken! Was fällt Dir dabei auf? – Wir vermuten: Sei P der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch den Eckpunkt C mit der Mittelsenkrechten der Seite AB . Dann liegt P auf dem Umkreis.



Zur Begründung dieser Vermutung rechnen wir die geometrische Konstruktion nach. Allerdings verlangen die dabei auftretenden algebraischen Umformungen und Substitutionen eine gewisse Übersicht, die durch ein CAS wirkungsvoll unterstützt werden kann. Wir werden zuerst die in Rede stehenden Geraden schneiden und dann erst beweisen, dass der Schnittpunkt auf dem Umkreis liegt.

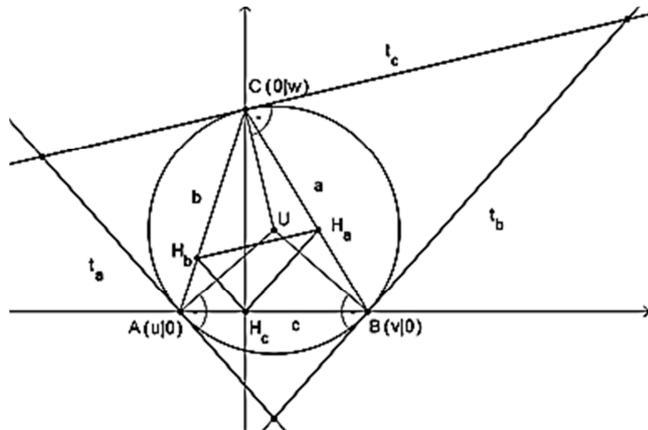
Die Einheitsvektoren in Richtung der Seiten AC und BC sind $\frac{1}{b} \begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{a} \begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix}$. Ihre Summe $\frac{1}{b} \begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix} + \frac{1}{a} \begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden durch den Eckpunkt C . Die Gleichung der Winkelhalbierenden w_γ ist daher $x \left(\frac{w}{b} + \frac{w}{a} \right) + (y - w) \left(\frac{u}{b} + \frac{v}{a} \right) = 0$. Die Mittelsenkrechte s_{AB} der Seite AB hat die Gleichung $x = \frac{u+v}{2}$. Der Schnittpunkt P dieser beiden Geraden ist $\left(\frac{u+v}{2} \mid w - \frac{u+v}{2} \cdot \frac{wa+wb}{ua+vb} \right)$.

Da P und der Umkreismittelpunkt U dieselbe x -Koordinate haben (sie liegen beide auf der Mittelsenkrechten s_{AB} , die parallel zur y -Achse verläuft), ist der Abstand von P zu U gleich $\frac{w}{2} + \frac{uv}{2w} - w + \frac{u+v}{2} \cdot \frac{wa+wb}{ua+vb}$. Um zu zeigen, dass das gleich dem Umkreisradius r ist, ist ein wenig Rechnerei (mit einem CAS) erforderlich.

Es gilt $\frac{uv}{2w} + \frac{u+v}{2} \cdot \frac{wa+wb}{ua+vb} = \frac{u^2va+uv^2b+uw^2a+uw^2b+vw^2a+vw^2b}{2w(ua+vb)} = \frac{vab^2+ua^2b+uw^2a+vw^2b}{2w(ua+vb)} = \frac{ab+w^2}{2w}$, wobei bei der zweiten Gleichung $b^2 = u^2+w^2$ und $a^2 = v^2+w^2$ verwendet worden ist. Der Abstand von P zu U ist somit $-\frac{w}{2} + \frac{ab+w^2}{2w} = \frac{ab}{2w}$, also gleich dem Umkreisradius r .

Höhenfußpunkt- und Tangentendreieck

Zeichne die drei Höhenfußpunkte eines beliebigen Dreiecks und verbinde sie! Das so erhaltene Dreieck heißt Höhenfußpunktendreieck. Das Dreieck selbst ist Tangentendreieck an seinen Inkreis. Konstruiere nun ein Tangentendreieck, dessen Seiten durch die Ecken des Dreiecks verlaufen! Welche Beziehung scheint zwischen dem Höhenfußpunkt- und diesem Tangentendreieck zu bestehen? – Wir vermuten: Die Seiten des Höhenfußpunktendreiecks liegen parallel zu den Seiten des Tangentendreiecks.



Dazu geben wir eine Projektionsformel an: Projiziert man den Punkt $(p|q)$ auf die Gerade g mit der Gleichung $y=kx+d$, dann erhält man $\left(\frac{kq+p-dk}{k^2+1} \mid \frac{k^2q+kp+d}{k^2+1}\right)$. Mit dieser können wir die Koordinaten der Höhenfußpunkte angeben: $H_a\left(\frac{uv^2+vw^2}{v^2+w^2} \mid \frac{v^2w-uvw}{v^2+w^2}\right)$, $H_b\left(\frac{u^2v+uw^2}{u^2+w^2} \mid \frac{u^2w-uvw}{u^2+w^2}\right)$ und $H_c(0|0)$.

Der Vektor \overrightarrow{UA} ist $-\frac{1}{2w}\begin{pmatrix} vw - uw \\ w^2 + uv \end{pmatrix}$. Ein Richtungsvektor der Tangente t_a an den Umkreis im Eckpunkt A ist daher $\begin{pmatrix} w^2 + uv \\ uw - vw \end{pmatrix}$. Aus den Koordinaten der Höhenfußpunkte folgt, dass der Vektor $\overrightarrow{H_cH_b}$ gleich $\frac{u}{u^2+w^2}\begin{pmatrix} uv + w^2 \\ uw - vw \end{pmatrix}$ ist. Man sieht, dass er parallel zur Tangente liegt.

Ein kurzes Resümee und ein Hinweis

Es ist deutlich erkennbar, wie mächtig die analytische Geometrie als Werkzeug zum Begründen sein kann. In PM, Heft 44, **54.** Jahrgang, 2012, S. 36–40, erscheint eine ausführliche Darstellung dieser Thematik (mit GeoGebra-Dateien und elementargeometrischen Beweisen im online-Anhang).

Literatur

- bm:ukk (2004): Lehrplan für den Pflichtgegenstand Mathematik an der Oberstufe der AHS in Österreich. http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf, 27.9.2011.
- Holland, G. (1988): Geometrie in der Sekundarstufe. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 9. Mannheim/Wien/Zürich, BI Wissenschaftsverlag.