Martin Erik HORN, Frankfurt/Main

Surreale Zahlen: Reisen über die Unendlichkeit hinaus

Beginnen wir unsere Reise in die Unendlichkeit mit dem Wettlauf von Achilles und einer still stehenden Schildkröte. Für den ersten sehr großen Schritt der Länge von 1 km benötigt Achilles 1 h. Für den folgenden Schritt der Länge von 0,5 km benötigt er ½ h. Da er mit konstanter Geschwindigkeit läuft und sich seine Schrittweite jeweils halbiert, halbiert sich auch die Zeit, die Achilles pro Schritt benötigt. Nach genau zwei Stunden erreicht er die Schildkröte. Dabei hat er unendlich viele Schritte zurück gelegt:

$$\omega = (\{1, 2, 3, 4, \ldots\}; \{\ \})$$

Doch Achilles rennt weiter. Wo aber ist er, wenn er einen weiteren Schritt

$$\omega + 1 = (\{1, 2, 3, 4, \ldots, \omega\}; \{\ \})$$

gemacht hat? Und wie viele Schritte muss er machen, um 3 h zu laufen?

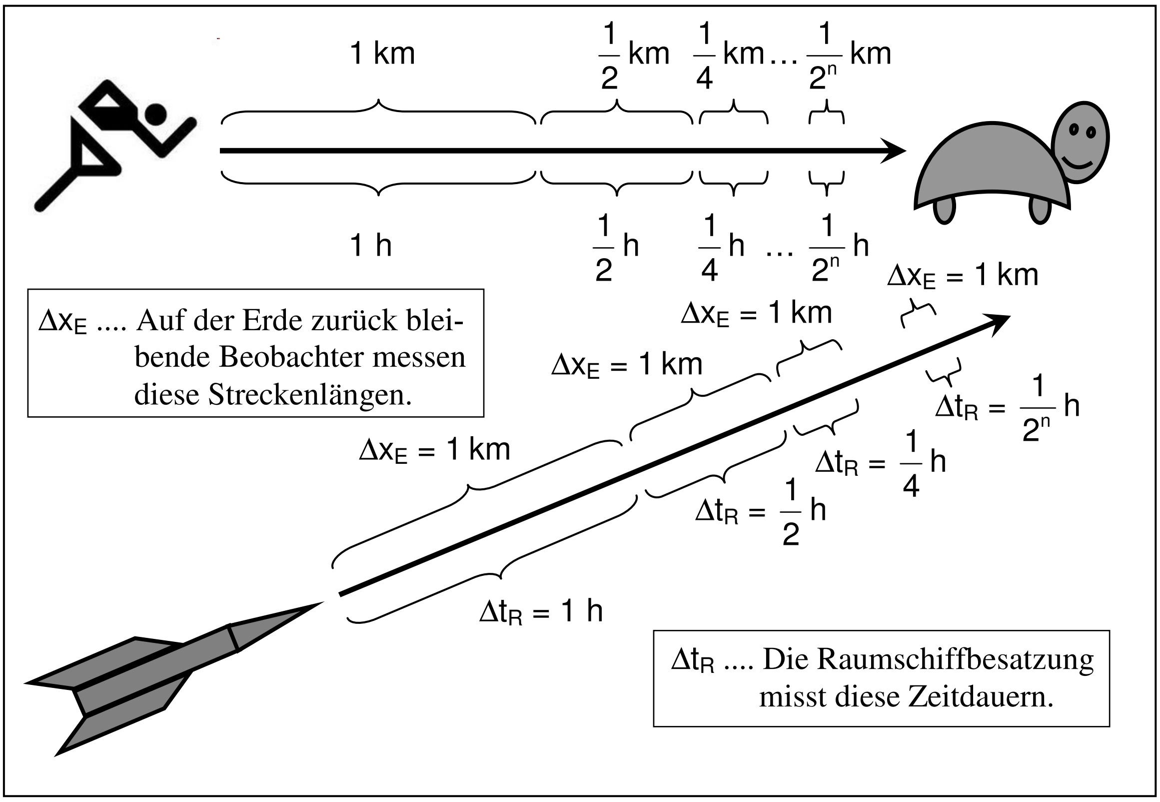

Abb. 1: Das Wettrennen des Achilles mit der Schildkröte (oben) und ein Flug eines Raumschiffs in die Unendlichkeit (unten).

Mit diesem Paradoxon des Xenon gelingt es, Diskussionsanlässe zur Erörterung der Surrealen Zahlen zu schaffen. Mit den reellen Zahlen kommen wir hier nicht weiter, denn wir befinden uns in einem Bereich, bei dem es um Größen geht, die größer als unendlich sind. Das wird noch klarer, wenn dieses Paradoxon speziell-relativistisch modifiziert wird (Horn 2012).

Setzen wir also unsere Reise ins Unendliche und darüber hinaus fort und betrachten ein Raumschiff, das von der Erde aus beobachtet wird. Zwar kann die Geschwindigkeit dieses Raumschiffs aus Erdsicht nie größer als die Lichtgeschwindigkeit c werden. Für Beschleunigungen gibt es im Kontext der speziellen Relativitätstheorie jedoch keine solche Grenze.

Deshalb beschleunigt die Raumschiffbesatzung in diesem Gedankenexperiment das Raumschiff jeweils so, dass sie für jeden im System der Erde gemessenen Kilometer genau halb so viel Zeit im eigenen Bezugssystem benötigt wie für den vorangegangenen Kilometer. Die Distanzangaben von jeweils einem Kilometer erfolgen hier also aus Erdsicht und die Zeitangaben von $1/2^n$ h aus Sicht der Raumschiffbesatzung. Sie können aber natürlich problemlos ineinander umgerechnet werden.

Wo also befindet sich das Raumschiff, wenn die Besatzung eine Gesamtzeit von zwei Stunden misst? Die Antwort erfolgt analog zum Wettrennen des Achilles. Das Raumschiff hat nach zwei Stunden eine Entfernung von

$$\omega\,\mathrm{km} = (\{1\,\mathrm{km}, 2\,\mathrm{km}, 3\,\mathrm{km}, 4\,\mathrm{km}, \ldots\}; \{\ \})$$

zur Erde zurück gelegt. Aus Erdsicht ist es unendlich weit entfernt, und es fliegt weiter. Wo also befindet sich das Raumschiff, wenn es $\omega + 1$ Beschleunigungsphasen durchlaufen hat? Und wo befindet es sich nach 3 h?

Rota (2008, S. 217) beschreibt eindrücklich: „Surreal numbers are an invention of the great John Conway. They will go down in history as one of the great inventions of the century. (…) Thanks to Conway's discovery, we have a new concept of number." Die Vermittlung eines konzeptuellen Verständnisses von Zahlensystemen stellt eine originäre Aufgabe der Mathematikdidaktik dar. Sie gelingt wahrscheinlich besser, wenn dabei kontextbezogen vorgegangen wird. Und möglicherweise können dabei sogar „the most serious shortcomings in our present educational system" (Knuth 1974, S. 113) überwunden werden.

Literatur

Horn, M. E. (2012): Vorstellungen zum Licht – Eine surreale Erweiterung. In S. Bernholt (Hrsg.): Konzepte fachdidaktischer Strukturierung für den Unterricht. GDCP-Band 32. Berlin: LIT-Verlag Dr. W. Hopf, S. 149 – 151.

Knuth, D. E. (1974): Surreal Numbers. How two Ex-Students turned on to pure Mathematics and found total Happiness. Upper Saddle River, NJ: Addison Wesley.

Rota, G.-C. (2008). Indiscrete Thoughts. Reprint of the 1997 Edition, Basel: Birkhäuser.