

Jana KRÄMER, Kassel

„14.057, das sind 7 Einer, 50 Zehner und 14 Tausender“ – (Fehl-)Vorstellungen von Studierenden zum Bündelungsprinzip in Stellenwertsystemen

Dieser Beitrag beschreibt Fragestellung, Vorgehen und erste Erkenntnisse eines Promotionsvorhabens über die Entwicklung von Vorstellungen Studierender des Grundschullehramts bezüglich Bündelungsprozessen in Stellenwertsystemen. Das Forschungsanliegen ist eingebettet in das Projekt KLIMAGS¹ des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (KHDM) der Universitäten Kassel, Paderborn und Lüneburg.

1. Fachliche und fachdidaktische Basis

Das der Untersuchung zu Grunde liegende mathematische Gebiet sind die *Stellenwertsysteme*. Es geht hier um die Darstellung der natürlichen Zahlen durch Ziffern, die – je nach Stelle – mit verschiedenen Potenzen von Zehn (bzw. von jeder anderen Basis) multipliziert werden, wobei die entsprechende Summe dann den Wert der dargestellten Zahl wiedergibt. Mit geringfügig abweichenden Notationsweisen gehört der „Satz zur allgemeinen Zahldarstellung“ zu den grundlegenden Sätzen jedes Arithmetik-Werkes (und er wird auch in der Vorlesung, aus deren Studierenden die Stichprobe der vorliegenden Untersuchung stammt, thematisiert). Die dahinterstehende Handlungsvorstellung ist das *Bündeln*.

Die Relevanz der Behandlung des Bündelungsprinzips im Mathematikunterricht der Grundschule wird sowohl in Bildungsstandards (Walther et al., 2008) und Rahmenplänen als auch in der einschlägigen fachdidaktischen Literatur betont. Als Vorteile der Behandlung auch nichtdezimaler Stellenwertsysteme führt z.B. Padberg (2009) an, dass Bündelungen mit Bündelungszahlen ungleich Zehn hilfreich zur Erarbeitung des Grundgedankens des Bündelns sein können. Bei kleineren Basen, weil hier Bündelanzahlen und -größen leichter simultan erfassbar sind als im Dezimalsystem, bei größeren, weil hier die Bedeutung und Eindeutigkeit der Symbolik fokussiert wird. Letztlich soll erreicht werden, dass die Begriffe „Bündelung“ und „Stellenwert“ losgelöst vom Zehnersystem erfasst werden. Schließlich soll durch die Behandlung anderer Basen eine Vertiefung der Einsicht in

¹ Kompetenzorientierte LehrInnovationen für das MAthematikstudium GrundSchule. Projektleiter: R. Biehler, P. Bender (beide Paderborn), W. Blum (Kassel), R. Hochmuth (Lüneburg)

Grundrechenarten (z.B. stellengerechtes Zerlegen beim halbschriftlichen oder Überträge beim schriftlichen Rechnen) ermöglicht werden.

Das „Bündelungsprinzip“ ist zu verorten an einer Schnittstelle zwischen Fachinhalten und veranschaulichenden Handlungsprozessen. Eine naheliegende Möglichkeit, sich diesem Phänomen zu nähern, ist das *Grundvorstellungskonzept*, wie es vom Hofe (1995) vorgestellt hat. Grundvorstellungen werden dabei als Mittler zwischen Individuum, Realität und mathematischen Inhalten angesehen, die bei der Sinnkonstituierung mathematischer Begriffe eine zentrale Rolle einnehmen. Eine wesentliche Eigenschaft, die Grundvorstellungen von Wissen unterscheidet, ist, dass sie prinzipiell kontextunabhängig sind, während Wissen i.a. situationsgebunden ist und nicht transferierbar sein muss.

2. Fragestellung und Untersuchungsdesign

Die Fragestellung entstand in einer Lehrsituation während einer Übung zur „Arithmetik in der Grundschule“. Studierende, die sich fachlich bereits ausführlich mit Stellenwertsystemen und Ziffernschreibweisen beschäftigt hatten, zeigten gravierende Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen bei dem Versuch, Gegenstände zu Bündeln zusammenzufassen und auf diese Weise – hier im System zur Basis 6 – die Zifferndarstellung zu erzeugen. Mit der Begründung, dass es „die Sechs ja gar nicht gibt im 6er-System“, entstand das rechtsstehende Bild.

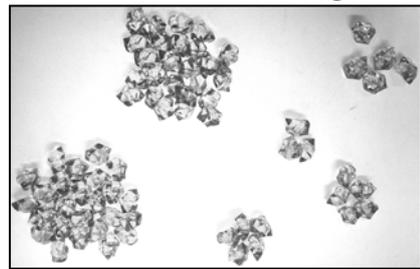


Abb. 1: Bündelungsergebnis von Studierenden im System zur Basis 6

Um ein genaueres Bild über diese offensichtlich vorhandenen (Fehl-)Vorstellungen zeichnen zu können, sollen in der Untersuchung folgende Fragestellungen verfolgt werden:

- Welche Vorstellungen zu Stellenwertsystemen und Bündelungsprinzip sind bei Lehramtsstudierenden am Studienbeginn vorhanden?
- Wie entwickeln sich diese Vorstellungen im Studium?
- Wie kann man den Entwicklungsprozess effizient unterstützen?

Damit die Ausprägungen und Entwicklungen der Vorstellungen der Studierenden erfasst werden können, bedarf es der genauen Beobachtung konkreter Durchführungen von Bündelungsprozessen sowie der begleitenden Erklärungen der handelnden Testperson (TPN). Hierzu wurde ein Interviewleitfaden entwickelt, der zu vier Zeitpunkten im Verlauf des Studiums für querschnittliche Erhebungen eingesetzt wird (in ausgewählten Fällen wird zusätzlich eine längsschnittliche Begleitung realisiert):

- T1 zu Beginn (Studienanfänger, N=15)
- T2 nach dem Besuch der Fachvorlesung zur Arithmetik (N=15)
- T3 nach Besuch der zugehörigen Didaktikveranstaltung (N=20).
- T4 am Ende (Absolventen, N=10)

2. Interviewleitfaden

Der verwendete Interviewleitfaden ist gegliedert in drei Teilbereiche. Jeder dieser Blöcke hat einen eigenen Fokus und ist an gewissen Stellen mit Abbruchkriterien versehen (siehe Tabelle 1).

<i>Fokus</i>	<i>Inhalte</i>
Zahldarstellung und Bündeln im Dezimalsystem	<ul style="list-style-type: none"> - Darstellung einer gegebenen Zahl in einer Stellenwerttafel und Erklären des Zusammenhangs mit 10er-Potenzen - Beschreiben, Durchführen und Erklären eines Bündelungsprozesses (Material: 123 Deko-Steinchen).
Zahldarstellung und Bündeln in einem nichtdezimalen System	<ul style="list-style-type: none"> - Transfer des Bündelungsprozesses ins 4er-System: Beschreiben, Durchführen und Erklären (Material wie oben) - Ablesen der Zifferndarstellung der gebündelten Zahl - Übertragen einer Zahl aus dem 4er-System ins Dezimalsystem
Bedeutung der Bündelstruktur bei Operationen	Lösen einer schriftlichen Additionsaufgabe und Erklären der Überträge <ul style="list-style-type: none"> - im Dezimalsystem - im Stellenwertsystem zur Basis 4

Tabelle 1: Struktur des Interviewleitfadens

Mit diesem Leitfaden wird versucht, sowohl für das „Bündeln“ notwendige fachliche Grundlagen (z.B. Verständnis zu Potenzen) abzudecken als auch die konzeptuelle Einbettung in die Theorie der Grundvorstellungen (Übertragbarkeit in ein fremdes System) und natürlich auch in die Kontexte der Schulmathematik (Transfer auf die Operationen) herzustellen.

3. Erste Eindrücke zu Bündelungsprozessen

Zum jetzigen Zeitpunkt liegen die Interviews der ersten beiden Messzeitpunkte vor, es kann also ein Eindruck über Vorkenntnisse und Entwicklungen im Bereich der Vorstellungen zum Bündelungsprinzip während des ersten Semesters gewonnen werden. Zusammenfassend kann man die Ergebnisse als eher ernüchternd bezeichnen, da aus der Schule bekannte Stoffgebiete wie Zehnerpotenzen nur unzureichend durchdrungen sind und auch im Verlauf des Semesters häufig nur oberflächliche oder algorithmische und auf die formale Notation fixierte Kenntnisse ausgebildet wurden.

Zum Messzeitpunkt T1 gelang den meisten Studierenden die Bündelung im Zehnersystem, allerdings konnte bis auf eine Studentin keine TPN das Prinzip auf das 4er-System übertragen. Die auftretenden Schwierigkeiten

lassen sich zusammenfassen als eine „Fixierung auf Dezimalzahlen“, in diesem Fall das Anstreben von z.B. 100 oder auch 20 als „Zahl mit der man gut rechnen kann“. Ebenfalls zeigten fast alle TPN erhebliche Schwierigkeiten beim Benennen der Zehnerpotenzen in der Stellenwerttafel.

Zum Zeitpunkt T2 erklärten die Studierenden die Bedeutung von Ziffern und Stellenwerten im Dezimalsystem souverän, beim Transfer der Bedeutungen und des konkreten Bündelungsprozesses auf das 4er-System jedoch zeigten sich diverse Fehlermuster. Zum einen gab es erneut Vermischungen mit dem Dezimalsystem, indem ab der zweiten Stufe nicht mehr vier, sondern zehn Einheiten zum nächsten Bündel zusammengefasst wurden. Zum anderen zeigten sich Schwierigkeiten bei der Bildung und Deutung von Bündeln höherer Ordnung (vier 16er zu 64er) und bei der Erzeugung der Zifferndarstellung der Zahl. Häufig kam es zu einer Verwechslung der Vier (als Bündelzahl) mit der Drei (als größte Ziffer).

In Abbildung 2 wird versucht, die beobachteten Ausprägungen und Hürden zusammenzufassen und zu ordnen. Dieses Modell soll im weiteren Verlauf der Untersuchung anhand der Daten aus T3 und T4 ausgeschärft werden, im Hinblick auf weitere Abstufungen und

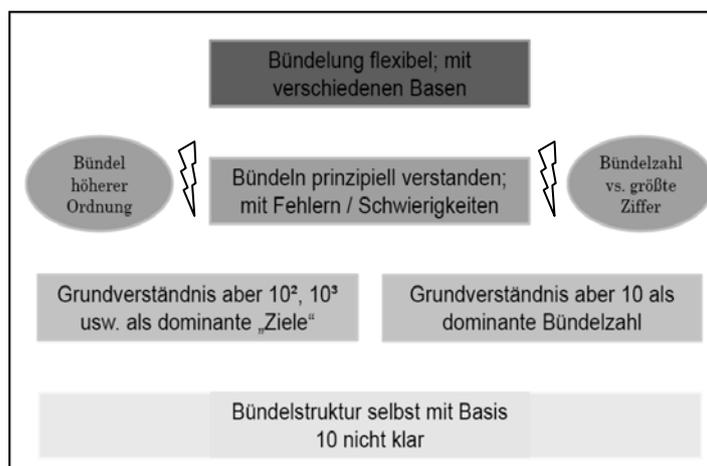


Abb. 2: Vorstellungsausprägungen zum Bündelungsprinzip

Fehlvorstellungen. Weitere Ziele sind es, hilfreiche

Unterstützungsmöglichkeiten für die Ausbildung einer flexiblen und belastbaren Vorstellung des Bündelungsprozesses zu identifizieren (z.B. „Tacho-Modell“, Mehrsystemblöcke u.v.m.) und die Transferleistungen in den Bereich der Operationen zu untersuchen.

Literatur

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg: Spektrum

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (2008). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor.