

Mathias HATTERMANN, Bielefeld

## **Individuelle Erklärungsmodelle zu Rechenoperationen mit ganzen Zahlen**

Ausgehend von den natürlichen Zahlen bildet der Übergang zu den ganzen Zahlen und den Bruchzahlen den ersten bzw. zweiten Schritt der Zahlbereichserweiterungen in der Sekundarstufe I. Im Unterricht der allgemeinbildenden Schulen werden überwiegend anschauliche Konzepte zur Behandlung der negativen Zahlen eingesetzt. Hierbei existiert eine Vielzahl von didaktischen Modellen und Spielen (vgl. Malle & vom Hofe 2007), deren Struktur seit längerer Zeit bekannt ist und die sich im Vergleich zu früheren Vorschlägen lediglich in ansprechenderen Aufmachungen unterscheiden. Jedoch ist kaum eines dieser Modelle geeignet, tatsächlich alle Rechenoperationen im konkreten Handlungszusammenhang zu veranschaulichen. *„The difficulty of accepting the negative numbers as meaningful mathematical entities derives from the difficulty of identifying a good intuitive, familiar model which would consistently satisfy all the algebraic properties of these numbers, says Glaeser. As a matter of fact, such a model does not exist. One may create some models, but only by using a system of artificial conventions”* (vgl. Fischbein 1987, S. 100 und Glaeser 1981).

Dieser Problematik widmet sich ein Projekt der Universität Bielefeld in Zusammenarbeit mit der Laborschule Bielefeld, über dessen theoretische Hintergründe und Konzeption im Folgenden berichtet wird.

### **Theoretischer Rahmen**

Die Theorie der ‚Grundvorstellungen‘ nach vom Hofe (1995) liefert eine theoretische Basis, anhand derer die Problematik bei der Behandlung der ganzen Zahlen im Vergleich zur Bruchrechnung aufgezeigt werden kann. Grundvorstellungen sind individuelle Vorstellungen, die den Zusammenhang von realer Welt, Mathematik und Individuum herstellen und einem Entwicklungsprozess unterworfen sind. Man unterscheidet ‚primäre Grundvorstellungen‘, welche am konkreten Handlungskontext anbinden von ‚sekundären Grundvorstellungen‘, die sich bereits auf mathematische Darstellungen wie Formeln, Graphen oder bekannte Zusammenhänge stützen. Im Gegensatz zu positiven Bruchzahlen ist die Thematisierung primärer Grundvorstellungen, die einen direkten Alltagsbezug besitzen und aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler stammen, bei negativen Zahlen deutlich schwieriger und besonders im Bereich der Multiplikation nicht direkt möglich. Mag dies in ausgesuchten Fällen bei der Addition mithilfe geeigneter didaktischer Modelle noch gelingen, so ist die Deutung

der Operationen  $(-a) \cdot b = -a \cdot b$  und  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$  für natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  nicht mehr mit primären Grundvorstellungen in Verbindung zu bringen. Solche Einsichten können auf sekundären Grundvorstellungen aufbauen, welche jedoch innermathematisch gebildet werden und nicht mehr direkt an alltägliche Erfahrungen anknüpfen. Aufgrund dieser mangelnden Alltagsnähe erweist sich die Behandlung aller Rechenoperationen an einem Modell als kaum zu überwindende Schwierigkeit, was bereits Freudenthal implizit bemerkt: „*Man muß sich klar machen, daß die Schwierigkeiten mit den negativen Zahlen nicht in ihrer Einführung liegen, auch nicht in Ausdrucksweisen wie  $3-7$ ,  $7+(-3)$ ,  $(-7)+3$ ,  $2 \cdot (-5)$ , sondern in  $3-(-7)$ ,  $10-(-7)$ ,  $(-3)+(-7)$ ,  $(-3)-(-7)$ ,  $(-2) \cdot (-5)$ . Wenn einer eine neue Didaktik der negativen Zahlen vorführt, muß man darauf achten, welche Aufgaben er behandelt und welche er unterschlägt [...]*“ (Freudenthal 1973, S. 251).

Entscheidet man sich als Lehrender für die Verwendung eines didaktischen Modells oder einer Metapher (im Sinne von Lakoff & Nuñez 1997, 2001), weil damit eine bestimmte Aufgabe gut veranschaulicht werden kann, so ist eine Detailanalyse hinsichtlich der Gesamtheit der Operationen erforderlich, um die Tragfähigkeit adäquat einschätzen zu können und um der von Sfard angesprochenen Problematik zu entgehen: „*Metaphors are often like Trojan horses that enter discourses with hidden armies of unhelpful entailments*“ (Sfard, 2008, S. 35). Ausgehend von diesem Problemfeld der unterschiedlichen didaktischen Modelle und Erklärungsmetaphern bietet die nationale mathematikdidaktische Forschung wenig aktuelle Publikationen zum Thema. Auf internationaler Ebene kann jedoch an aktuelle Forschungsdesiderata angebunden werden, welche ein fruchtbares Forschungsfeld aufzeigen. Die Ergebnisse von Kilhamn (2008) legen nahe, die Suche nach dem perfekten Modell aufzugeben und nach geeigneten Kombinationen von Modellen zu suchen und deren Potential sowie deren Einschränkungen zu explizieren: „*As a contribution to the research society these results suggest that the debate should not concern which model to use and why one model is better than another but rather what are the consequences of our use of metaphors and how do we deal with these consequences*“ (Kilhamn 2008, S. 10). In der gleichen Untersuchung bestätigt Kilhamn die Ergebnisse von Chiu (2001), sodass von der Tatsache ausgegangen werden kann, dass Experten bei der Erklärung von Rechenoperationen sich wesentlich seltener auf die Verwendung von Metaphern stützen als Anfänger. Weiterhin zeichnen sich in der Studie von Kilhamn (2008) die erfolgreichsten Probanden durch eine Kombination von formalen und inhaltlichen Begründungen für die Durchführung von Rechenoperationen aus. Demgegenüber erweisen sich die Ergebnisse der Probanden, die rein inhaltliche Begründungen am Modell bevorzugen als durchgehend fehler-

haft. In Anlehnung an diese und weitere Ergebnisse der internationalen Forschung sind die Konzepte des geplanten Projekts erstellt.

### **Projekt mit der Laborschule Bielefeld**

Die Laborschule ist eine staatliche Versuchsschule des Bundeslandes Nordrhein-Westfalen, deren wissenschaftliche Einrichtung an die Universität Bielefeld angegliedert ist. In Kooperation mit der Laborschule sollen u.a. die folgenden Forschungsfragen beantwortet werden:

- Welche Kompetenzen und typischen Lernhürden zeigen sich bei individuellen Lernprozessen von Schülerinnen und Schülern beim Umgang mit negativen Zahlen?
- Welche (Kombinationen) von/der didaktischen Modelle erweisen sich als besonders tragfähig zur inhaltlichen Deutung negativer Zahlen? Welche konstruktiven Hinweise können auf Materialebene zur Modifikation bzw. Neukonzeption gewonnen werden, um die Tragfähigkeit dieser Modelle bzw. Modellkombinationen zu verbessern?

Das Forschungsdesign sieht die Durchführung einer Feldstudie vor, in der den Schülerinnen und Schülern in einem normierten und zu videographierenden Unterricht über den Zeitraum von ca. 3 Wochen mehrere didaktische Modelle zur Behandlung negativer Zahlen angeboten werden. Im Anschluss sollen die Schülerinnen und Schüler einem fiktiven Mitschüler in schriftlicher Form Aufgaben erklären, wobei sie sich für ein Modell ihrer Wahl entscheiden können. Mithilfe dieser schriftlichen Schülerprodukte können quantitative Daten hinsichtlich der benutzten Modelle und qualitative Daten bezogen auf individuelle Lernhürden und Verständnisschwierigkeiten gewonnen werden. Im Anschluss sollen die aufgedeckten Problemfelder durch halbstandardisierte Interviews mit ausgewählten Lernenden detaillierter untersucht und expliziert werden. Im Anschluss können gewonnene Forschungsergebnisse anhand des Videomaterials an der tatsächlichen Unterrichtsdurchführung kritisch reflektiert werden. Das gesamte Vorhaben ist in die international bewährte und ursprünglich in Japan entwickelte Methode der ‚Lesson Studies‘ zur Lehrer-Praxisforschung und Lehrerprofessionalisierung eingebettet (vgl. Lewis et al. 2009; White et al. 2008 und Kullmann (im Erscheinen). Bei diesem Ansatz arbeiten Lehrer und Forschergruppen eng zusammen und durchlaufen die vier Phasen der Untersuchung des Gegenstands, der Unterrichtsplanung, Unterrichtsdurchführung und deren Reflexion immer gemeinsam, wobei der Gesamttablauf zur gleichen Unterrichtseinheit mehrmals mit weiteren Klassen durchlaufen wird. Aufgrund dieser Konzeption können gewonnene Erkenntnisse in die

weiteren Abläufe integriert und angepasst werden, sodass die Bereitstellung konstruktiver Hinweise zur Behandlung der ganzen Zahlen als Ziel des Forschungsprojektes verfolgt wird.

## Literatur

- Chiu, M. (2001). Using metaphors to understand and solve arithmetic problems: Novices and experts working with negative numbers. *Mathematical thinking and learning*, 3(2-3), 93–124.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (1.Aufl., Vol. 1). Stuttgart: Ernst Klett.
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303–346.
- Hefendehl-Hebeker, L.(Hg.) (1989). Minuszahlen; *mathematik lehren*, (35).
- Hofe, R. v. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Texte zur Didaktik der Mathematik*. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.
- Hofe, R. v., & Malle, G. (Hg.) (2007). *Auf dem Weg zu neuen Zahlen. mathematik lehren*, 142. Seelze: Friedrich-Verlag.
- Kilhamn, C. (2008). Making sense of negative numbers through metaphorical reasoning. MADIF - 6 The sixth Swedish Mathematics Education Research Seminar. Retrieved November 25, 2011, from <http://www.mai.liu.se/SMDF/madif6/Kilhamn.pdf>.
- Kullmann, H. (im Erscheinen). Lesson Studies – eine konsequente Form unterrichtsbezogener Lehrerkooperation. In: S.G. Huber & F. Ahlgrimm (Hrsg.): *Kooperation in der Schule*. Münster: Waxmann.
- Lakoff, G., & Núñez, R. (1997). The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a minded-based mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning, analogies, metaphors and images* (pp. 21–89). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2001). *Where mathematics come from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
- Lewis, C. C., Perry, R. R. & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: a theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 285–304.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. New York: Cambridge University Press.
- White, A. L., & Lim, C. S. (2008). Lesson study in Asia Pacific classrooms: local responses to a global movement. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 40(6), 915–925.