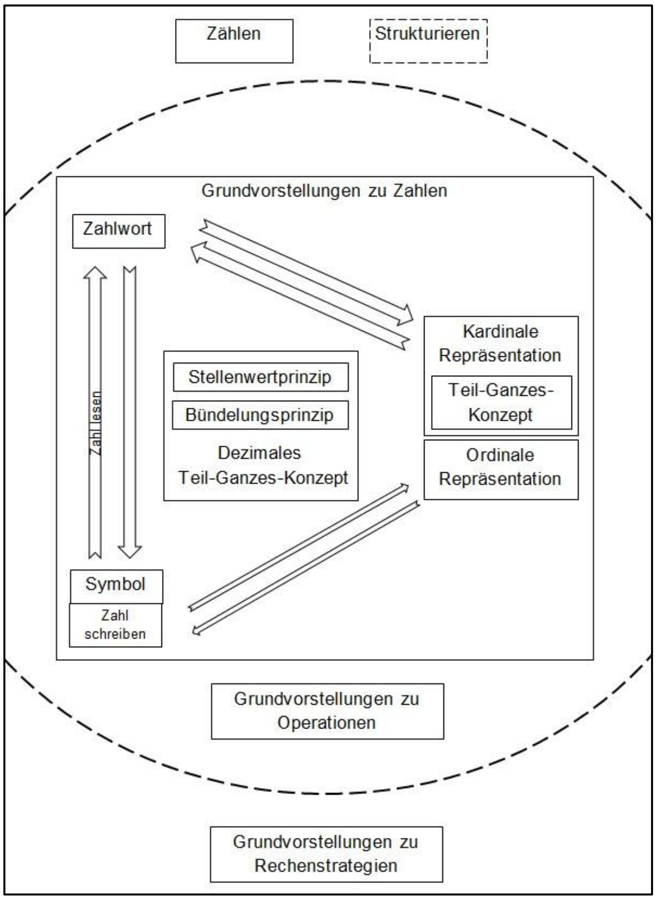
Marina FROMME, Karlsruhe

Zur Bedeutung eines Stellenwertverständnisses beim Bearbeiten arithmetischer Aufgaben

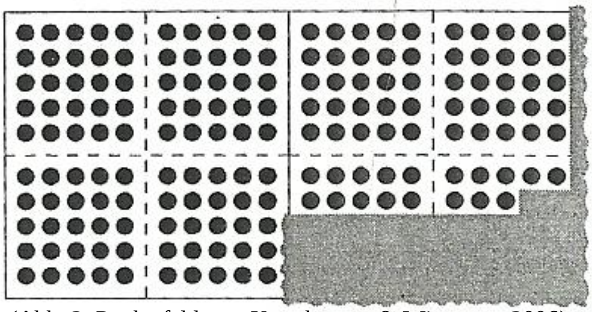
In der mathematikdidaktischen Literatur herrscht international Konsens darüber, dem Stellenwertverständnis eine hohe Bedeutung für die Entwicklung eines umfassenden Zahlbegriffs und von flexiblen Rechenstrategien beizumessen (vgl. Thompson & Bramald 2002; Schipper 2009). Ein mangelndes Stellenwertverständnis gilt auch als ein Hauptsymptom sogenannter Rechenstörungen. Während im englischsprachigen Raum bereits eine Vielzahl von Studien durchgeführt wurde (vgl. Fuson et al. 1997; Ross 1989; Hiebert & Wearne 1992; Pixner et al. 2011), gibt es im deutschsprachigen Raum wenige Studien, die Voraussetzungen und Anwendungen des dezimalen Stellenwertsystems systematisch untersuchen.

Aus der vorliegenden nationalen und internationalen Literatur können Voraussetzungen, Teilkompetenzen, Einflussfaktoren und auch Auswirkungen von Stellenwertverständnis identifiziert und zueinander in Beziehung gesetzt werden (vgl. Abb. 1). Des Weiteren kann abgeleitet werden, dass Wechselwirkungen zwischen Einflussfaktoren bestehen. Die **arithmetischen Kompetenzen**, die häufig durch flexibles Rechnen im Zahlenraum bis 100 operationalisiert werden und unter der Nutzung von Eigenschaften des Stellenwertsystems charakterisiert werden, stehen in Beziehung zu **Voraussetzungen** für Stellenwertverständnis. Diese Beziehungen sollen exemplarisch am Zusammenhang zwischen der Nutzung von Analogien im Stellenwertsystem beim additiven und subtraktiven Rechnen und der Strukturierungsfähigkeit untersucht werden.



(Abb. 1: Voraussetzungen, Teilkompetenzen und Auswirkungen von Stellenwertverständnis)

In der Pilotierung eines Testinstrumentes zur Untersuchung von Stellenwertverständnis wurden 6 Kinder interviewt, davon fünf (2. Jgst.) einer Regelschule und ein Kind (5. Jgst.) einer Förderschule. In der Aufgabe zum Strukturieren wurde den Kindern die Darstellung in Abb. 2 (vgl. Krauthausen & Wittmann, 2006) vorgelegt und nach der Anzahl der Punkte gefragt.



(Abb. 2: Punktefeld aus: Krauthausen & Wittmann, 2006)

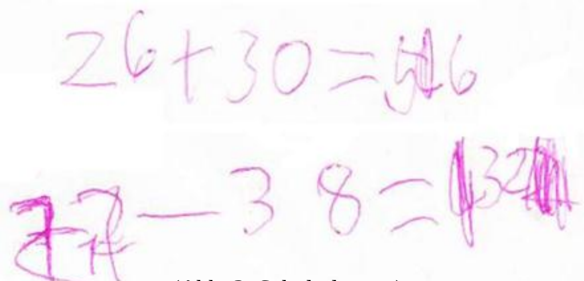
Zur Auswertung der Bearbeitungswege der Kinder wurden Kategorien erstellt, die Entwicklung, Art der Struktur, Häufigkeit der Verwendung und Häufigkeit der Weiterverwendung einer bereits erschlossenen Struktur in andere Bereiche des Punktefeldes beschreiben sollen. Hierzu wird nach dekadischen **(**D_{10}, D_{100}**)** und nicht-dekadischen **(**N_5, N_{25}, N_{50}**)** Strukturen differenziert. Falls keine Struktur genutzt und die Anzahl durch einen Zählprozess ermittelt wird, wird ein „Z“ im Pfad vermerkt. Um den Bearbeitungsweg besser nachvollziehen zu können, werden die Zwischenergebnisse der Kinder in Klammern notiert.

Zur Vorgehensweise der Kinder bei der o.g. Aufgabenstellung werden nun beispielhaft zwei Bearbeitungswege beschrieben. Steffi (5. Klasse) beginnt im linken oberen Feld vertikal die Anzahl der Punkte bis zur gestrichelten Linie zählend zu bestimmen und sagt, dass es fünf sind. Dieses Wissen (N_5) nutzt sie dann um die Anzahl der Punkte in einer Spalte zu bestimmen und bestimmt additiv das Ergebnis zehn (+ (10)). Das linke Hunderterfeld bestimmt sie durch spaltenweises Zählen in Zehnerschritten und nutzt damit die erschlossene Zehnerstruktur (D_{10}). Diese Strategie kann sie im rechten Feld aufgrund der abgedeckten unteren Zeilen nicht weiter verwenden. Aus diesem Grund entscheidet sie sich für ein Zählen in Einerschritten (Z) und bricht nach längerem Zählen den Bearbeitungsprozess ab.

Leon (2. Klasse) beginnt ebenfalls im oberen linken Feld und zählt vertikal und horizontal jeweils fünf Punkte ab. Er erklärt, dass fünfmal fünf (N_5) fünfundzwanzig ergeben (• (25)). Diese erschlossene Struktur (N_{25}) nutzt er um die Anzahl der Punkte im linken halben Hunderterfeld zu bestimmen und legt die fünfzig fest (+ (50)). Diese neu erschlossene Struktur wendet er für die Anzahlbestimmung im gesamten linken Feld an und bestimmt die 100 (N_{50} + (100)). Im rechten Punktefeld kann Leon die Fünfzigerstruktur weiternutzen, die er im linken erschlossen hat und beschreibt den Bereich bis zur gestrichelten Linie im rechten Feld insgesamt als 150 (N_{50} + (150)). Im unterer linken Bereich des rechten Feldes nutzt Leon ebenfalls eine bereits erschlossene Struktur, um zu bestimmen, dass zehn dazu kommen, sodass das neue Zwischenergebnis bei 160 liegt (N_5 + (10) + (160)). Abschließend nutzt er wieder eine bereits bekannte Struktur und kommt zu dem Gesamtergebnis von 168 (N_5 + (8) + (168)).

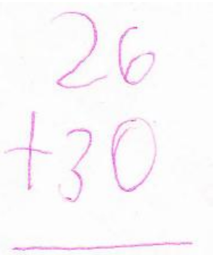
Als Zwischenfazit lässt sich festhalten, dass Steffi zwei Strukturen genutzt, einmal die Struktur gewechselt und keine Weiternutzungen verwendet hat. Leon hat insgesamt drei Strukturen genutzt, dreimal die Struktur gewechselt und auch dreimal eine bereits erschlossene Struktur auf einen anderen Bereich angewendet.

Im Aufgabenblock zur Strategiewahl werden exemplarisch zwei Aufgaben beschrieben. Die Rechenaufgaben werden mündlich gestellt und die Kinder werden angehalten diese im Kopf auszurechnen. Bei der Aufgabe 26 + 30 nennt Leon spontan das Ergebnis 56. Auf Nachfrage beschreibt er seinen Rechenweg: „20 plus 30 ist 50 und die 6 bleibt." Bei der Aufgabe 72 – 38 beginnt er Stellenweise und endet Schrittweise. „70 minus 30 sind 42 und 42 minus 8 sind 34."



(Abb. 3: Schülerlösung)

Steffi bittet direkt nach der Formulierung der Aufgabe nach einem Blatt Papier und schreibt die Aufgabe nebeneinander auf. Sie beschreibt, dass null und sechs zusammen sechs ergäben und beginnt die Zahl zu notieren, unterbricht dann und schreibt die sechs weiter nach links. Sie erklärt dann, dass zwei und drei zusammen fünf ergäben und schreibt die Ziffer links neben die sechs. Nach Beendigung der Aufgabe erklärt Steffi, dass sie sich solche Aufgaben manchmal auch anders vorstelle und notiert die Zahlen zur Demonstration untereinander (vgl. Abb. 4). Bei der Aufgabe 72 – 38 macht sie bei der Notation einen Zahlendreher, den sie aber selbst bemerkt und korrigiert. Sie beginnt im Kopf zu rechnen und sagt, dass man von der acht zur zehn zwei brauche, die sie auch aufschreibt. Ihren Übertrag notiert sie im Minuenden zwischen Zehner und Einer. Sie rechnet noch einmal nach und streicht die zwei durch, notiert sie aber sofort wieder. Ihren nächsten Schritt beschreibt sie mit „Von der drei bis zur sieben". Sie schreibt die vier, streicht diese sofort wieder mit der Begründung des Übersehens des Übertrags und notiert abschließend die drei links neben der zwei. (vgl. Abb. 3)



(Abb. 4: Schülerlösung)

Leon rechet deutlich flexibler und nutzt bestehende Analogien im Stellenwertsystem. Steffi verrechnet zwar die Ziffern in den Stellenwerten, geht hierbei allerdings eher rezeptartig vor.

Zu beobachten ist an dieser Stelle, dass obwohl Steffi beim Strukturieren dekadische Strukturen nutzt und auch beim Rechnen mit den Stellenwerten arbeitet, sie große Schwierigkeiten hat die Aufgaben zu lösen. Leon hingegen strukturiert sehr flexibel, nutzt nicht-dekadische Strukturen und verwendet Analogien des Stellenwertsystems beim Berechnen von Aufgaben. Es kann folgende Hypothese generiert und in weiteren Untersuchungen weiter analysiert werden. Je flexibler ein Kind dekadische Strukturen bei Anzahlauffassung nutzt, desto flexibler werden Analogien im Stellenwertsystem genutzt. Die bisherigen Auswertungen zeigen, dass nicht ausschließlich die Nutzung der *dekadischen* Struktur als eine Voraussetzung für Stellenwertverständnis erfolgversprechend ist, sondern eher eine Nutzung unterschiedlicher (dekadischer und nicht-dekadischer) Strukturen, die flexibel verwendet werden können.

Weiterführende Fragen

Es bleibt offen inwieweit Materialkenntnis und dessen Einführung im Unterricht die Strukturnutzung beeinflussen. Bei der Wahl zur Rechenstrategie gibt es weitere Einflussfaktoren, wie die Bauart der Zahlen, die Art der Darstellung, das Zahlverständnis und die Kenntnis der schriftlichen Algorithmen.

Literatur

Fuson, K., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H., Human, P., Olivier, A., Carpenter, T., & Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130-162.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1992). Links between Teaching and Learning Place Value with Understanding in First Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(2), 98-122.

Krauthausen, G. & Wittmann, E. C. (2006). Blitzrechnen 2. Basiskurs Zahlen. Karteikarten. Leipzig: Klett.

Pixner, S., Moeller, K., Hermanova, V., Nuerk, H.-C. & Kaufmann, L. (2011). Whorf reloaded: Language effects on nonverbal number processing in first grade—A trilingual study. *Journal of Experimental Child Psychology*, 108(2), 371–382.

Ross, S. (1989). Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. *Arithmetic Teacher*, 36, 47–51.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel Verlag.

Thompson, I. & Bramald, R. (2002). *An investigation of the relationship between young children´s understanding of the concept of place value and their competence at mental addition*. Verfügbar unter http://www.ianthompson.pi.dsl.pipex.com [23.03.2012]