

Natalie TROPPER, Dominik LEISS, Lüneburg, Martin HÄNZE, Kassel

## **Vom Beispiel zum Schema – Strategiegeleitetes Modellieren durch heuristische Lösungsbeispiele**

Empirische Befunde zu Schülerschwierigkeiten im Modellierungsprozess (z.B. Schukajlow 2011, Stillman et al. 2010) weisen darauf hin, dass mathematisches Modellieren eine sehr komplexe Tätigkeit ist. So zeigten Galbraith und Stillman (2006) auf, dass jeder Schritt im Modellierungsprozess eine potentielle kognitive Hürde für Lernende darstellt. Entsprechend stellt sich im Zusammenhang mit der Vermittlung von Modellierungskompetenz die Frage, wie Lernenden das Überwinden dieser Hürden sowie allgemein ein flexibles Herangehen an realitätsbezogene Problemstellungen ermöglicht werden kann.

Die dem Projekt MaMoS<sup>1</sup> (**M**athematisches **M**odellieren mit **S**trategien) zugrundeliegende Annahme ist, dass hierzu eine gezielte Vermittlung modellierungsbezogener kognitiver sowie metakognitiver Lernstrategien vonnöten ist. Im vorliegenden Beitrag wird ein Ansatz vorgestellt, ein modellierungsspezifisches Strategieinstrument implizit mithilfe heuristischer Lösungsbeispiele zu vermitteln.

### **1. Strategieinstrument Lösungsplan**

Der im DISUM-Projekt entwickelte sog. Lösungsplan stellt eine vereinfachte und auf vier Schritte verdichtete Variante des siebenschrittigen Modellierungskreislaufs von Blum und Leiss (2005) dar. Er soll Lernenden als strategisches Instrument zur Bearbeitung von Modellierungsaufgaben dienen und stellt hierzu die Schritte *Aufgabe verstehen*, *Mathematik suchen*, *Mathematik benutzen* und *Ergebnis erklären* bereit. Die Reduktion auf diese vier Schritte soll den Lösungsplan zum einen für Lernende handhabbar machen, zum anderen ist er handlungsleitend formuliert, indem er für die einzelnen Phasen des Modellierungsprozesses konkrete kognitive Lernstrategien (z.B. Anfertigen einer Skizze, Aktivierung von Vorwissen) bereitstellt. Da der Lösungsplan in seiner Gesamtheit als Instrument zur Planung und Regulation des Bearbeitungsprozesses genutzt werden kann, kann er zudem das metakognitive Strategierepertoire der Schüler unterstützen.

Der Lösungsplan wurde bei DISUM im Rahmen einer Laborstudie erprobt, wo er den Lernenden als Arbeitsmaterial und der Lehrperson als Interven-

---

<sup>1</sup> Bei MaMoS handelt es sich um ein interdisziplinäres Projekt zwischen Fachdidaktik (Dominik Leiss, Lüneburg) und pädagogischer Psychologie (Martin Hänze, Kassel), welches zurzeit von der Leuphana Universität Lüneburg finanziert wird.

tionsgrundlage vorlag. Während sich auf quantitativer Ebene Hinweise für die positive Wirkung des Instruments auf die Entwicklung von Modellierungskompetenz ergaben, zeigte eine qualitative Betrachtung der im Rahmen der Studie entstandenen Unterrichtsvideos und Schülerlösungen, dass die Lernenden den Lösungsplan nur sehr selten verwendet und das durch ihn bereitgestellte Lösungsschema nicht erkennbar übernommen bzw. adaptiert haben. Die alleinige Bereitstellung des Instruments scheint also zur Vermittlung der zugrunde liegenden Strategien nicht auszureichen.

## **2. Lernen mit heuristischen Lösungsbeispielen**

Als Instruktionmethode zur gezielteren Vermittlung des Lösungsplans wurde in MaMoS das Lösungsbeispielernen gewählt. Bei Lösungsbeispielen handelt es sich um Aufgabenbeispiele, die neben der Aufgabenstellung auch eine schrittweise Lösungsdarstellung enthalten. Die Grundidee des Lernens mit Lösungsbeispielen ist, dass ein zu vermittelndes Schema einer Serie von Lösungsbeispielen zugrunde liegt und durch die Beschäftigung mit den Beispielen implizit vermittelt wird. In diesem Zusammenhang konnte bereits vielfach der sog. Lösungsbeispieleffekt (Sweller et al. 1998, S. 273) nachgewiesen werden: Die Konfrontation mit einer Reihe von Lösungsbeispielen führt bei Lernenden häufig zu besseren Leistungen beim Transfer auf verwandte Problemstellungen als das eigenständige Bearbeiten derselben Aufgaben. Der Effekt wurde bislang vor allem für algorithmische Lösungsbeispiele repliziert. Für nicht-algorithmische Kontexte wie mathematisches Modellieren haben Reiss und Renkl (2002) sog. heuristische Lösungsbeispiele entwickelt. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie einen realistischen statt eines idealtypischen Lösungsprozesses abbilden und auch tentative sowie explorative Elemente enthalten, sodass implizit problemlösendes Arbeiten und heuristischen Strategien vermittelt werden sollen (vgl. Zöttl et al. 2010). Für heuristische Lösungsbeispiele konnte der Lösungsbeispieleffekt noch nicht beim mathematischen Modellieren, aber bereits mehrfach im Bereich des mathematischen Argumentierens belegt werden.

## **3. Erste Pilotierungsergebnisse**

Um zu untersuchen, wie sich der Lösungsplan, wenn er implizit durch eine Serie heuristischer Lösungsbeispiele vermittelt wird, auf die Aufgabenbearbeitung von Lernenden beim Lösen von Modellierungsaufgaben auswirkt, wurde im Rahmen von MaMoS eine Pilotierungsstudie in einer neunten Realschulklasse durchgeführt. In fünf Unterrichtsstunden bearbeiteten die Lernenden zunächst Lösungsbeispiele zu Modellierungsaufgaben aus dem Bereich Satz des Pythagoras, auf die nach einem sukzessiven Fading ausgearbeiteter Lösungsschritte das selbständige Bearbeiten von Auf-

gaben folgte. Eingerahmt wurde die Unterrichtseinheit von einem Vor- und Nachtest, die unter anderem je fünf Modellierungsaufgaben sowie eine Aufgabe zu explizitem modellierungsspezifischem Strategiewissen enthielten. Die zugehörigen Schülerlösungen wurden für eine qualitative Analyse der Aufgabenbearbeitungen bezüglich der Aspekte *Strategieanwendung* und *explizites Strategiewissen* genutzt.

Die Befunde zur *Strategieanwendung* sollen exemplarisch an drei ausgewählten Resultaten vorgestellt werden:

Lösungsstruktur: Die Analyse offenbarte zunächst, dass die Schüler bei den Modellierungsaufgaben des Nachtests erstaunlich häufig die Viererstruktur des Lösungsplans zur Strukturierung ihrer Lösung herangezogen haben. Bei der Aufgabe „Boje“ etwa konnte diese Struktur in 14 von 18 Schülerlösungen beobachtet werden (siehe hierzu beispielhaft die Lösung in Abb. 1).

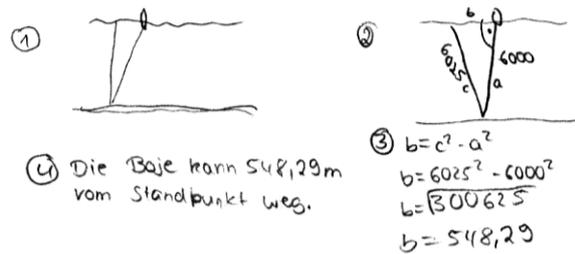


Abb. 1: Schülerlösung zu „Boje“

Skizzen: Der Anteil der Schülerlösungen, die eine Skizze enthalten, stieg von 60% im Vortest auf 87% im Nachtest. Eine genauere Betrachtung der Skizzen zeigt jedoch, dass sie von sehr unterschiedlicher Qualität sind: Während die Lernenden im Vortest ausschließlich Skizzen mit lösungsrelevanten Angaben erstellten, entstanden im Nachtest auch solche, die lediglich als externalisierte Vorstellung des Aufgabenkontextes verstanden werden können (siehe etwa die Skizzen aus Abb. 2). Die Auswertung mithilfe eines Ratingschemas zeigte schließlich, dass bei steigender Anzahl der Skizzen im Nachtest deren mittlere Qualität nahezu konstant geblieben ist.



Abb. 2: Schülerskizzen zu „Boje“

Antwortsatz: Während im Vortest bezogen auf die Modellierungsaufgaben ca. 60% aller Schülerlösungen einen Antwortsatz enthielten, stieg dieser Anteil im Nachtest auf rund 95% an.

Zur Testung des *expliziten Strategiewissen* wurde ein spezifischer Aufgabentypus eingesetzt: Zunächst wurde eine Modellierungsaufgabe dargeboten, die aber nicht gelöst werden musste. Im Anschluss wurde eine konkrete Situation während der Aufgabenbearbeitung geschildert (z.B. „Sarah sagt, dass sie nicht versteht, um was es in der Aufgabe geht und was dort gefragt ist.“), zu der die Lernenden möglichst viele Hinweise, was als nächstes zu tun sei, formulieren sollten. Die Auswertung ergab hier zum

einen, dass die Lernenden im Nachtest fast doppelt so viele problemadäquate Strategien (also solche, die unmittelbar den Teil im Lösungsprozess betreffen, der durch die Aufgabe angesprochen wurde) formulierten wie im Vortest. Zum anderen besitzen die im Nachtest formulierten strategischen Hinweise insgesamt ein höheres Allgemeinniveauniveau: Während sich die Hinweise im Vortest zumeist sehr stark auf die konkrete Aufgabensituation beziehen (z.B. „Die Dachsparren betrachten“), wurden im Nachtest deutlich mehr allgemein-strategische Hinweise formuliert, die auch auf andere Kontexte transferiert werden könnten (z.B. „Größenangaben notieren“).

#### **4. Zusammenfassung**

Einerseits lassen die häufigere Anwendung modellierungsrelevanter Strategien und die Verbesserung des expliziten Strategiewissens vermuten, dass sich die verwendete Kombination von Lösungsplan und heuristischen Lösungsbeispielen positiv auf die Aufgabenbearbeitung von Lernenden beim Umgang mit mathematischen Modellierungsaufgaben auswirken kann. Noch offen ist, ob die Methode tatsächlich effektiver ist als die eigenständige Bearbeitung derselben Aufgaben, sprich: ob hier ein Lösungsbeispiel-effekt eintritt. Andererseits zeigen die Resultate zur Skizzenqualität exemplarisch, dass das strategische Verhalten der Lernenden zusätzlich unterstützt werden sollte, damit Strategien nicht nur häufiger, sondern zugleich auch zielführend angewendet werden. Speziell stellt sich hierbei die Frage, ob die beschriebene Instruktionmethode sinnvoll durch die Lehrperson unterstützt werden kann.

Die weiteren Forschungsarbeiten im Projekt MaMoS werden vor allem darauf abzielen, diese beiden offenen Fragen zu beantworten.

#### **Literatur**

- Blum, W. & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *Mathematik lehren*, 128, 18-21.
- Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM*, 38 (2), 143-162.
- Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM*, 34 (1), 29-35.
- Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren*. Münster: Waxmann.
- Stillman, G., Brown, J. & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges within transition phases of mathematical modeling activities at year 9. In R. Lesh et al. (eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 384-398). NY: Springer.
- Sweller, J., van Merriënboer & J., Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10 (3), 251-296.
- Zöttl, L., Ufer, S. & Reiss, K. (2010). Modelling with heuristic worked examples in the KOMMA learning environment. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31 (1), 143-165.