

Christian FAHSE, Landau

Division durch Null

In diesem Artikel wird eine Einteilung der (Fehl-)Vorstellungen zur Division durch Null vorgestellt, die sich aus einer fragebogenbasierten Studie ergeben hat.

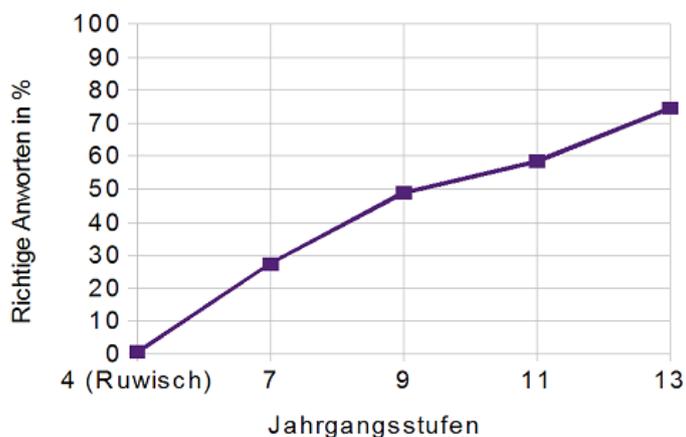
Die deskriptiv angelegte Studie umfasst 311 Schülerinnen und Schüler aus vier Jahrgangsstufen eines rheinland-pfälzischen Gymnasiums. Von diesen gehörten 73 der siebten, 86 der neunten, 89 der elften und 63 der dreizehnten Jahrgangsstufe an. Aus organisatorischen Gründen fand die Befragung der elften Jahrgangsstufe zu Beginn der Jahrgangsstufe 12 statt. Die Befragten äußerten sich schriftlich zu

- „Was ist das Ergebnis der Aufgabe $7:0$?“
- „Begründe Deine Meinung so, dass jemand, der die Antwort nicht kennt, es versteht.“

Darüber hinaus wurde u. a. gefragt, woher das Ergebnis bekannt war. Neben einer Sichtung der Vorstellungen zur Null und zur Division in diesem Kontext interessierte zunächst, wie viele Befragte im Verlauf der Schulzeit eine richtige Antwort nennen. Da die Studie noch nicht abgeschlossen ist, sind alle Befunde als vorläufig zu betrachten.

Ergebnisse der Befragung

Das Untersuchungsdesign hat quasi-längsschnittlichen Charakter: Unter der Annahme, dass sich die Jahrgangsstufen in ihrer Entwicklung nicht wesentlich unterscheiden, gewinnt man einen Eindruck, wie sich die Schülervorstellungen mit der Zeit verändern. Der rein deskriptive Befund hat dabei bereits eine hohe Praxisrelevanz, da die Division durch Null in so gut wie jedem Gymnasialjahr angesprochen wird. Während am Ende der Grund-



schule fast niemand die richtige Antwort nennt, wie eine Studie von Ruwisch (2008) zeigt, sind es in der siebten Jahrgangsstufe etwa ein Viertel, in der neunten die Hälfte und selbst im Abschlussjahrgang nur drei Viertel.

Das Thema Division durch Null findet sich weder im gültigen Lehrplan noch in den Bildungsstandards für die Grundschule. Bei Sichtung eines Querschnittes an aktuellen Grundschullehrwerken fanden sich nur bei einem ein Merksatz und wenige Übungen zur Division durch Null. Es ist deshalb plausibel, dass das Thema in der Grundschule meist nur nebenbei oder gar nicht behandelt wird. Daher erstaunt die fehlende Kenntnis am Ende der vierten Klasse nicht.

Im Gegensatz dazu wirft die weitere Entwicklung Fragen auf: Ab der fünften Jahrgangsstufe wurde das Thema nachweislich in den untersuchten Klassen behandelt und dennoch setzt sich die richtige Antwort nur langsam durch. Die Behandlung im Unterricht hat offensichtlich keine einschneidende Wirkung, die sich im Graphen in einer deutlichen Stufe mit nachfolgendem Verbleib auf etwa gleichem Niveau zeigen würde. Hingegen wächst der Anteil der richtigen Antworten langsam, aber recht stetig. Dieser graduelle Zuwachs könnte ein Indiz dafür sein, dass das Gelernte in Konflikt mit aus Schülersicht bewährten Konzepten tritt, von denen sich die Lernenden nur langsam lösen.

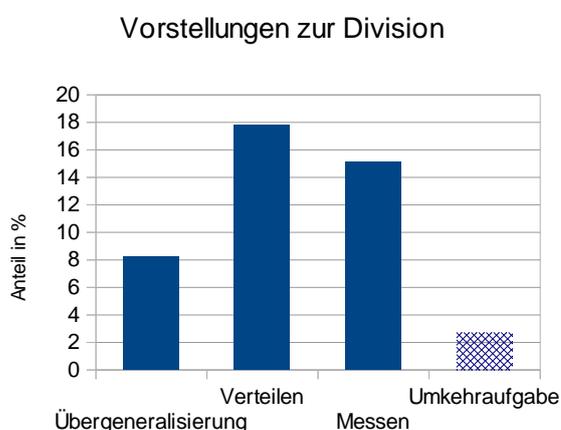
Zu dieser Vermutung könnte auch der Befund passen, dass etwa 40% der Befragten meinen, das von ihnen genannte Ergebnis aus der Grundschule zu wissen. Zunächst scheint dieser Befund im Widerspruch zu der oben ausgeführten geringen oder fehlenden Behandlung des Themas in der Primarstufe zu stehen. Allerdings ist der Anteil derer, die ein falsches Ergebnis nennen, bei denen, die sich auf die Grundschule beziehen, signifikant höher als bei denen, die dies nicht tun ($t(71)=3.149$, $p=.001$ in der 7. Jahrgangsstufe, $t(87)=2.020$, $p=.023$ in der 11. Jahrgangsstufe). Folgende Erklärung bietet sich an: Das Thema wurde tatsächlich nur marginal in der Grundschule behandelt. Aber insbesondere die falschen Ergebnisse 0 und 7 lassen sich mit konkreten Verteilungsvorstellungen begründen (s. unten), wodurch möglicherweise die Assoziation der Grundschule nahe gelegt wird.

Vorstellungen zur Null und zur Division

Was sind typische (Fehl-)Vorstellungen, die man bei Befragten der 7. Klasse findet und deren Entstehung in die Grundschule zurückreicht? Relevant sind hier die Vorstellungen zur Null und zur Division. Zunächst wird eine Dreiteilung der Vorstellungen zur Null in kardinal – operational – codierend vorgeschlagen, die einerseits die vielfältige Literatur zu dem Thema (u. a. Hefendehl-Hebeker 1981, 1982; Padberg 2005) zu systematisieren hilft, also stoffdidaktisch orientiert ist, und andererseits durch die Sichtung der Schülerantworten angeregt wurde.

- Eine **kardinale** Auffassung liegt vor, wenn bei Null an eine Situation gedacht wird, in der man grundsätzlich zählen könnte, in welcher die Zählhandlung aber mangels Objekten nicht startet, z. B. „die Anzahl der Pralinen in einer leeren Schachtel“.
- Eine **operationale** Auffassung betont, dass nichts getan wird. Dies ist z. B. der Fall, wenn an das Nicht-Hinlegen eines Siebenerpäckchens in $0 \cdot 7$ oder abstrakter, wenn an die Neutralität der Null bei der Addition als Verknüpfung gedacht wird.
- Die **codierende** Auffassung nimmt die Null als Zeichen für das Fehlen oder die Sinnlosigkeit eines Ergebnisses. Hier liegt die Betonung weniger auf dem „Nicht-Handeln“ als auf dem „Es kommt nichts heraus“, wobei das Wort „nichts“ die Codierung eines fehlgeschlagenen Prozesses mit 0 nahelegt.

In den Begründungen der Schülerinnen und Schüler fanden sich vor allem zwei Vorstellungen zur Division: das Verteilen und das Aufteilen/Messen im Sinne von „die 0 passt unendlich mal in die 7“. Nur wenige Befragte sahen die Division als Umkehraufgabe zur Multiplikation an, wie es fachlich in diesem Fall, z. B. als Probe, am ergiebigsten wäre. Die Übergeneralisierung, dass alle Rechnungen mit 0 auf das Ergebnis 0 führen, überlagerte bei einigen die Vorstellungen zur Division.



Relative Häufigkeiten dieser Vorstellungen in der Jahrgangsstufe 7 finden sich in der nebenstehenden Abbildung, wobei zu beachten ist, dass die des Verteilens sich nur auf diejenigen Befragten bezieht, die einen konkreten Sachzusammenhang nannten. Die Häufigkeit der Verteilungsvorstellung wird also eher unterschätzt.

Die Vorstellungen zur Division sind nun mit denen zur Null zusammenzubringen. Dabei ergeben sich typische Argumentationsmuster, die alle nachgewiesen werden konnten. Wer im Zusammenhang des Verteilens kardinal „denkt“, stellt fest, dass es keine Personen gibt, auf die man z. B. 7 Äpfel aufteilt und erachtet die Aufgabe als unsinnig. Beim „Hineinpassen“ wird man, je nachdem wie man das Auftreten des unvermeidlichen Restes beurteilt, zu den Ergebnissen „geht nicht“ oder „unendlich“ kommen. Bei der operationalen Auffassung gibt es

zwei interessante Fälle: Liegt das Augenmerk auf dem Verteilenden, der ja gar nicht verteilt, also 7 Äpfel behalten kann, oder eher auf dem, was verteilt wird, nämlich nichts? Beide Sichtweisen, vor allem aber die kardinale, kommen auch in Verbindung mit der codierenden vor: Es wird die Krux der Aufgabe erkannt und mit dem Ergebnis 0 beschrieben.

Aspekt	Null als Zahl	Null als Divisor (7:0)	Ergebnis
Kardinal	Zählvorgang prinzipiell möglich - keine Objekte	Verteilen: mangels Personen sinnlos	Geht nicht
		Messen: die 0 passt unendlich oft in die 7 und es bleibt noch ein Rest	Unendlich/geht nicht
operational	Handlung prinzipiell möglich - Anweisung, nichts zu tun	Teile die 7 nicht, behalte 7 (Perspektive des Verteilenden)	7
		Es wird nichts verteilt. (Perspektive der Empfangenden)	0
Codierend	Zeichen für einen Prozess ohne Ergebnis	Die Division ist nicht ausführbar.	0

Konsequenzen für die Unterrichtspraxis

Mangels natürlicher Sachprobleme, die auf eine Division durch Null führen, ist eine Behandlung dieses Themas in der Primarstufe nicht zu empfehlen und auch nicht notwendig. Wichtig ist aber, die Vorstellungen zur Null und zur Division sorgfältig anzubahnen. Bei der Null sollte man den kardinalen Aspekt abgrenzend betonen, auch wenn alle drei Auffassungen ihre Berechtigung haben, da sie im Alltag zu finden sind. Bei der Division ist eine Verengung der Vorstellungen auf das Verteilen zu vermeiden, indem man die auch im Hinblick auf Einheiten und Bruchzahlen wichtigen Aspekte Aufteilen/Messen und Umkehraufgabe gleichberechtigt neben das Verteilen stellt. In der Sekundarstufe sollte man vorbereitet sein, einer Reihe von hartnäckigen Fehlvorstellungen zu begegnen. Dies kann man jedoch auch als Chance nutzen: Das Thema bietet eine hervorragende Gelegenheit zur Stärkung der Argumentationskompetenz, da durch die Vielfalt der Schülervorstellungen die Diskussion über dieses scheinbar einfache Thema von Anfang an kontrovers und damit intensiv verläuft.

Literatur

- Hefendehl-Hebeker, L. (1981): Zur Behandlung der Zahl Null im Unterricht, besonders in der Primarstufe. In: *mathematica didactica* 4, S. 239-252.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1982): Die Zahl Null im Bewußtsein von Schülern. Eine Fallstudie. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, Jahrgang 2, Heft 1, S. 47-65.
- Padberg, F. (2005): *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg, Spektrum Akad. Verlag.