Diemut LANGE, Hannover

Inwiefern hilft Kooperation beim Bearbeiten von Problemaufgaben?

Im Synonymwörterbuch sind zwei Bedeutungsebenen für das Wort „Problem“ angegeben: Die erste fasst *Problem* als synonym zu *Aufgabe*. Die zweite konnotiert Problem mit einer gewissen *Schwierigkeit* (Ärger, Erschwernis etc.): Ein Problem stellt auf dieser Ebene eine Aufgabe dar, die schwierig ist. Dies kann mit Blick auf Problemdefinitionen von Psychologen (Duncker, Dörner, …) sowie Mathematikdidaktikern (z.B. Schoenfeld 1985, S.74) präzisiert werden: Die Schwierigkeit einer Aufgabe ist nicht in den Aufgabeneigenschaften selber begründet, sondern in der Beziehung des Aufgabenbearbeiters mit der Aufgabe. Eine Aufgabe kann also für eine bestimmte Person, aber nicht für eine andere eine Schwierigkeit beinhalten.

Im Folgenden soll die Schwierigkeit einer Aufgabe ebenfalls am Aufgabenbearbeiter festgemacht, allerdings analog zu der Definition in der Testpsychologie (Lienert & Raatz, S.73) ein Aufgabenschritt a posteriori (empirisch) als schwierig definiert werden, wenn ihn nur wenige der Probanden lösen konnten. Die (a priori) Vorhersage einer a posteriori definierten Schwierigkeit ist nötig, um Aufgaben mit schwierigen Schritten auszuwählen (im Folgenden: Problemaufgaben) und diese Schwierigkeiten näher zu spezifizieren. Da die Definition eines Problems und damit einer Schwierigkeit vom Aufgabenbearbeiter abhängig ist (s.o.), eignen sich zur a priori-Vorhersage insbesondere curriculare Vorgaben sowie Studien mit ähnlichen Aufgaben und Probanden wie in der eigenen Studie.

1. Kooperation als Möglichkeit zur Überwindung von Schwierigkeiten

Fragt man sich, inwiefern die Kooperation in der Kleingruppe helfen kann, so geben Lerntheorien erste Hinweise: Denkbar wäre das Erzeugen und Lösen von Konflikten durch divergente Bearbeitungen oder Ansichten, das Teilen von Ressourcen (Ideen, Lösungswege) oder das Ordnen von Gedanken durch die Absicht, dem Partner etwas erklären zu wollen.

Im Folgenden soll unter Kooperation „jede Art von aufgabenbezogener Interaktion“ (Naujok 2000) verstanden werden. Aufgrund des zugrunde gelegten theoretischen und begrifflichen Hintergrunds erscheinen folgende Forschungsfragen relevant:

1. Was sind *(empirisch) schwierige Schritte* bei Problemaufgaben?
2. Was könnten mögliche *Gründe* für diese Schwierigkeiten und *Möglichkeiten der Überwindung* sein?

3. Inwiefern hilft *Kooperation* beim Überwinden schwieriger Schritte?

2. Design

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde für die Auswertung in diesem Artikel die folgende mathematische Problemaufgabe ausgewählt:

> **7-Tore-Aufgabe (Bruder et al. 2005)**
>
> Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um mit seiner Ernte in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig.
>
> Wie viele Äpfel hatte er am Anfang?

Dass es sich um eine Problemaufgabe handelt, kann aufgrund der Ähnlichkeit zu der Smarties-Aufgabe in der Studie von Aßmus (2010) vermutet werden, die für Zweit- bis Viertklässler Schwierigkeiten (insbesondere die Schwierigkeit, eine geeignete Reihenfolge der Umkehroperationen zu finden) beinhaltete. Bearbeitet wurde die 7-Tore-Aufgabe in der eigenen Studie zum einen von Schülern aus 4 sechsten Klassen eines Hannoveraner Gymnasiums (Feb. 2010) im Rahmen einer Schulstunde. Um Forschungsfrage 3 beantworten zu können, bearbeitete etwa die Hälfte der Sechstklässler diese Aufgabe individuell (N=64 Individuen) – die anderen Schüler arbeiteten zu zweit (N=31 Paare). Als Daten liegen die schriftlichen Notizen der Schüler vor.

Um einen differenzierteren Blick auf die Art der Kooperation werfen zu können, wurden zum anderen Fünftklässler Hannoveraner Gymnasien beim Bearbeiten dieser Aufgabe zusammen mit einem Partner videographiert (N=7). Diese Datenerhebung fand im Rahmen einer überschulischen Mathe AG für Fünftklässler (MALU) statt (Nov. 2008-Juni 2010).

3. Auswertungsmethodik

Nach einer a priori-Aufgabenanalyse wurden die Fünft- und Sechstklässlerbearbeitungen zur 7-Tore-Aufgabe anschließend wie folgt ausgewertet:

Sechstklässlerbearbeitungen (schriftliche Notizen):
• Kodierung hinsichtlich schwieriger Aufgabenschritte • Berechnung der relativen Häufigkeit der aufgetretenen Schwierigkeiten; für jede beobachtete Schwierigkeit wurden jeweils nur diejenigen Bearbeitungen betrachtet, in denen die Schwierigkeit hätte vorkommen können • fallanalytische und fallvergleichende Analyse von möglichen Gründen und Überwindungsarten der schwierigen Schritte
Fünftklässlerbearbeitungen (schriftliche Notizen; Videoprozesse):

- Kodierung der schriftl. Notizen hinsichtlich schwieriger Aufgabenschritte
- Transkription der Prozesse
- Kodierung der transkribierten Prozesse hinsichtlich vorkommender Kooperationshandlungen mit Hilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse; diese Kodierung baut auf den von Naujok rekonstruierten Kooperationshandlungen auf (Näheres zu dem Auswertungsverfahren in Lange 2011)
- fallanalytische und fallvergleichende Analyse derjenigen Transkriptstellen, die mit den schwierigen Schritten in Verbindung gebracht werden können, hinsichtlich möglicher Gründe und Überwindungsarten UND hinsichtlich der vorkommenden Kooperationshandlungen

4. Ergebnisse & Diskussion

Zur Bearbeitung der 7-Tore-Aufgabe wählten die Sechstklässler (z.T. nachdem sie Zahlen als mögliche Anfangszahlen ausprobiert hatten) mehrheitlich ein Rückwärtsarbeiten: Sie starteten mit dem einen Apfel, den der Mann am Ende übrig hatte und schlossen rekursiv auf die Anfangsapfelanzahl. Ein schwieriger Schritt stellte dabei die Suche nach geeigneten Umkehroperationen in geeigneter Reihenfolge bzw. die Suche korrekter Apfelanzahlen mit Hilfe des systematischen Probierens durch Lösen der Teilaufgaben „?:2-1=bekannte Apfelanzahl“ dar. So konnten etwa 60% der einzeln arbeitenden und 50% der zu zweit arbeitenden Sechstklässler, die rückwärts vorgegangen sind und zwei verschiedene Operationen gewählt hatten, die nächst folgende Apfelanzahl vor dem 7.Tor (4) nicht korrekt bestimmen. Die meisten von diesen Sechstklässlern kehrten nur die Operationen um (·2 statt :2; +1 statt -1) und nicht auch deren Reihenfolge. Scheinbar stellt die im Aufgabentext vorgegebene Reihenfolge für die Sechstklässler auch beim Rückwärtsarbeiten eine naheliegende Reihenfolge dar (·2, da er die Hälfte abgegeben muss und +1, da er einen Apfel wiederbekommt). Insgesamt finden sich in den Bearbeitungen der Fünft- und Sechstklässler, die diesen Schritt erfolgreich überwunden haben, wenig Indizien dafür, wie sie diesen Schritt überwunden haben könnten. Die Transkriptpassage eines Fünftklässlers (HF) deutet auf eine Synthetisierung eines aus beiden Operationen zusammengesetzten Operators hin, die durch die Vorstellung einer Umkehr des Prozesses des Apfelabgebens in ein Apfelbekommen ermöglicht wird (HF: „also plus einen den er wegnimmt und dann mal zwei“). Ein anderer Weg stellt das Testen einer bestimmten Reihenfolge der einzeln korrekt gebildeten Umkehroperationen anhand der ersten Apfelanzahlen 1 und 4 mit Hilfe der Vorwärtsoperationen dar.

Die etwas geringere Häufigkeit, mit der diese Schwierigkeit in den Sechstklässler*paaren* auftritt (s.oben), lässt vermuten, dass die Schwierigkeit in Kooperation überwunden werden könnte. Allerdings ist der Anteil derjenigen Bearbeitungen, in denen zwar die erste (4) Apfelanzahl korrekt bestimmt, zur Generierung der weiteren Apfelanzahlen allerdings nicht geeignete Operationen / eine nicht geeignete Operationsreihenfolge gewählt wurde, bei den Paaren höher (17,39%) als bei den einzeln arbeitenden Sechstklässlern (8,70%). Dies lässt vermuten, dass die Apfelanzahlen 1 und 4 nicht zum Ableiten geeigneter Operationen / einer geeigneten Operationsreihenfolge genutzt werden, sondern das Problem der Suche geeigneter Operationen lediglich auf einen späteren Zeitpunkt im Lösungsprozess (vermutlich wenn die Zahlen und damit der Rechenaufwand größer werden) verschoben wird.

Als Ergebnisse der Kooperationsanalyse kann Folgendes festgehalten werden: In keinem der Prozesse findet eine Ko-Konstruktion von Ideen hinsichtlich geeigneter Operationen statt. Stattdessen nennt einer der Fünftklässler eines jeden Paares Operationen bzw. führt diese aus und der Partner schließt sich diesen an. Allerdings kann in zwei Prozessen vermutet werden, dass das Vorhandensein des Partners zum Überprüfen und Begründen des eigenen Teilergebnisses (Apfelanzahl vor dem 7.Tor) anregt, so dass die zunächst angenommene Apfelanzahl 3 in die korrekte Apfelanzahl 4 verbessert werden konnte. Zudem fällt auf, dass in fast allen Prozessen – wenn überhaupt – lediglich derjenige Fünftklässler etwas überprüft, der die Operationen genannt bzw. durchgeführt hat. Ein möglicherweise hilfreiches, kritisches Hinterfragen durch den Partner unterbleibt, so dass darin (und nicht (nur) in dem wenigen oder wenig erfolgreichen Überprüfen generell (wie bei Stacey 1992)) ein Manko gesehen werden kann.

Literatur

Aßmus, D. (2010). Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei potenziell mathematisch begabten Grundschulkindern. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hrsg.). *Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern* (S.45-61), Offenburg: Mildenberger Verlag.

Bruder, R., Büchter, A. & Leuders, T. (2005). Die "gute" Mathematikaufgabe – ein Thema für Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern. *BzMU*, 139-146.

Lange, D. (2011). Kooperation von Fünftklässlerpaaren beim Problemlösen. In: *Beiträge zur Qualitativen Inhaltsanalyse*. Institut für Psychologie der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Band-Nr. 19.

Lienert, G.A. & Raatz, U. (1998). *Testaufbau und Testanalyse*, 6. Auflage, Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Naujok, N. (2000). *Schülerkooperation im Rahmen von Wochenplanunterricht*, Beltz: Weinheim.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando: Academic Press.

Stacey, K. (1992). Mathematical Problem Solving in Groups: Are Two Heads Better Than One? *Journal of Mathematical Behavior, 11(3)*, 261-275.