Katrin REIMANN, Köln

Verschiedene Stufen in der historischen Entwicklung der Algebra

In diesem Beitrag wird eine Verbindung zwischen der historischen Entwicklung der Algebra und dem Erlernen und Lehren von Algebra aufgezeigt werden.

1. Probleme beim Übergang von Arithmetik zur Algebra

Um zu eruieren, welche Probleme beim Übergang von Arithmetik zur Algebra bei Schülerinnen und Schülern (SuS) auftreten, führten Herscovics und Linchevski 1994 eine Interviewstudie mit 22 SuS der 7. Klasse durch. Dabei wurden zunächst arithmetische Grundfähigkeiten abgefragt und darauf aufbauend sollten verschiedene, für die SuS neue, Gleichungen mit einer Unbekannten gelöst werden. Das Ergebnis zeigte, dass die SuS in der Lage waren die Aufgaben größtenteils zu lösen, jedoch waren zu keiner Zeit Belege dafür ersichtlich, dass mit den Unbekannten operiert wurde. Herscovics und Linchevski folgerten daraus, dass die SuS die Gleichungen lösten indem sie „um die Unbekannte herum arbeiteten". Sie sehen die Grenze zwischen Arithmetik und Algebra daher als einen ‚cognitive gap' an, worunter sie die Unfähigkeit der SuS verstehen, spontan mit Unbekannten Operationen auszuführen. Diese Studie zeigt auf, dass wesentliche Probleme beim Übergang von Arithmetik zur Algebra in dem fehlenden Verständnis von Variablen und dem Umgang mit ihnen liegen. Der korrekte Umgang mit Variablen ist jedoch zentral für das Erlernen der Algebra, da Variablen Mittel der Verallgemeinerung sind und somit die Grundlage der formale Betrachtung und Beschreibung von mathematischen Strukturen bilden.

2. Epistemologische Hindernisse

Was bedeutet es einen mathematischen Begriff zu verstehen? Es ist nicht hinreichend nur die Definition des Begriffes zu wissen, sondern wesentlich ist es die Beziehung zu anderen Begriffen, die Position des Begriffes innerhalb einer Theorie und Beispiele und Gegenbeispiele zu kennen (Sierpinska, 1992). Mathematisches Lernen stellt keinen linearen Prozess dar, sondern ist durch Entwicklungssprünge gekennzeichnet. Die Entwicklungssprünge beschreiben das Überwinden eines zugrundeliegenden Hindernisses, welches mit dem Bruch von sicher geglaubten Wissen einher geht. Von Interesse sind für meine Arbeit vor allem die Hindernisse, die unabhängig von dem einzelnen Individuum beim Erwerb eines Inhaltes oder Begriffes auftreten, sogenannte epistemologische Hindernisse. Diese liegen in der

Natur der Sache und sind damit unabhängig vom Lernenden und der Art des Unterrichts. Die berühmten Mathematiker der Geschichte mussten sich diesen Problemen ebenso stellen und sie überwinden, wie heute die Lernenden beim Erwerb eines Begriffes. Theoretische Begriffe wie Gerade oder Kraft sind Beispiele für epistemologische Hindernisse. Die Theorie über das Verstehen eines Begriffes im Zusammenhang mit den Problemen beim Erwerb des Konzepts der Variable führen zu der Annahme, dass in dem Konzept der Variable ebenfalls epistemologische Hindernisse liegen.

3. Symbolbasierte Stufen der Algebra

Die Analyse der historischen Entwicklung der Algebra kann Aufschluss über die Existenz epistemologischer Hindernisse geben. In einer gängigen Einteilung der Entwicklung der Algebra wird zwischen drei Abschnitten unterschieden (Boyer 1968): Am Beginn steht die rhetorische Phase. In dieser werden alle Behauptungen und Argumente rein verbal formuliert. Um ca. 250 n. Chr. läutet Diophant durch die Verwendung von Symbolen für gesuchte Größen die synkopierte Phase ein. In dieser werden einige Zeichen im Umgang mit algebraischen Ausdrücken verwendet. Unbekannte gegebene Größen konnten jedoch noch nicht durch Zeichen ausgedrückt werden. Erst Vieta verwendete um 1600 Symbole für gegebene unbekannte Größen. Die Änderung in der Sprache der Algebra gilt als Ausgangspunkt für die letzte, symbolische Phase. In der symbolischen Phase ist eine komplette Symbolisierung möglich, d.h. alle Zahlen, Operationen und Beziehungen können durch Symbole ausgedrückt werden. Was bedeutet die Weiterentwicklung der algebraischen Sprache und wie äußert sich diese beim Lösen von Gleichungen? Dies wird durch die Betrachtung einer Beispielaufgabe deutlich: ‚Gegeben sind die Summe und die Differenz zweier Zahlen. Zeigen Sie, dass Sie stets die zwei Zahlen finden können.' In der rhetorischen Phase würde die Aufgabe in vollständigen Sätzen, rein verbal gelöst werden. Eine Überlieferung der Lösung dieser Aufgabe aus der rhetorischen Phase ist nicht vorhanden. In der synkopierten Phase wurde ein Symbol für die kleinere der gegebenen Größen eingesetzt und dann die zweite Zahl mit Hilfe des Repräsentanten für die erste Zahl und der Differenz angegeben. Für die Summe und die Differenz wurden exemplarisch ganze Zahlen eingesetzt. Die Lösung wurde dann für dieses exemplarische Beispiel ausgerechnet. In der symbolischen Phase hingegen werden auch die Summe und die Differenz durch Symbole repräsentiert und mit deren Hilfe eine allgemeine Lösung angegeben.

In dieser Einteilung der historischen Entwicklung der Algebra werden zwei Entwicklungssprünge sichtbar, und zwar jeweils beim Übergang von einer Phase in die nächste. Dies legt nahe, dass bei diesen Übergangen epistemologische Hindernisse überwunden wurden und somit die epistemologischen Hindernisse in der Verschiedenartigkeit der Variablen begründet liegen.

Eine Studie zur Anwendung und Umgang mit Variablen bei SuS führte Eon Harper mit 144 SuS, jeweils 12 SuS aus den Klassen 5 bis 11 zweier Gymnasien, durch (Harper, 1987). Er untersuchte die Lösungen der SuS zu der oben genannten Aufgabe und teilte diese zunächst in drei Kategorien ein: Erstens, Antworten welche eine Lösung für beliebige Zahlen angeben, zweitens durch Trial und Error gefundene Antworten, meist ausschließlich ganzzahlige Lösungen und unter drittens alle unvollständigen oder falschen Lösungen. Die Lösungen aus der ersten Kategorie untersuchte er im Anschluss auf die Verwendung von Variablen und identifizierte drei verschiedene Typen und zwar rein sprachliche Lösungen, Lösungen mit der Verwendung einer Variable für die gesuchte Größe und vollständig symbolisierte Lösungen. Diese Studie legt eine Parallele zwischen dem individuellen Lernen und dem Verständnis des Konzepts der Variable auf der einen Seite und der historischen Entwicklung der Algebra auf der anderen Seite nahe und stützt damit die eingangs aufgestellte Annahme.

4. Konzeptuelle Stufen der Algebra

Eine weitere Parallele zwischen der Entwicklung und dem Erlernen von Algebra liegt in der Auffassung der Algebra begründet. Die historische Entwicklung kann in vier konzeptuelle Stufen unterteilt werden (Katz, 2007). Zu Beginn waren die algebraischen Konzepte geometrisch fundiert, zum Beispiel basierte bei den antiken Griechen Algebra auf geometrische Manipulationen. Diese Stufe wird ‚geometrical stage' genannt. Sie wurde von der ‚static equation-solving stage' abgelöst, in welcher das Finden von Zahlen unter Betrachtung bestimmter Bedingungen im Vordergrund stand. In der dritten Stufe, der ‚dynamic function stage', ist das Betrachten von Bewegung die zugrundeliegende Idee. Das Ziel war zum Beispiel die Beschreibung der Planetenlaufbahnen oder gegebener Kurven. Die letzte Stufe ist die ‚abstract stage', welche die moderne Algebra nach Hilbert beschreibt. Die konzeptuellen Stufen sind nicht disjunkt mit den drei symbolbasierten Abschnitten, vielmehr kann in einer konzeptuellen Stufe alle drei Darstellungsphasen durchlaufen werden.

Implizit wird in jeder dieser konzeptuellen Stufen eine Rechtfertigung der Algebra angegeben. In den ersten drei Stufen ist die Rechtfertigung empirisch, was durch die Art der Probleme deutlich wird, welche behandelt wurden. Die historische Motivation der Algebra war gekennzeichnet durch das Bedürfnis gegebene Probleme zu lösen. Diese Probleme waren geometrischer Natur, wie zum Beispiel Probleme der Landvermessung oder auch der Beschreibung von gegebenen Kurven. Auch in der zweiten Stufe war die implizite Rechtfertigung empirisch, selbst wenn eine Gleichung losgelöst von einem konkreten Problem betrachtet wurde. Zum Beispiel wurden die Lösungen bei Problemen geometrisch interpretiert oder wie bei den Arabern keine negativen Lösungen zugelassen. Nur die ‚abstract stage' ist unabhängig von geometrischer oder naturwissenschaftlicher Rechtfertigung. Die historisch, empirische Auffassung der Algebra wird auch in Eulers Definition der Algebra deutlich. Dort definiert er Algebra als „die Wissenschaft (...), die zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet" (Euler, 1770, S. 245).

Betrachtet man Schulbücher und analysiert wie Algebra dort eingeführt und gelehrt wird, zeigt sich deutlich, dass die dort behandelten Objekte oft aus der Empirie stammen. Im Schulbuch der Klasse 8 vom Lambacher Schweizer werden Operationen mit Unbekannten eingeführt. Der Einstieg in das Thema erfolgt durch Probleme der Flächenberechnung. Die Variablen stehen hier für die Längen von Seiten. Hiernach wird erst eine allgemeine Regel angegeben und auf ein Beispiel angewendet. Ebenso wird auch an die Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung herangegangen. Die allgemeine Lösung wird durch Beispielaufgaben aus der Flächenberechnung motiviert. Die SuS werden hier zunächst aufgefordert eine Gleichung für die Länge x aufzustellen und diese dann zeichnerisch zu lösen. Diese Beispiele aus Schulbüchern zeigen deutlich, dass die Objekte mit denen die Schüler arbeiten, an Hand derer die Algebra gelehrt und gelernt wird empirischer Natur sind.

Dies legt die Vermutung nahe, dass Algebra in der Schule empirisch gerechtfertigt und auf die Realität bezogen wird. Für die Schüler sind die Objekte der Algebra empirisch. Algebra wird also nicht als eine Theorie über abstrakte Gegenstände vermittelt und erlernt, sondern wie in der historischen Entwicklung der Mathematik anhand von realen Gegenständen.

Literatur

Boyer, Carl B. (1968): A history of mathematics, John Wileys & Sons.

Euler, Leonhard (1770): Vollständige Anleitung zur Algebra, Stuttgart.

Harper, Eon (1987): Ghost of diophantus, In: Educational Studies in Mathematics 18, 75 – 90.

Herscovics, Nikolas & Linchevski, Liora (1994): A cognitive gap between arithmetic and algebra, In: Educational Studies in Mathematics 27, 59 – 78.

Katz, Victor J. (2007): Stages in the history of algebra with implications for teaching, In: Educational Studies in Mathematics 66, 185 – 201.

Sierpinska, Anna (1992): On understanding the notion of function, In Dubinsky, E. and Harel, G.: The concept of function, Elements of Pedagogy and Epistemology.