Andreas BÜCHTER, Dortmund

Schülervorstellungen zum Tangentenbegriff

In den meisten Bundesländern lernen Schülerinnen und Schüler Tangenten zunächst als Kreistangenten in der euklidischen Geometrie und als Parabeltangenten in der Koordinatengeometrie kennen, bevor der Tangentenbegriff in der Differenzialrechnung verallgemeinert wird. Im Rahmen einer qualitativen Studie hat der Autor untersucht, inwieweit Schülerinnen und Schüler, die mindestens eine Einführung in die Differenzialrechnung hinter sich haben, tatsächlich über einen verallgemeinerten Tangentenbegriff verfügen. Erste Befunde werden im Folgenden im Sinne der Didaktischen Rekonstruktion (Kattmann et al., 1997; vgl. Abb. 1) mit Blick auf mögliche Konsequenzen für die Gestaltung von Lehrwerken und Unterricht diskutiert.

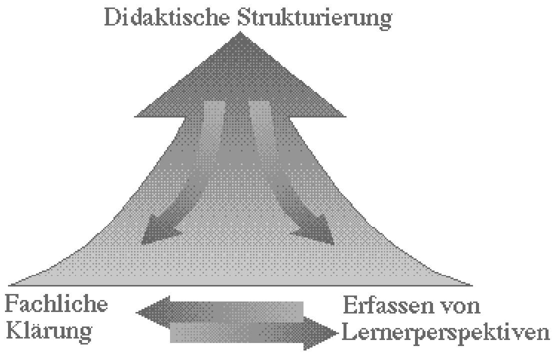

Abb. 1: Modell der Didaktischen Rekonstruktion nach Kattmann et al. (1997)

Im Rahmen der fachlichen Klärung wird zunächst dargestellt, welche Rolle Tangenten bei schultypischen Zugängen zur Differenzialrechnung spielen. Mit einer Analyse von Schülerdokumenten werden dann Lernerperspektiven erfasst. Nach dem Modell der Didaktischen Rekonstruktion werden fachlich erwünschte Vorstellungen – im Sinne von „Grundvorstellungen“ (vgl. vom Hofe, 1995) – und Lernerperspektiven systematisch aufeinander bezogen, um so zu einer angemessenen didaktischen Strukturierung von Lehr-Lernprozessen zu gelangen (vgl. Prediger, 2005).

1 Die Rolle von Tangenten im Rahmen typischer Problemstellungen bei Zugang zur Differenzialrechnung

Beim traditionellen Zugang zur Differenzialrechnung wird (1) die Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente definiert, (2) die Tangente als Grenzlage von Sekanten betrachtet und (3) ihre Steigung als Grenzwert der Sekantensteigungen algebraisch (an Spezialfällen) bestimmt – ein Zugang der erheblich didaktische Probleme mit sich bringt (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 45 ff.). Die mit diesem Zugang verbundenen Schwierigkeiten der Lernenden bei der Begriffsbildung können vermieden werden, wenn der Einstieg in die Differenzialrechnung anhand von Problemstellungen erfolgt, bei denen Änderungsraten im Vordergrund stehen (vgl. Blum & Törner, 1983, S. 91 ff; Henn, 2000; Büchter & Henn, 2010, S. 81 ff.).

Ein paradigmatisches Beispiel hierfür liefert etwa das Geschwindigkeitsdiagramm eines ICE für die Beschleunigungsphase (vgl. Schornstein, 2003). Fragen nach der durchschnittlichen Beschleunigung in einem Zeitintervall und der momentanen Beschleunigung zu einem Zeitpunkt führen auf Betrachtungen von Differenzenquotienten und den Übergang zum Differenzialquotienten, wobei trotz der algebraischen Darstellung das algebraische Arbeiten – schon aufgrund der graphisch gegebenen Daten und der „Abwesenheit" eines Funktionsterms – nicht dominiert. Sekanten und Tangenten dienen bei diesem Zugang der Veranschaulichung des Vorgehens, die auf die Idee des anschaulichen Grenzübergangs vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten führen kann. Bei einem solchen anschaulichen Zugang muss aber im Blick bleiben, dass die Tangente erst mithilfe der Ableitung bestimmt werden kann – und nicht umgekehrt.

Der Umstand, dass der Zugang über Änderungsraten bei der Betrachtung funktionaler Zusammenhänge didaktische Vorteile hat, sollte allerdings nicht dazu führen, dass primär geometrische Problemstellungen nicht mehr im Unterricht erscheinen; sie gehören – nicht zuletzt unter historisch-genetischer Perspektive – zu einer ausgewogenen Begriffsbildung dazu. Geometrische Fragestellungen aus dem Bereich der Optik (Reflexions- oder Brechungsgesetze) führen zur wichtigen Vorstellung der lokalen Linearität und darüber zur Bestimmung entsprechender Tangenten (als bestapproximierende Geraden), bei der dann auf die obige Idee des anschaulichen Grenzübergangs vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten zurückgegriffen werden kann.

2 Schülervorstellungen zum Tangentenbegriff nach einer Einführung in die Differenzialrechnung

Für die qualitative Studie, von der hier berichtet wird, haben die Schülerinnen und Schüler aus vier Kursen der gymnasialen Oberstufe ohne weitere Vorgaben auf die Frage „Was ist eine Tangente?" geantwortet. Sie habe ohne zeitliche Beschränkung geantwortet und durften die Darstellung frei wählen. Bei der Analyse solcher Dokumente muss berücksichtigt werden, dass neben individuellen Vorstellungen auch Verbalisierungskompetenzen und Vorstellungen über angemessene Begriffsklärungen eingehen. Die folgende Schülerantwort (Abb. 2) steht stellvertretend für die überwiegende Mehrzahl der Bearbeitungen, bei denen vor allem die Begriffsbildung „Tangente als globale Stützgerade" aus der euklidischen Geometrie zum

Ausdruck kommt. Dabei werden häufig Beschreibungen oder Charakterisierungen wie „in nur einem Punkt“ oder „berührt“ verwendet.

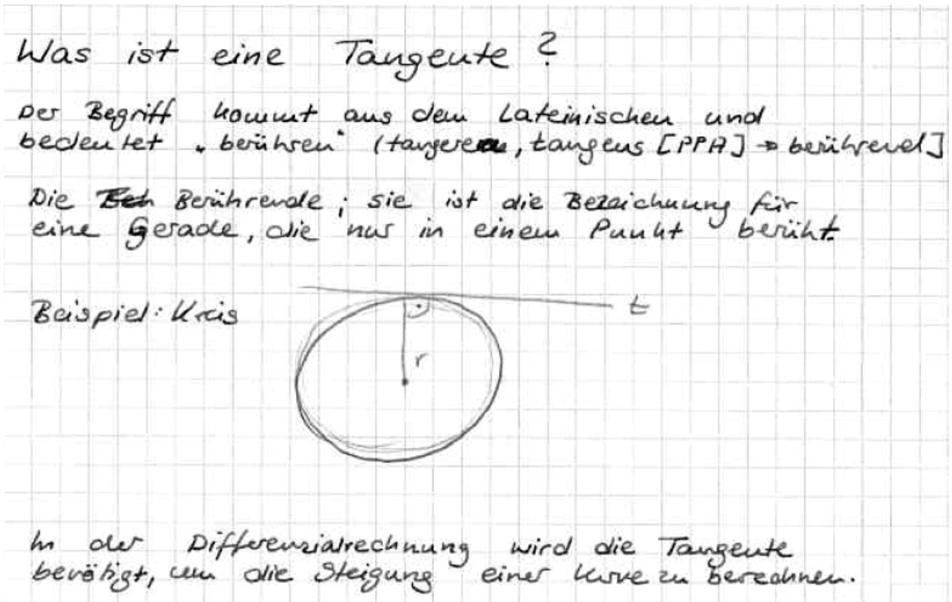

Abb. X: Schülerantwort auf die Frage „Was ist eine Tangente?“

Bei vielen Bearbeitungen tritt auch das Begriffspaar „Sekante – Tangente“ auf, wobei auch hier die aus der Geometrie bekannten Spezialfälle Kreis und Parabel dominant sind.

3 Erklärungsversuche und mögliche didaktische Konsequenzen

Dass wesentliche Aspekte eines verallgemeinerten Tangentenbegriffs – wie der lokale Charakter und der Aspekt der lokalen Linearität der Kurve – bei fast allen Bearbeitungen fehlen, lässt sich möglicherweise mit der vor der Differenzialrechnung stattfindenden Begriffsbildung erklären (vgl. Abb. 3).

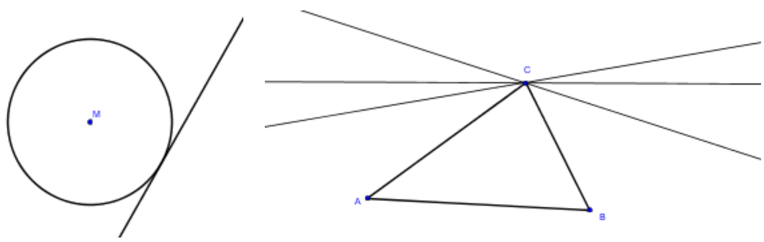

Abb. 3: Was charakterisiert eine Tangente?

In allen dem Autor bekannten Schulbüchern wird die Begriffsbildung bei Kreistangenten im Wesentlichen auf „genau einen gemeinsamen Punkt“ reduziert. Einfache kontrastierende Beispiele, wie etwa an Dreiecken, fehlen. Dabei könnten solche Beispiele von Schülerinnen und Schülern genutzt werden, um selbst die Bedeutung der lokalen Linearität zu entdecken.

Kontrastierende Beispiele sind nicht nur bei der Begriffsbildung in der Kreisgeometrie der unteren Sekundarstufe oder der Koordinatengeometrie, sondern auch bei der Verallgemeinerung des Begriffs in der Differenzialrechnung wichtig. So lassen sich einfache Beispiele angeben (Abb. 4), bei denen die lokale Linearität nicht vorliegt, eine Tangente „schneidet", eine Tangente unendlich viele Punkte mit der Kurve gemeinsam hat oder eine Kurve sogar ihre eigene Tangente ist (vgl. Knoche & Wippermann, 1986).

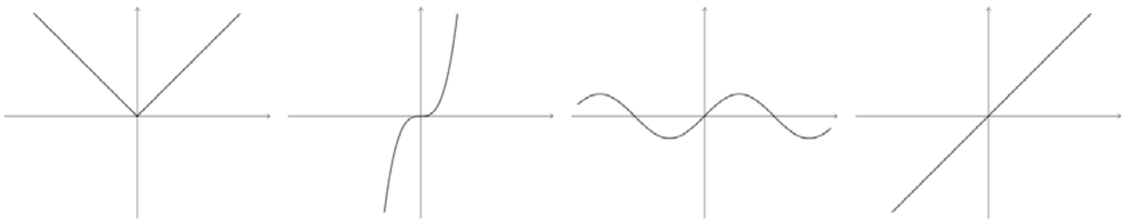

Abb. X: Kontrastierende Beispiele

Ein erstes Fazit der Untersuchung kann sein, dass einerseits die frühe geometrische Begriffsbildung „Tangente" besser nach hinten anschlussfähig sein kann und sollte. Darüber hinaus scheint es wichtig zu sein, dass vorhandene Vorstellungen bewusst gemacht, im Unterricht erfasst und mit geeigneten Problemstellungen weiterentwickelt werden.

Literatur

Blum, W. & Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Henn, H.-W. (2000). Änderungsraten als Zugang zu den zentralen Begriffen und Resultaten der Analysis. In F. Förster, H.-W. Henn & J. Meyer (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Band 6: Computer-Anwendungen* (S. 1-13). Hildesheim: Franzbecker.

Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H. & Komorek, M. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion. Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 3(3),* 3-18.

Knoche, N. & Wippermann, H. (1986). *Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis*. Mannheim, Wien, Zürich: B.I.-Wissenschaftsverlag.

Prediger, S. (2005). „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *mathematica didactica, 28 (2),* 23-47.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schornstein, J. (2003). Simultane realitätsnahe Einführung der Differenzial- und Integralrechnung. In H.-W. Henn & K. Maaß (Hrsg.), *Materialen für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Band 8* (S. 139-149). Hildesheim: Franzbecker.