

Torsten LINNEMANN, Basel

## **Innermathematisches Experimentieren in Lernumgebungen in der Sekundarstufe II**

"Das Hypothesenbilden und Hypothesenprüfen, welches sich in einem konkreten Phänomenbereich an Beispielen vollzieht (...) wird im Folgenden als *innermathematisches Experimentieren* bezeichnet." (Leuders, Naccarella, Philipp, 2011, S. 207)

### **Forschungsfragen**

In einer Interventionsstudie, die qualitative und quantitative Anteile hat, in drei Klassen der schweizerischen Fachmittelschule (einer allgemeinbildenden Schule der Sekundarstufe II) wird den folgenden drei Forschungsfragen nachgegangen:

1. Gibt es Zusammenhänge zwischen dem Verhalten von Schülerinnen und Schülern beim innermathematischen Experimentieren und Persönlichkeitsmerkmalen wie zum Beispiel Selbstwirksamkeitsüberzeugung in Mathematik?
2. Leuders et al. (2011) haben ein Kategoriensystem zur Beschreibung experimentellen Verhaltens in klinischen Interviews mit Primarschülerinnen und -schülern und Studierenden des Primarschullehramts entwickelt. Lässt sich dieses Kategoriensystem auf schriftliche Bearbeitungen in der Sekundarstufe II übertragen?
3. Welche Strategien lassen sich bei erfolgreichen Schülerinnen und Schülern feststellen?

### **Hintergrund**

Beim Untersuchen des innermathematischen Experimentierens im obigen Sinne gehen Leuders et al (2011) vom Konzept "Scientific Discovery as Dual Search" von Klahr und Dunbahr (1988) aus, in dem experimentelles Arbeiten als Wechseln vom Hypothesensuchraum zum Experimentesuchraum beschreiben wird. Sie beobachten, dass mit einem zwischengeschalteten Strategieraum Tätigkeiten von Schülerinnen und Schülern besser erklärt werden können.

In Ihrem 3-Räume Modell stellen Leuders et al (2011) also innermathematisches Experimentieren als Arbeiten im Beispielraum, Strategieraum und Hypothesenraum dar. Im Strategieraum werden beispielsweise Strukturen gesucht und Hypothesen geprüft. Das ist eine entscheidende Weiterentwicklung früherer Beschreibungsmodelle, die auch für diese Studie von

Bedeutung ist. Die Hypothesenprüfung kommt beispielsweise in der Arbeit von Haverty et al (2000) noch nicht vor. Diese erkennen beim induktiven Argumentieren drei Aspekte: Data Gathering (Datensammlung), Pattern Finding (Mustersuche) und Hypothesis Generation (Hypothesenbildung).

## Design

Die Studie wurde in einer zehnten, elften und zwölften Klasse der Fachmittelschule mit insgesamt 63 Schülerinnen und Schülern durchgeführt. Zunächst wurde eine erste Lernumgebung zu binomischen Formeln eingesetzt, um die Schülerinnen und Schüler mit der Arbeitsweise in Lernumgebungen vertraut zu machen. Parallel dazu wurde ein Fragebogen unter anderem zu Selbstwirksamkeitsüberzeugungen eingesetzt.

Circa zwei Wochen später wurde eine Lernumgebung zu "Treppenzahlen" eingesetzt, an der die Schülerinnen und Schüler jeweils eine halbe Stunde arbeiteten:

Manche Zahlen lassen sich als Summe von aufeinander folgenden Zahlen schreiben. Beispiele:

$$9=2+3+4 \text{ (Treppe mit drei Stufen)}$$

$$9=4+5 \text{ (Treppe mit zwei Stufen)}$$

$$8=?$$

Was können Sie über Treppenzahlen herausfinden?

Die Behandlung dieser Lernumgebung erfordert kein grosses mathematisches Vorwissen, es sind allerdings viele vertiefende Überlegungen möglich, so dass sich die Lernumgebung in verschiedensten Altersstufen einsetzen lässt. Der Einsatz von Treppenzahlen wird in der didaktischen Literatur häufig beschrieben (z.B. Schwätzer, Selter (1998) und Scherer, Steinbring (2007)). Die hier vorliegende Formulierung entspricht weitgehend derjenigen von Leuders et al. (2011).

Am Tage nach der Bearbeitung der Lernumgebung wurden sechs Schülerinnen und Schüler je 15 Minuten interviewt.

Vorgehensweise bei der Auswertung:

- Zunächst werden die Bearbeitungen unter Verwendung des Kategoriensystems von Leuders et al (2011) codiert.
- Daraus werden Variablen, die das Arbeiten in den drei Räumen beschreiben, entwickelt.
- Diese Variablen werden statistisch verglichen mit den Resultaten der Umfrage.

- Mit Hilfe dieser Variablen werden die erfolgreichen Schülerinnen und Schüler ermittelt. Die Bearbeitungen dieser Schülerinnen und Schüler werden qualitativ unter Zuhilfenahme der Interviews analysiert um Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren zu benennen.

### **Ergebnisse zum Kategoriensystem von Leuders et al (2011)**

Es wird vorgeschlagen, das Kategoriensystem mit der Kategorie "Aufgabe verstehen" zu ergänzen. Diese Tätigkeit lässt sich bei vielen Schülerinnen und Schülern beobachten - und gemäss Haverty et al (2000) ist das Reflektieren über die Aufgabe ein wichtiger Aspekt bei erfolgreichen Bearbeitungen. Mit dieser Erweiterung lässt sich das Kategoriensystem von Leuders et al. (2011) für schriftliche Bearbeitungen übernehmen und erfasst Strategien bei den Schülerinnen und Schülern der Fachmittelschule vollständig. Zu berücksichtigen ist, dass bei schriftlichen Bearbeitungen der zeitliche Ablauf der Entstehung nicht nachvollziehen lässt. Der Wechsel zwischen den 3 Räumen lässt sich gut dokumentieren, der typische Ablauf ist: Beispiele generieren, oft als Reihenfolgebeispiel (Beispielraum) -> Gruppenbildung (Strategieraum)-> beispielorientierte Hypothese (Hypothesenraum) -> Bestätigungsbeispiel (Strategieraum)

### **Ergebnisse der quantitativen Untersuchung zu Persönlichkeitsmerkmalen und dem Vorgehen beim innermathematischen Experimentieren**

Die Ergebnisse sind nicht eindeutig. Es gibt eine Klasse, in der mittlere bis hohe Korrelationen zwischen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und Aspekten des experimentellen Verhaltens feststellbar sind. In dieser Klasse beträgt beispielsweise der Korrelationskoeffizient zwischen der mathematischen Selbstwirksamkeit und der Zahl der sortierten Beispiele 0.663. Dies ist bei 16 Teilnehmenden hoch signifikant.

Über die drei Klassen hinweg bestätigen sich die Korrelationen allerdings nicht. In einer Klasse sind viele Korrelationen negativ, wenn auch nicht signifikant.

Die in den Klassen angetroffenen Bedingungen beim Einsatz der Lernumgebung scheinen wichtiger zu sein als die Persönlichkeitsmerkmale. Dies gibt Anlass zur Vermutung, dass durch einen gezielten Einsatz solcher Lernumgebungen der Erfolg beim innermathematischen Experimentieren stark verbessert werden kann. Dies zeigen auch die Ergebnisse von Leuders und Philipp (2011).

## **Ergebnisse zu den Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren**

Der Wechsel zwischen dem Generieren von Hypothesen, dem Strukturieren, dem Hypothesenbilden und dem Prüfen von Hypothesen erweist sich als zentral für das erfolgreiche Experimentieren. Dies bestätigt Ergebnisse von Leuders et al (2011) und Haverty et al. (2000).

Zum erfolgreichen Experimentieren ist es wichtig, eine genügende Anzahl von Beispielen zu generieren, aber nicht bei dieser Tätigkeit zu verweilen, sondern rechtzeitig mit der Strukturierung zu beginnen. Erfolgversprechend ist es, eine einmal getroffene Hypothese weiter zu entwickeln, zu vertiefen, und komplementär dazu verschiedene Ansätze zu verfolgen. Hier ist es wichtig, sich klar zu machen, mit welcher Intention gerade gearbeitet wird.

Wichtig ist natürlich auch ein gewisses Engagement bei der Bearbeitung der Aufgabe.

Dies sind wertvolle Hinweise für geeignete Lernwegbegleitungen, die Anknüpfungspunkte für die weitere Arbeit schaffen.

## **Literatur**

- Haverty, A., Koedinger, R. K., Klahr, D. und Alibalt, M. (2000): Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. In: Cognitive Science, 24, 249 - 298.
- Klahr, D. und Dunbar, K. (1988): Dual space search during scientific reasoning. Cognitive Science, 12, 1 – 48.
- Leuders, T., Naccarella, D. und Philipp, K. (2011): Experimentelles Denken – Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 32(2), 205 - 231
- Philipp, K., Leuders, T. (2011). Experimentelles Denken fördern. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 619-622. Münster: WTM Verlag
- Scherer, P. und Steinbring, H (2007).: Zahlen geschickt addieren. In: Müller, G.; Steinbring, H.; Wittmann, C. (Hrsg.): Arithmetik als Prozess, 2. Auflage. Seelze: Kallmeyer:
- Schwätzer, U. und Selzer, C. (1998): Summen von Reihenfolgezahlen - Vorgehensweisen von Viertklässlern bei einer arithmetisch substantiellen Aufgabenstellung. In: Journal für Mathematik-Didaktik. 19(2-3), 123 - 148.