

Eva MÜLLER-HILL, Köln

## Ein handlungsbasiertes Konzept mathematischer Erklärung

### 1. Begründen, Erklären, Verstehen

Prediger und Meyer unterscheiden in einem Aufsatz von 2009 *Beweisen, Begründen* und *Argumentieren* als zentrale Elemente des MU. *Erklären* tritt dabei nur als eine *Funktion* des Begründens in Erscheinung. Dies greift jedoch im Hinblick auf die Spezifika erklärender Begründungen zu kurz, denn Erklären ist nur eine *optionale* Funktion von Begründen: nicht jede Begründung erklärt, erst recht nicht *für* einen bestimmten Adressaten. Auch kennen wir verschiedene *Typen* des Erklärens: Erklären-was, -wie und -warum. In der Regel lässt sich nur der Typus „Erklären-warum“ sinnvollerweise als Funktion oder Spezifikum des Begründens auffassen. Eine Präzisierungsmöglichkeit besteht im Rückgriff auf die Ausrichtung der Angemessenheit von Begründen und Erklären. Die Angemessenheit von Begründen richtet sich in erster Linie auf den begründeten Sachverhalt: Ziel einer Begründung ist es, hinreichende Gründe für sein Bestehen anzugeben. Die Angemessenheit von Erklären dagegen ist sowohl auf den Sachverhalt als auch auf den Adressaten gerichtet: Spezifisches Ziel einer Erklärung im Hinblick auf den erklärten Sachverhalt ist es, die entscheidenden Gründe für sein Bestehen anzugeben. Hinzu tritt das Ziel, beim Adressaten der Erklärung Verständnis zu wecken. Für diesen Präzisierungsansatz findet sich disziplinübergreifender Rückhalt in der mathematikdidaktischen, der wissenschaftstheoretischen und der linguistischen Erklärungsdiskussion. Besonders deutlich wird die prinzipielle bilaterale Ausrichtung des Erklärungsanspruchs bei Klein (2009): Erklären beinhaltet „*eine kommunikative Bringschuld gegenüber dem Adressaten und eine Verpflichtung zur Angemessenheit gegenüber dem zu erklärenden Sachverhalt.*“ Auch die generelle Spezifität von zur Erklärung anzuführenden Gründen kommt zum Ausdruck: Erklären-warum „*besteht darin, das Zustandekommen eines Sachverhaltes in seinen entscheidenden Bedingungen zu explizieren.*“

### 2. Nomischer Charakter von Erklären-warum

Den begrifflich-theoretischen Ausgangspunkt der nachfolgenden Überlegungen bildet die wissenschaftstheoretische Erklärungstheorie von Thomas Bartelborth (u.a. Bartelborth (2007)). Eine Erklärung eines Sachverhalts (SV) stellt diesen laut Bartelborth als Instanz eines *nomischen (gesetzesartigen) Musters*, d.h. einer geeignet invarianten Regelmäßigkeit (z.B. im Naturgeschehen oder am Finanzmarkt) dar, die sich relativ allgemeinen, stabilen und essentiellen Eigenschaften der beteiligten grundlegenden Objekte

oder Systeme verdankt (vgl. auch (Müller-Hill 2011)). Ein nomischer Charakter von Erklären-warum lässt sich auch für den Fall mathematischer Erklärungen (von Bartelborth nur kurz erwähnt) genauer explizieren. Dies erfordert den Bezug zu spezifischen Hintergrundtheorien, denn was die grundlegenden mathematischen Gegenstände, Strukturen und deren essentielle, allgemeine Eigenschaften und Beziehungen in Zusammenhang mit einem zu erklärenden mathematischen Sachverhalt  $p$  sind ist abhängig davon, in Bezug auf welche mathematische Hintergrundtheorie  $H$  wir die zugehörige Aussage interpretieren (kurz: „ $H$ -allgemein“, „ $H$ -essentiell“ etc.):

Eine (relativ zur Hintergrundtheorie  $H$ )  **$H$ -nomische** mathematische Begründung stellt einen mathematischen Sachverhalt  $p$  als Instanz oder logische Konsequenz einer geeignet invarianten, auf  $H$ -allgemeinen, -essentiellen, -stabilen Eigenschaften/Beziehungen von/zwischen  $H$ -grundlegenden Objekten/Strukturen/Systemen beruhenden Regelmäßigkeit dar.

Für das nomische Erklären-warum im Mathematikunterricht ergibt sich aus der Notwendigkeit, die entsprechenden Hintergrundtheorien zumindest in den relevanten Aspekten genauer zu bestimmen, ein erstes, seiner Natur nach *sachanalytisches Problemfeld*. Die Beispiele für mögliche Hintergrundtheorien im Mathematikunterricht sind bekanntermaßen vielfältig und auch der *Theorietypus* variiert von subjektiven Alltagstheorien mit Gegenständen des täglichen Lebens über empirische Theorien mit theoretischen Begriffen bis hin zu formal-axiomatischen Theorien. Ein zweites, *adressatenbezogenes Problemfeld* schließt sich hier unmittelbar an:  $H$  ist dem Adressaten (also den SuS) oft *nur* mittels spezieller (Referenz-)Kontexte, Darstellungen, Formalismen, Anwendungs- oder Erfahrungsbereiche (im Folgenden einfach kurz „ $H$ -Kontexte“) bekannt. Jeder dieser Kontexte besitzt spezifische grundlegende Gegenstände, Strukturen und essentielle Eigenschaften und Beziehungen und zeichnet dadurch jeweils ganz spezielle der  $H$ -nomischen Begründungen eines gegebenen Sachverhaltes als nomisch für diesen Kontext aus. Dies ist im Hinblick auf den Verständnisanspruch einer Erklärung geeignet zu berücksichtigen.

### 3. Handlungsbasiertes Konzept von mathematischem Erklären-warum

Ich schlage folgende Explikation mathematischen Erklärens-warum vor:

**Mathematisches Erklären-warum** ist eine dialogische Handlung, bei der eine  $H$ -nomische, argumentative mathematische Begründung für einen mathematischen Sachverhalt  $p$  an einen Adressaten kommuniziert wird. Damit ist der explizite Anspruch verbunden, durch die gegebene Begründung beim Adressaten Verständnis-warum zu befördern.

Dieses Erklärungskonzept ist im Sinne der pragmatischen Auffassung als kommunikative dialogische Handlung, aber auch des nachfolgend ausformulierten Verständnisanspruchs handlungsbasiert. Die Ausformulierung des Verständnisanspruchs von Erklären-warum ist nicht gleichzusetzen mit einer hinreichenden Explikation von „Verstehen-warum“. „Verstehen-warum“ kann grundsätzlich aus zwei ganz unterschiedlichen Perspektiven analysiert werden, nämlich als ein *kognitiver Akt* oder als ein *stabiler epistemischer Zustand*, der durch diesen Akt erreicht wird und der in dem Vorliegen einer Art *Handlungsdisposition*, d.h. Handlungsbereitschaft (i.S.v. möglich und willentlich) im Rahmen kommunikativer Prozesse besteht. Im Hinblick auf den Verständnisanspruch setze ich den Schwerpunkt auf Verstehen als Handlungsdisposition. Hinsichtlich der kognitiven Basis, die für das Erreichen dieses epistemischen Zustandes durch geeignete kognitive Verstehensakte notwendig ist, wird angenommen, dass sie aus vermittels konkreter Handlungen an spezifischen Objekten oder Zeichen implementierten Kontexten besteht. Dabei wird insbesondere die durch zahlreiche Lehr-Lern-Theorien etablierte prinzipielle Bereichsspezifität mathematischen Wissens mitgedacht. Gleichzeitig muss den konkreten Bedingungen der Erklärpraxis im Mathematikunterricht durch die Formulierung des Verständnisanspruchs Rechnung getragen werden. Diese variieren situativ in hohem Maße. Ich schlage daher ein situativ geeignet spezifizierbares Kriterium für den allgemeinen Verständnisanspruch von Erklären vor:

Der **Verständnisanspruch** einer mathematischen Erklärung besteht darin, den Adressaten *durch die gegebene Begründung* in die Lage zu versetzen, Situationen im Rahmen einer situativ gegebenen Menge von *H*-Kontexten, in denen *p* relevant ist (z.B. in kontextbezogenen Problemlöseprozessen), qualitativ weiter argumentativ zu erschließen als vorher.

Im *Minimalfall* bedeutet dies, dass der Adressat in die Lage versetzt werden soll, Situationen im Rahmen *eines ihm bekannten H-Kontextes*, in dem *p* relevant ist, qualitativ weiter argumentativ zu erschließen als vorher. Im *Idealfall* soll der Adressat in die Lage versetzt werden, *p* in sämtlichen ihm bekannten und ggf. darüber hinaus relevanten *H*-Kontexten und ggf. auch auf Ebene von *H* selbst nomisch begründen zu können.

#### **4. Ausblick: Bereichsinvarianz, Perspektivwechsel, Erklärungsgüte**

Zwei wichtige allgemeine Konsequenzen der hier vorgestellten Erklärungskonzeption sind nun die folgenden:<sup>1</sup> In vielen Fällen im Mathematikunter-

---

<sup>1</sup>Weitere Folgerungen für die Erklärpraxis und Beispielanalysen von Erklärungen im MU werden in einer detaillierteren Darstellung (in Vorbereitung) ausgearbeitet.

richt ist ein kontextübergreifender Verständnisanspruch situativ angemessen. In diesen Fällen werden zwei weitere, abhängig kontextbezogene Parameter relevant, die über den Verständnisanspruch implizit in der vorgeschlagenen Erklärungskonzeption enthalten sind, nämlich ...

... *seitens des Erklärenden* die sicherzustellende *Bereichsinvarianz* der für die Erklärung herangezogenen *H*-nomischen argumentativen Begründung, d.h. dass deren nomischer Charakter in Bezug auf die gegebene Menge von *H*-Kontexten unter geeigneten Umdeutungen erhalten bleibt.

... *seitens des Adressaten*, hier also der SuS, das Vorliegen einer Fähigkeit zum geeignet flexiblen *Perspektivwechsel* oder *Kontexttransfer*, die ein Umdeuten der gegebenen nomischen Begründung in für die relevanten Kontexte spezifische nomische Begründungen ermöglicht.

Wie kann man fördern, dass die Bereichsinvarianz von Begründungen seitens des Adressaten auch erkannt wird? Geht man etwa im Sinne von Bauersfeld davon aus, dass mathematisches Wissen bereichsspezifisch in *per se* isolierten subjektiven Erfahrungsbereichen organisiert ist, so reicht es i.A. nicht, ihm ein geeignet bereichsinvariantes Argument einfach „an die Hand zu geben“. Erklären wird besonders dann zur Herausforderung, wenn echte „Grenzerfahrungen“ innerhalb eines Kontextes ein Erklärungsbedürfnis auslösen, also ein bestimmter mathematischer Sachverhalt in einem bestimmten Kontext Anlass zur Erklärung gibt, eine geeignete Erklärung aber im Rahmen dieses Kontextes nicht möglich ist – hier wird dann mindestens ein Perspektivwechsel nötig. Über die beiden abhängigen Parameter „Bereichsinvarianz“ und „Perspektivwechsel“ erhält man zudem die Möglichkeit, bezüglich unterschiedlicher Grade von Erklärungsgüte und Verständnistiefe zu differenzieren, etwa im folgenden Sinne: Je bereichsinvarianter (hinsichtlich der dem Adressaten bekannten Kontexte) das zur Erklärung angeführte Argument, desto besser die Erklärung (für den Adressaten) – und je mehr Kontexte der Adressat dank der Erklärung nun selbst mithilfe einer nomischen Begründung bewusst abdecken kann, desto tiefer ist sein durch die Erklärung gewonnenes Verständnis.

## Literatur

- Prediger, S. & Meyer, M. (2009): Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 51 (30), 1-7.
- Klein, J. (2009): Erklären-was, Erklären-wie, Erklären-warum. In Vogt, R.: Erklären, Tübingen, Stauffenburg-Verlag, 25-36.
- Bartelborth, T. (2007): Erklären. Berlin, De Gruyter.
- Müller-Hill, E. (2011): Mathematische Erklärung – Wissenschaftsphilosophische Konzeptionen und ihre Relevanz für die Mathematikdidaktik. In: BZMU 2011.