Michael BÜRKER, Freiburg

Zur Modellierung von Spar- und Tilgungsvorgängen

1. Sparvorgänge

Finanzmathematische Begriffe wie z. B. Sparen, Schulden, Tilgen, Zinsen und Zinssätze sind kaum jemals häufiger gebraucht worden als zur Zeit, wo in vielen Medien die kritische Finanzsituation in Europa und in der Welt zur Sprache gebracht wird. Aber nicht nur in der großen Politik, sondern auch im Kleinen geht es um Geldanlagen und Schuldentilgen. Viele junge Menschen haben größere Anschaffungen oder größere Reisen vor und sparen auf diese Wünsche oder bezahlen die Anschaffungen in Raten ab.

Dies ist auch eine Chance für den Mathematikunterricht: Daher wird in diesem Beitrag die Modellierung von Spar- und Tilgungsvorgängen in den Vordergrund gerückt. Es war erstaunlich, dass nach meinem Vortrag eine ganze Reihe von Zuhörern zum Einen gemeint haben, solch eine Modellierung noch nie gesehen zu haben, zum Anderen gefordert, dass die im Vortrag präsentierten Ideen veröffentlicht werden sollten. Wir beginnen mit zwei Aufgaben, die eigentlich uralt sind, die wir aber zum Anlass für diese vorgetragenen Modellierungen nehmen, bei denen das so genannte 3-Säulen-Modell eine entscheidende Rolle spielt. Die Aufgaben und ihre Lösungen ordnen wir den literarischen Figuren Max und Moritz zu. Dabei nimmt Herr Lehrer Lämpel letztendlich eine Zusammenfassung der beiden Lösungen vor, die sowohl zu einer geschlossenen Formel für einen Sparvorgang mit regelmäßiger Sparrate als auch zu einer Formel für einen Tilgungsvorgang führt.

Aufgabe 1:

a) Max erhält einen Geldbetrag K_0 geschenkt und legt diesen auf einem Guthabenkonto mit dem Zinssatz p an. Bestimme den Endwert dieses Kapitals nach n Jahren.

b) Moritz‘ Onkel zahlt am Ende eines jeden Jahres zu Moritz‘ Gunsten die Rate r auf ein Guthabenkonto ohne Anfangskapital mit dem Zinssatz p. Bestimme den Endwert dieses Kapitals nach n Jahren.

Im Fall a) kann man eine geschlossene Formel angeben, die in der Sek. I verwendet wird: $K_n = K_0(1 + p)^n$. Wir vernetzen diese rein algebraische Formel mit geometrischen Überlegungen, die wir als 3-Säulen-Modell bezeichnen. Dabei stellt die 1. Säule (siehe Abb. 1) das Anfangskapital K_0 dar, die 2. Säule den Zins und die 3. Säule den Zinseszins, jeweils als

Rechtecke (Bausteine) dargestellt. Am Ende des ersten Jahres (n = 1) besteht der Jahreszins aus einem Rechteck (Zinsbaustein) mit dem Betrag K_0p, während die 3. Säule leer bleibt, am Ende des zweiten Jahres (n = 2) besteht die 2. Säule aus zwei Zinsbausteinen mit dem Betrag $2K_0p$ und die 3. Säule aus den Zins des 1. Zinsbausteins vom Betrag K_0p^2.

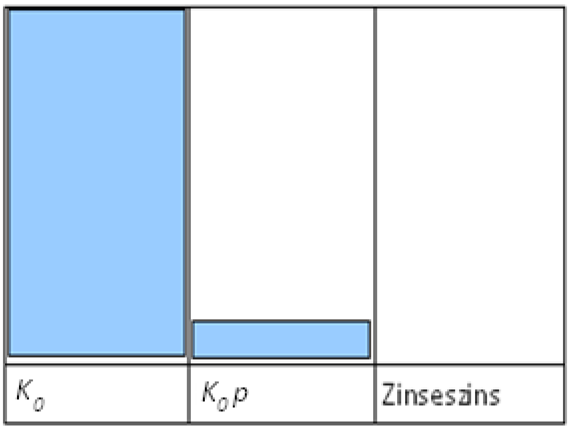

Abbildung 1: n = 1

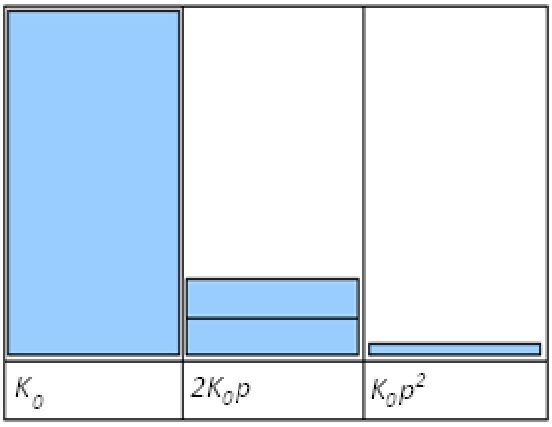

Abbildung 2: n = 2

Die Grundidee des Aufbaus der 3 Säulen liegt damit fest: Die erste Säule enthält das unveränderliche Anfangskapital, die 2. Säule den Jahreszins nach n Jahren und die 3. Säule den Zins des ein Jahr zuvor vorhandenen Kapitals der 2. Säule und des eventuell in der 3. Säule vorhandenen Kapitals.

Mit dieser Grundidee gehen wir Moritz‘ Aufgabe an:

Auf seinem Guthabenkonto geht am Ende jeden Jahres die Rate r ein. Dann bleibt für n = 1 die 1. Säule leer, weil kein Anfangsguthaben vorhanden ist. Die 2. Säule enthält die Sparrate r, während die 3. Säule wiederum leer ist. Die entscheidende Idee ist nun, die Sparrate r als Zins eines gedachten Anfangsguthabens K_g aufzufassen. Dieses gedachte Guthaben hat wegen $K_gp = r$ den Betrag r/p. In der folgenden Abbildung ist dieses gedachte Guthaben K_g nur blass gezeichnet (Abb. 3 und Abb.4):

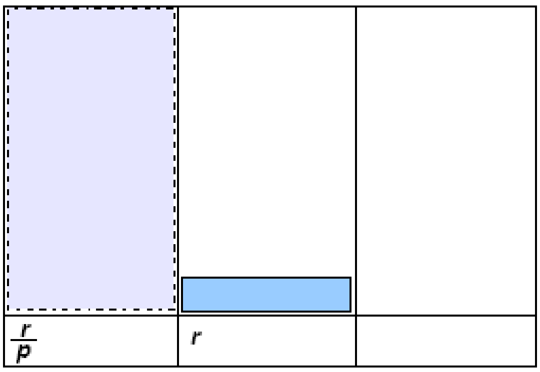

Abbildung 3: n = 1

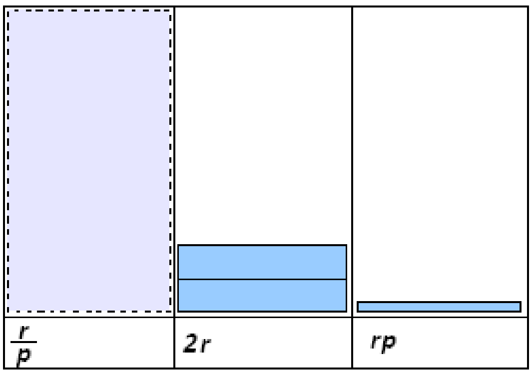

Abbildung 4: n = 2

Für n = 2 befinden sich in der 2. Säule 2 Sparbausteine, in der 3. Säule der Zins rp des ein Jahr zuvor vorhandenen Sparbausteins r. Wir sehen, dass sich der weitere Aufbau der 3 Säulen für n = 3, 4, … ganz genau so vollzieht wie im Fall des Max'schen Sparmodells mit dem einzigen Unterschied, dass das Anfangskapital im Moritz'schen Sparmodell nicht real vorhanden, sondern nur gedacht ist und den Betrag r/p hat. Wir können daher im Moritz'schen Sparmodell die Max'sche Kapitalformel verwenden, indem wir K_0 durch r/p ersetzen und am Ende noch r/p abziehen, weil das Anfangsguthaben ja nur gedacht ist:

Max: $K_n = K_0 \cdot (1+p)^n$ (1)

Moritz: $K^*_n = r/p \cdot (1 + p)^n - r/p$ (2)

In der dritten Aufgabe kommt Lehrer Lämpel zum Zug:

Aufgabe 2:

Herr Lämpel hat ein Anfangsguthaben a_0 und zahlt außerdem am Ende eines jeden Jahres die Rate r auf das Guthabenkonto. Wie hoch ist der Kapitalendwert nach n Jahren beim Zinssatz p?

Jetzt müssen wir nur noch die beiden Endwerte (1) und (2) addieren.

Bezeichnen wir den Anfangswert mit a_0, den Kapitalendwert mit a_n, so ergibt sich aus (1) und (2)

$a_n = a_0(1 + p)^n + r/p(1 + p)^n - r/p$, wobei sich die rechte Seite zusammenfassen lässt:

$a_n = (a_0 + r/p)(1 + p)^n - r/p$ (4)

Für r = 0 ergibt sich die Max'sche Kapitalformel.

2. Tilgungsvorgänge

Der Übergang vom Spar- zum Tilgungsvorgang ergibt sich auf verschiedene Arten, die voraussichtlich in einer im 3. Band der Vernetzungsreihe (s. Literaturangabe) erscheinenden Arbeit genauer beschrieben werden.

Wir beschränken uns hier auf folgende Überlegung:

Wir greifen auf das Max'sche und das Moritz'sche Sparmodell zurück und verwenden dies für die Tilgung eines Darlehens:

Aufgabe 3: Herr Lämpel nimmt zu Beginn eines Jahres ein Darlehen S_0 zu einem Zinssatz p auf, das er in festen Jahresraten r am Ende eines jeden Jahres zurückzahlt. Berechne die Tilgungszeit.

Wir betrachten die Darlehensaufnahme aus Sicht der Bank und aus Sicht des Darlehensnehmers: Die Bank legt den Darlehensbetrag S_0 für die Dauer der Tilgungszeit zum Zinssatz p an. Der Kapitalendwert nach n Jahren ist dann nach (1) gleich $S_0(1 + p)^n$. Der Darlehensnehmer bezahlt am Ende eines jeden Jahres den konstanten Betrag r, der Zins und Tilgung enthält. Er „spart" damit gemäß dem Sparmodell von Moritz so lange, bis er den Kapitalendwert $S_0(1+p)^n$ des Darlehensgebers erreicht, d. h. bis die Gleichung

$$S_0(1 + p)^n = \frac{r}{p}(1 + p)^n - \frac{r}{p} \quad (5)$$

erfüllt ist.

Diese Sichtweise nennt man das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik (siehe Tietze, Jürgen, 2009, Einführung in die Finanzmathematik, Wiesbaden, Verlag Vieweg und Teubner, S. 68). Die Leistung der Bank und die Gegenleistung des Darlehensnehmers sind äquivalent, bezogen auf den Zeitpunkt, an dem das Darlehen zurückgezahlt ist. Löst man Gl. (5) nach n auf, erhält man die Tilgungszeit des Darlehens.

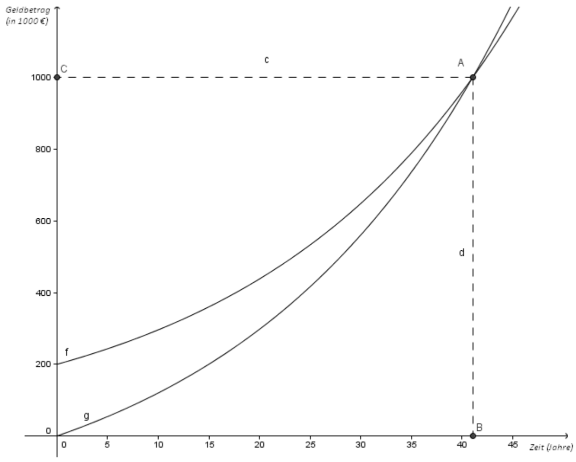

Abbildung 5

Die nebenstehende Grafik zeigt diesen Zusammenhang an Hand der beiden Funktionen

$f\colon n \rightarrow S_0(1 + p)^n$ und

$g\colon n \rightarrow \frac{r}{p}(1 + p)^n - \frac{r}{p}$ mit den

Zahlenwerten $S_0 = 200000$, $r = 10000$ und $p = 0{,}04$. Die beiden Schaubilder schneiden sich im Punkt (41,04|1000000). Dabei entspricht 41,04 (in Jahren) der Tilgungszeit des Darlehens und 1000 000 € dem Kapitalendwert der vom Darlehensnehmer geleisteten Zahlungen. Dies ist das 5-fache des Darlehens!

Literatur

Brinkmann, A. (Reihenhrsg.). Schriftenreihe: Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. München: Aulis Verlag. http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html