Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz

## Instruktion, Konstruktion und die Zone der nächsten Entwicklung

In Mathematikanfängervorlesungen spielen Definitionen und Bezeichnungen eine große Rolle. Im Unterschied zum Fremdsprachenunterricht, wo neues Vokabular durch verschiedene handlungsorientierte Kontexte eingeführt wird und Bedeutungen intuitiv durch Vorwissen aus der Muttersprache erfasst werden können, erfolgt in diesen Vorlesungen die Konstruktion der Begriffe vorwiegend anhand von Merkmalen der zu definierenden mathematischen Objekte. Dieser Spracherwerb fördert kaum Sensibilität und Verständnis bzgl. verschiedener Interpretationen, Kontexte und Bedeutungen mathematischer Konzepte. Erfahrung und Verständnis der Vielfalt von Darstellungs- und Umgangsmöglichkeiten mit mathematischen Begriffen sind jedoch eine notwendige Voraussetzung für differenzierte Diagnostik aktueller Wissensstände, Entwicklungspotentiale und darauf basierender angeleiteter Förderung. Diese Erfahrungen sollten sowohl die Perspektive des anleitenden Lehrenden, als auch des angeleiteten Lernenden einschließen.

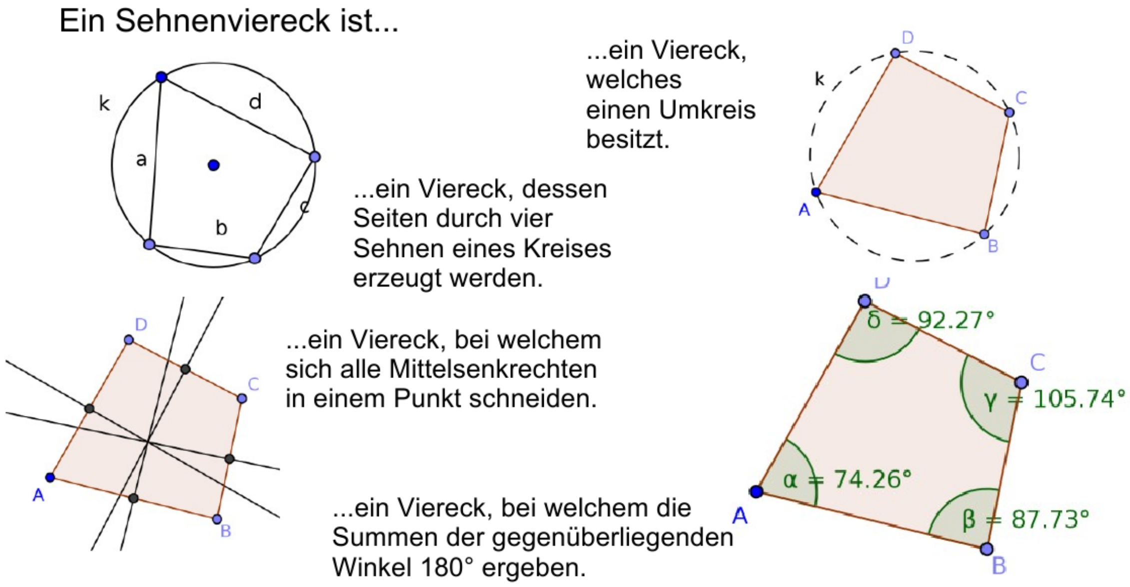
Die Lücke zwischen dem Niveau, auf dem Aufgaben unter Anleitung und unter Mithilfe gelöst werden und dem Niveau, auf dem man Aufgaben selbständig löst, wird durch den Begriff der Zone der nächsten Entwicklung konzeptualisiert. Das Konzept wurde 1934 von Vygotsky auf der Grundlage empirischer Ergebnisse eingeführt und seitdem sowohl theoretisch, als auch unter verschiedenen Anwendungsaspekten weiterentwickelt (für einen Überblick siehe Chaiklin, 2003). Entwicklungen im Bereich der Entwicklungs- und Lerntheorie sind z.B. die Konzeptualisierung der Lehrling-Meister-Beziehung im Fremdsprachenunterricht, Musik und Sport (Lantolf, Pavlenko, Gholson...) die Konzeptualisierung der Handlungsorientierung in der Sonderpädagogik und Begabtenförderung (Krutetski, Smith, Sternberg, Grigorenko…), Anwendungen in der Psychoanalyse (Wilson, Weinstein, …), der Psychotherapie (Leimann, Stiles, …) und der dialogischen Pädagogik (Bakthin, Feuerstein...). Dabei entwickelte Verfahren und Methoden wie gestaffelte Anleitung, Ko-Konstruktion (scaffolding, …), dynamische Kontrollverfahren (dynamic assessment) basieren jedoch weitgehend auf „sichtbarem“ Umgang mit Begriffen und Interpretationen von Verbalisierungen. Sie sind deshalb nur bedingt bei der Konzeptualisierung mathematischer Begriffe anwendbar.

Im tätigkeitstheoretischen Modell können mathematische Konzepte in einer Tätigkeit sowohl Werkzeuge (Problemlösemethode) als auch Untersuchungsgegenstand (Teil der mathematischen Sprache und Theorie) sein. Entwicklung kann dann als dialektische Interaktion und Wechsel entsprechender Tätigkeiten interpretiert werden. In (Weiss-Pidstrygach, 2011) steht die mathematische Umsetzung methodischer dialektischer Gegensätze in Lernumgebungen im Vordergrund. Ziele dieser Lernumgebungen sind u.a. angeleitete Betrachtung eines Problems in „gegensätzlichen“ Kontexten, „provozierter“ Perspektivwechsel und angeleitete Reflektion zu verschiedenen Interpretationen, Kontexten, Methoden und konzeptuellen Hintergründen. Begriffsentwicklung in dialektischen Gegensätzen zielt auf horizontale Vernetzung verschiedener Kontexte und Methodentransfer ab. Im Weiteren betrachten wir Möglichkeiten der vertikalen Entwicklung mathematischer Konzepte. Im Unterschied zur autoritativen Rolle der Anleitung in der beschriebenen dialektischen Positionierung basiert die Umsetzung der Anleitung bei vertikalen Entwicklungen (Vertiefung, Differenzierung, Exaktifizierung, Verallgemeinerung...) stärker auf Methoden der dialogischen Didaktik. Ausgehend von einem im Laufe des Mathematikstudiums erworbenen deduktiven, hierarchischen Aufbau der mathematischen Sprache und an enge Kontexte gebundenes Definieren zeigen wir im folgenden anhand einiger Beispiele, wie in Didaktikveranstaltungen durch Variation verschiedener, mit dem Definieren mathematischer Objekte zusammenhängender Aspekte solche Denkgewohnheiten geändert werden können.

## 1. Definition-Kontext

Viele mathematische Objekte treten in Grundkursen Mathematik in verschiedenen Kontexten auf. Ein Kreis kann als Resultat der Gärtnerkonstruktion, Menge aller Punkte mit gleichem Abstand von einem gegeben Punkt, als Untermenge der reellen Ebene, definiert durch Polarkoordinaten, als Untermenge der reellen Ebene, definiert durch kartesische Koordinaten, als reelle Lösungen der Gleichung: $x^2+y^2=1$, als Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1, als Bahn eines Punktes bei Drehung um einen Punkt, als Ortslinie eines nicht zentralen Punktes einer Drehscheibe, als spezieller Kegelschnitt, als geschlossene Kurve mit konstanter Krümmung…beschrieben werden. Das Anfertigen von Mind-Maps zu verschiedenen Kontexten, Verallgemeinerungen der Begriffe im entsprechenden Kontext, Entwicklung kontextspezifischer Werkzeuge (z.B. Koordinaten, Metrik, Gleichungen, Symmetrie), Wechsel zwischen Darstellungen und Kontexten sind Aktivitäten, welche die Sensibilisierung bzgl. Wortwahl, Umgang mit und Darstellung von Begriffen fördern.

## 2. Definition-Eigenschaften, Genese




Die in der Abbildung verschiedenen Definitionen eines Sehnenvierecks führen zu verschiedenen geometrischen Objekten, mit unterschiedlichen Hilfslinien, entsprechenden Problemlösemethoden und unterschiedlichen lokalen Ordnungen (Weiss-Pidstrygach, 2011). Durch Variationen in der Reihenfolge der Herleitungen geometrischer Zusammenhänge können während des Mathematikstudiums geförderte Vorstellungen von einem streng hierarchischen Aufbau der Mathematik in Zweifel gezogen werden.

## 3. Definition-Darstellungen

Das kanonische Beispiel der Schulmathematik für verschiedene Darstellungen sind die Standartdarstellungen Text, Graph, Wertetabelle und Term für funktionale Zusammenhänge. Diese Vorgaben, sowie Automatisierungen des Gebrauchs vernachlässigen die bewusste Wahl einer Darstellung als geeignetes Werkzeug. Ergänzung durch weitere Darstellungen (Polarkoordinaten, Nomogramme, Maschinchen,...) und die Förderung individueller, problemspezifischer Darstellungen (Parametrisierung, Schubladenprinzip, Darstellungen systematischen Zählens, Zoomen, Spur geometrischer Operation...) fördern ein problemorientiertes Verständnis von Darstellungen.

## 4. Definition-Interpretation, Denkgewohnheiten, Gegenbeispiele

Eine ausführlich ausgearbeitete Methodologie anhand eines Beispiels zur Begriffsentwicklung unter dem Aspekt der Variation der Interpretation von Definitionen gibt Lakatos (1979). Eine mögliche Anwendung der Methode ist die Hinterfragung „zulässiger“ Mengen für die Repräsentanten *a* und *b* im Bruch *a/b*. Die Standardantwort „ganze Zahlen“ kann durch Schulbeispiele wie *a* und *b* reelle Zahlen (Kontexte Steigung, Ähnlichkeit) und *a* und *b* Funktionen widerlegt werden. Stufenfunktionen, sowie Matrizen bilden schulrelevante Gegenbeispiele und Begriffe wie Nullteiler und Quotientenkörper werden motiviert.

Alle genannten Variationsbeispiele lassen sich gut durch Stationen darstellen. Der mit den Variationen angestrebte Perspektivwechsel wird dabei visuell unterstützt, die Anordnung und Systematik der Stationen sind durch die zugrunde liegenden, die Variationen initiierenden Probleme bestimmt.

Im Mathematikstudium ist das Verständnis der Vielfalt und Komplexität mathematischer Objekte oft in weiterführende Kurse verlagert. Variationen von Definitionen gestatten auch auf elementarem Niveau, die Aufmerksamkeit von Bezeichnungen und Merkmalslisten auf vielfältige Bedeutungen eines Objekts zu lenken.

## Literatur

Chaiklin, S. (2003): The Zone of Proximal Development in Vygotsky’s Analysis of Learning and Instruction. In A. Kozulin (Ed.): Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1979): Beweise und Widerlegungen : die Logik mathematischer Entdeckungen. Braunschweig: Vieweg.

Weiss-Pidstrygach, Y. (2011): Umfängliches und Diametrales. In Kaenders R. & Schmidt, R. (Hrsg.): Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.