

Matthias ZELLER, Freiburg, Bärbel BARZEL, Freiburg

## **Erst Computeralgebra nutzen, dann technologiefrei Umformen lernen?**

Nach der Durchführung zweier explorativer Erhebungszyklen kristallisierte sich diese Frage für den Einsatz von Computeralgebra (CAS) in der Sekundarstufe I heraus. Auf der Basis bisher gewonnener Erkenntnisse wird nun in einer weiteren Studie untersucht, inwiefern vor dem Lernen von Prozeduren, Variablenkonzepte vertieft werden können und der Erwerb von Konzepten zu Term- und Gleichungsumformungen angeregt werden kann. Im Mittelpunkt steht die Rolle von mit CAS durchgeführten automatischen symbolischen Umformungen beim Modellieren und Problemlösen.

### **1. Theoretischer Hintergrund**

CAS ermöglicht es Ausdrücke mit Variablen einzugeben, automatisch verarbeiten zu lassen und auszugeben. Beim Lernen mit CAS muss sowohl der Erwerb von mathematischen, als auch der Erwerb von technologischen Kompetenzen angestrebt werden. Allerdings stellt eine disjunkte Zweiteilung des Kompetenzbereichs kein tragfähiges Modell dar, da es Kompetenzen gibt, die eine komplexe Mischung aus technologischem und mathematischem Wissen darstellen (Artigue 2004). Diese Mischung wird instrumentales Wissen genannt. Soll beispielweise beim Modellieren CAS eingesetzt und ausgenutzt werden, so ist beim Mathematisieren eines Kontextes bereits instrumentales Wissen nötig. Wenn schon beim Aufstellen des Modells geplant wird mit CAS zu arbeiten, so kann das Modell wesentlich andere Gestalt haben, als wenn CAS nicht zur Verfügung steht. Reine technologische Kompetenzen spiegeln sich beispielsweise beim Speichern von Dokumenten wider. Beispiele für reine mathematische Kompetenzen sind zum einen Prozeduren, wie das zielgerichtete Umformen von Termen und Gleichungen. Diese machen Algebra zu einem mächtigen Werkzeug. Zum anderen sind auch Konzepte zu algebraischen Objekten wie Variable, Operator, Term und Gleichung reine mathematische Kompetenzen. Sie sind nötig um Algebra in Problemen und realitätsbezogenen Aufgaben anzuwenden und geben der Arbeit mit Algebra ihren Sinn. Die Denkhandlungen, die durch Konzepte ermöglicht werden sind beispielsweise Strukturieren, Verallgemeinern und Darstellen (Fischer et al. 2010).

Wenn Algebraunterricht CAS-gestützt ist, dann kann nicht nur der Erwerb algebraischer Kompetenzen verfolgt werden, sondern auch der Erwerb instrumentaler Kompetenzen. Für den Erwerb dieser bietet sich der Einsatz

von CAS als Werkzeug (tool) an. Dabei entscheidet der Lernende selbst, ob und wie er CAS einsetzt (Barzel et al. 2005).

## **2. Design und Ergebnisse der abgeschlossenen Erhebungen**

In zwei explorativen Erhebungszyklen wurden jeweils zwei gymnasiale siebte Klassen beim Einstieg in das Arbeiten mit Gleichungen in einem Zeitraum von fünf Wochen beobachtet und gefilmt. Ziel war es Hypothesen zu bilden und Erhebungsinstrumente auszuscharfen. Der Fokus lag dabei auf dem Lernen und Lehren von Algebra. Wichtigste Bestandteile des Datensatzes sind Videoaufzeichnungen von Frontalphasen, Interviews mit Lehrern und Lösungsprotokolle von Gruppen zu je drei Lernenden. Diese Lösungsprotokolle beinhalten jeweils Hefteinträge, CAS-Dateien und Videoaufzeichnungen zu ausgewählten Aufgaben.

In den Aufgaben wurden den Schülerinnen und Schülern realitätsbezogene Kontexte vorgestellt, die mit linearen Modellen zu beschreiben waren. CAS wurde als Werkzeug eingesetzt, stand bei diesen Aufgaben jederzeit zur Verfügung und der Einsatz wurde durch eine Kurzanleitung unterstützt. Den Lehrern wurden als Leitgedanken der Unterrichtseinheit vorgestellt, algebraische Objekte mit Leben zu füllen und keine persönlichen Präferenzen zu den Darstellungen Graph, Tabelle und Gleichung zu äußern. Der Einbezug aller drei Darstellungen hatte zur Folge, dass in manchen Phasen Tabelle oder Graph im Vordergrund standen und die für den Einsatz von Algebra relevanten Zeitpunkte einer genaueren Auswertung mit einem größeren zeitlichen Abstand auftraten. Dem Beobachtungszeitraum ging eine Unterrichtsphase voraus, in welcher Vorstellungen zu Graphen und Tabellen aufgebaut wurden. Lernziele der beobachteten Phase waren in erster Linie Konzepte in der Algebra, wobei von den Lehrern auch schon das technologiefreie Durchführen von Prozeduren angesprochen wurde. Die verwendeten CAS-Handhelds (TI-nspire) wurden ohne Algebrabefehle bereits seit einem halben Jahr eingesetzt, wodurch der Erwerb von technologischen Kompetenzen als Moderatorvariable verringert wurde. Nach der Datenreduktion und Auswertung nach Grounded Theory, lassen sich folgende Ergebnisse zusammenfassen, die für die Gestaltung der Folgestudie von Bedeutung sind (ausführlich in Zeller und Barzel 2010).

Aus den Lösungsprotokollen zum Lernen mit CAS:

1. Die schnelle Verfügbarkeit von Ergebnissen von Umformungen, das Arbeiten mit Befehlen und die Notation in CAS, regen Lernende zum Erwerb von konzeptuellem Wissen an.
2. Experimentieren mit symbolischen Ausdrücken wird mit CAS angeregt.

3. Lernende entwickeln individuelle Arbeitsweisen mit CAS in Verbindung mit Papier und Stift.

4. Lernende nutzen alternative Strategien zum Lösen linearer Probleme.

5. In den Lösungen zu Vor- und Nachtest konnten an einer kleinen Stichprobe keine signifikanten Unterschiede gefunden werden.

Aus den Frontalphasen und Interviews zum Lehren mit CAS:

6. CAS-Einsatz wird oft nach dem Lernen von Prozeduren angeregt.

7. CAS-Einsatz wird hauptsächlich am Ende der Bearbeitung einzelner Aufgaben angeregt.

8. Konzeptuelles Wissen wird von den Lehrern nicht als grundlegende Kompetenz wahrgenommen.

9. Der Einsatz von Algebra wurde wenig über Sinnstiftung angeregt.

### **3. Design der geplanten Erhebung**

In dem auf der Basis der Ergebnisse entwickelten Unterrichtsmaterial für die geplante Erhebung steht der Erwerb von Konzepten zu algebraischen Objekten an erster Stelle. Es wird bereits vor dem Erwerb von Prozeduren, also bevor die Lernenden einfache Gleichungen mit einem Lösungsalgorithmus lösen können, eingesetzt. Da lineare Probleme durch alternative Strategien bearbeitet werden können (Ergebnis 4), werden von Beginn an auch Probleme höheren Grades und exponentielle Probleme eingebunden. Dies stiftet dem Einsatz von Algebra einen tiefen Sinn (vgl. Ergebnis 9), denn die Schülerinnen und Schüler lernen Probleme kennen, die sie ohne Algebra nicht lösen könnten. Unter didaktischen Gesichtspunkten ist der starke Einbezug von Graph und Tabelle unumgänglich, trotzdem wird dieser Weg für die geplante Erhebung nicht beschränkt. Dies ist den Erhebungsmethoden geschuldet. Zum Ersten wird der organisatorische Aufwand verringert, da alle Erhebungszeitpunkte hintereinander in einem Zeitraum von ca. 6 Unterrichtsstunden liegen. Zum Zweiten können damit Veränderungen der Kompetenzen, die durch den CAS-Einsatz ermöglichten Aufgaben, deutlicher zugeschrieben werden. Zum Dritten kann ausgeschlossen werden, dass das Lernen von Algebra durch den Einbezug anderer Repräsentationen erfolgte. Insgesamt wird also angestrebt, auf Kosten der ökologischen Validität, prägnantere Effekte zu erzielen, welche evtl. sogar mit quantitativen Methoden nachgewiesen werden können (vgl. Ergebnis 5). Die konzeptuellen Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern der Intervention und von Schülerinnen und Schülern höherer Klassenstufen, welche auf dem traditionellen Lernweg Prozeduren vor Konzepten erworben haben, sollen miteinander verglichen werden. Geplant ist zudem

die Aufnahme von qualitativen Daten, wie sie bereits in den bisherigen Erhebungen stattgefunden hat. Der Fokus der Studie liegt auf dem Lernprozess, während der Einfluss der Lehrperson durch strenge Vorgabe des Unterrichtsmaterials, Handbücher und Schulungen möglichst stark kontrolliert wird.

Die Gestaltung der Intervention stellt konzeptuelles Wissen als grundlegende Kompetenz heraus (vgl. Ergebnis 1 und 8). CAS wird von Beginn an in den Lernprozess des Arbeitens mit Gleichungen eingebunden, wodurch ein Experimentieren mit algebraischen Objekten induziert wird (vgl. Ergebnis 2 und 7). Die beobachteten Lernmöglichkeiten zum Erwerb von instrumentalem Wissen (vgl. Ergebnis 3) und zum Aufbau konzeptuellen Wissens (vgl. Ergebnis 1) sollen in den Aufgabenstellungen explizit angeregt werden. Mit dieser Anknüpfung an die Ergebnisse der vorherigen Erhebungen soll ein natürlicher Lernweg angeregt werden, der den Bedürfnissen der Lernenden auf ihrem individuellen Lernstand gerecht wird.

Der folgende Ausschnitt einer Aufgabe soll exemplarisch die von den Lernenden geforderten Handlungen illustrieren: *Damit ein Bild schön wirkt, soll sein Passepartout überall die gleiche Breite haben. Die Fläche des Passepartouts soll genau so groß sein wie die Fläche des Bildes.* Der Lösungsansatz führt auf eine quadratische Gleichung:  $(a+2\cdot x)\cdot(b+2x)-a\cdot b=a\cdot b$  (Mit  $x$  als Breite des Passepartouts sowie  $a$  und  $b$  als Seitenlängen eines Bildes). Fragen sind, ob Lernende diese Modelle aufstellen, in CAS umformen und die Ergebnisse interpretieren können, obwohl sie weder mit den in CAS durchgeführten Prozeduren, noch mit in Zwischenschritten von CAS ausgegebenen Ausdrücken vertraut sind. Zudem ist gefragt, welche Kompetenzen sie bei solchen Handlungen erwerben. Die benötigten Prozeduren auch technologiefrei durchführen zu können, ist Ziel späterer Unterrichtseinheiten zur Algebra, was allerdings nicht mehr untersucht wird.

## Literatur

- Artigue, M. (2004): The integration of computer technologies in secondary mathematics education. In: Wang Jianpan et al. (Hg.): *Trends and challenges in mathematics education*. Shanghai: East China Normal University Press, S. 209–222.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. (Hg.) (2005): *Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., Prediger, S. (2010): Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 52 (33), S. 1-7.
- Zeller, M., Barzel, B. (2010): Influences of CAS and GC in early algebra. In: *The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 42 (7), S. 775–788.