Gerhard N. Müller, Dortmund

Vom Einmaleins zur Algebra, vom Falten zum Pythagoras, vom Denkspiel zur Logik (Das didaktische Permanenzprinzip)

Rohmanuskript des Vortrags vom 17.Symposium mathe 2000

Bei der Entwicklung innovativer Materialien und innovativer Lehr-Lernformen haben wir bewusst vor über 20 Jahren das Fach „Mathematik“ und das „Üben“ als Basis unseres Ansatzes im Handbuch produktiver Rechenübungen gewählt. Warum spielt neben dem Üben das Fach eine derart zentrale Rolle?
Immer mehr setzt sich die Auffassung durch, dass auch naturwissenschaftliches Lernen schon im frühen Kindesalter beginnen muss. Deshalb werde ich versuchen den Bogen des Lernens (zumindest was die Algebra und Arithmetik betrifft) vom Kindergarten bis zur Universität zu spannen.

„Die Mathematik ist das Tor zur Naturwissenschaft, und dieses Tor ist so niedrig und klein, dass man nur als kleines Kind hinein gelangen kann.“
Clifford (1845 – 1879)

Das Bestreben den Arithmetikunterricht von der Grundschule aus zur weiterführenden Hauptschule zu entwickeln findet man schon bei vielen traditionellen Rechendidaktiken, wie z.B. Kühnel, Oehl, Karaschewski u.a. Für die Geometrie und Logik wurde diese Forderung erst im Zuge der so genannten „Neuen Mathematik“ gestellt. Dort wurden einige Unterrichtsvorschläge zur Geometrie und Kombinatorik in der Grundschule gemacht, wobei ein Übergang zu den höheren Klassen nicht erkennbar war. Oft waren es auch klassische Themen der Sekundarstufe I, die z.T. verfrüht als mögliche Grundschulthemen aufbereitet wurden.

In diesem Vortrag möchte ich natürlich über das klassische Prinzip der Fortsetzbarkeit eines mathematischen Themas hinausgehen.

Prinzip der Fortsetzbarkeit (formuliert nach E. Wittmann, Grundfragen)
„Die Auswahl und Behandlung eines Themas an einer bestimmten Stelle des Curriculums soll nicht ad hoc, sondern so erfolgen, dass auf einem höheren Niveau ein Ausbau möglich wird. Zu vermeiden sind vordergründige didaktische Lösungen, die später ein Umdenken erforderlich machen.“

Ich werde versuchen, aufzuzeigen, dass z.B. der „Zehnerübergang bei der Addition“ und der klassische Stufengang bei der Multiplikation solche vordergründigen didaktischen Lösungen waren. Den festgelegten Zehnerübergang haben wir durch freies Strukturieren mit Plättchen und folgerichtig auch durch freies Strukturieren an Summanden ersetzt. Den festgelegten Stufengang bei der Multiplikation (Multiplikation mit E (Einern), Multiplikation mit Z (Zehnern), Multiplikation mit ZE, ...) durch das Malkreuz, das allgemein die Multiplikation großer Zahlen auf die Multiplikation kleinerer Zahlen zurückführt (allgemeines Distributivgesetz).Diese damals innovativen Ansätze wurden inzwischen teilweise unter anderem Namen von zahlreichen Lehrwerken übernommen, was ich als Didaktiker sehr begrüße. Das Zurückgehen auf einfachere mathematische Gesetze gibt dem Lernenden mehr Freiheit. Diese Kreativität (z.B. bei der halbschriftlichen Addition und Subtraktion) wurde in den letzten 10 Jahren von zahlreichen Autoren (Spiegel, Selter, Hengartner, u.a.) beschrieben. In diesem Zusammenhang muss auf eine Pointierung des **Prinzips der Fortsetzbarkeit** von Dienes, das „deep-end-Prinzip“, hingewiesen werden. Dieses besagt, dass es in gewissen Fällen sinnvoller ist, im Unterricht den allgemeineren Begriff anzustreben, als unbedingt

nötig ist.(m.a.W. man stößt das Kind am „tiefen Ende“ in den Teich) Die Beispiele von Dienes waren wie schon Wittmann bemerkt wenig überzeugend.
Ich würde den Sachverhalt eher mit einem Prinzip von Hankel beschreiben wollen, dem so genannten **Permanenzprinzip** (frei formuliert nach Ziegenbalg):

Gilt in der Arithmetik ein Gesetz, so bleibt es gültig, wenn sich der Zahlenraum bis hin zur Algebra erweitert. Arithmetik entwickelt sich aus einfachsten Regeln, die immer weiter bestehen bleiben.
D.h. bei einem richtigen Aufbau der Arithmetik aus einfachsten Regeln und Mustern, bleiben diese Regeln und Muster bestehen. Lernen entwickelt sich, denn die bereits gelernten Muster können auch in neuen Zahlbereichen (bei größeren Zahlen, Bruchzahlen, Dezimalzahlen, Variablen) verwandt werden.

Didaktisches Permanenzprinzip:
Lernen und damit auch Unterricht sollte so angelegt werden, dass sich das Wissen aus einfachsten Regeln und Mustern entwickelt, die weiter gelten. Diese Muster sollten dem Lernenden bewusst gemacht werden, damit sie für weiteres Lernen wirksam werden.

Dieses Prinzip passt zur heutigen Sichtweise von Mathematik als einer Wissenschaft von Mustern (vgl. hierzu Devlin und E.Ch. Wittmann u. G.N. Müller : Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept (2007)). Arithmetik und Algebra, Geometrie und Logik lässt sich so entwickeln.

Die für den modernen Mathematikunterricht geforderte Kultur des Beobachtens, Entdeckens, Problemlösens und Beschreibens klappt umso besser, je mehr sich der Lernende an immer wiederkehrenden einfachen Regeln und Mustern orientieren kann, die auch bestehen bleiben und immer wieder verwendet werden können (Denkökonomie).
Insofern besteht ein äußerst enger Zusammenhang zwischen der Entwicklung inhaltsbezogener und allgemeiner mathematischer Kompetenzen.

Wer Mathematikunterricht beobachtet, weiß, dass mathematisch begabte Kinder von sich aus das Permanenzprinzip anwenden und sich so neue Wissensgebiete selbständig erobern. Weniger begabten Kindern sollte dieses Prinzip durch gemeinsam reflektierenden Unterricht näher gebracht werden, damit auch sie dieses beim Lernen effektiv nutzen können.

Um es noch einmal deutlich festzustellen:
Die Forderung nach Mathematik ab dem frühen Kindesalter bezieht sich nicht nur auf Inhalte, dass z.B. Kindern vor und in der Grundschule ein Minimum an Rechenfähigkeit, an Raumerfahrung und an Denkfähigkeit vermittelt wird, sondern vor allem auch auf mathematische Tätigkeiten und Erfahrungen. Die Auffassung von Mathematik als der Wissenschaft von Mustern, die sich aus einfachen Grundmustern entwickeln, ermöglicht dies.

Erste Algebra
Von einfachen Grundmustern beim Strukturierten Zählen zu vielfältigen Rechenstrategien beim halbschriftlichen Rechnen bis hin zu schönen Sätzen der Höheren Arithmetik

Als meine Kinder noch teilweise im Kindergarten, teilweise in der Grundschule waren erinnere ich mich an ein Frühstück, oder vielleicht wie junge Kollegen sagen, besser an eine Rechenkonferenz im Hause „Müller". Boje, ein Kindergartenkind sagte plötzlich die Fenster unserer Küchentür betrachtend: „Das sind doch 12!" Als Didaktiker fragte ich nach „Warum?" Zu meiner großen Überraschung fing er nicht an zu zählen, sondern sagte: „Ich sehe 6 und 6." Darauf gab es kein Halten mehr, denn andere Kinder sahen 4 und 4 und 4, andere wieder 3 und 3 und 3 und 3, andere 2 und 2 ... Alle wussten, dass es 12 waren, sie sahen die Fenster der Tür anders.
Nebenbei bemerkt, setzten wir die Rechenkonferenz fort, denn der Didaktiker im mir fragte: „Ja, wenn 1 Scheibe gebrochen wäre, wie viel Scheiben wären es dann." Es waren natürlich 11 , 1 weniger als 12, aber auch 6 und 5, 4 und 4 und 3, ...
Diese kleine Geschichte beschreibt die Anfänge der Algebra, das sogenannte strukturierte Zählen. Hierfür gelten einfachste Regeln:
In einem ersten Schritt wird die Menge vollständig in disjunkte Teilmengen zerlegt. Weitere Vorgaben gibt es nicht.
In einem zweiten Schritt werden die Teilmengen additiv zusammengefasst. Es gelten das Vertauschungsgesetz (**Kommutativgesetz)** und das Verbindungsgesetz (**Assoziativgesetz**), d.h. es darf beliebig zusammengefasst, getauscht und evtl. auch weiter zerlegt werden.
Wie obiges Beispiel zeigt, bevorzugt man bekannte Muster von kleinen Zahlen, zum Beispiel Würfelbilder. In der Grundschule kann man mit Hilfe des Zwanzigerfeldes strukturieren. Für größere Anzahlen nimmt man gerne Felder. Auch in der Umwelt sind viele Mengen strukturiert(Verpackungen)

Die Anzahl von strukturierten Mengen kann einfacher bestimmt werden, wie ich am Beispiel von 17 Plättchen dokumentiert habe (Folie)

In diesem Zusammenhang erinnere ich mich an eine Episode mit Merle aus ihren ersten Schultagen mit ihrer Plättchenbox. Sie sollte mir jeweils 11, 17, 9 ,... Plättchen legen, was sie auch mühelos schaffte. Ich meinte dann provokativ: „Schaffst du auch einhundert?" Natürlich meinte sie. Die ersten Versuche gingen jeweils schief, weil sie durch die anderen Kinder mehrmals abgelenkt wurde und beim Wiederkommen nicht mehr wusste, wie viel Plättchen sie gelegt hatte. Es fehlte eine klare Strukturierung, z.B. in Zehner. Ich reizte sie, indem ich feststellte, dass sie hundert doch noch nicht schafft. Wutschnaubend legte sie die erste Zeile und die erste Spalte eines Hunderterfeldes und ein paar weitere Plättchen in die Ecke. „So, und wenn Du dies fertig hinlegst, hast du deine hundert." Natürlich wollte ich wissen, woher sie dies denn wisse. Darauf antwortete sie: „ Dies ist bei Boje (dem größeren Bruder) im Schulbuch und der hat gesagt: Es sind hundert"

Nach meiner Überzeugung sind dies die Anfänge algebraischen Denkens, wie in der Algebra wird umgeformt. Vielfältige Strukturierungsmöglichkeiten ergeben zwangsläufig viele Rechenmöglichkeiten beim „Zehnerübergang" am Zwanzigerfeld und beim halbschriftlichen Rechnen. (Schulbuchseite zum Zehnerübergang, zum halbschriftlichen Rechnen im Hunderter und im Tausender (Folie)
Um aus den Grundmustern der Strukturierung den Zahlenraum zu erobern braucht man ein weiteres algebraisches Muster:
Gesa, ein Zahlenbuchkind, behauptet in der ersten Schulwoche: „ Meine Cousine aus Berlin darf in der Schule nur bis 6 rechnen. Ich kann aber schon ganz weit rechnen." Meine Frage war dann: „ Wie viel ist 10 + 10?" „20" „Wie viel ist 20 + 20?" „40" „Wie viel ist 30 + 30?" „60" „Wenn du so gut bist, wie viel ist 60 + 60?" Zögernd „12-zig, aber das ist nicht richtig:" Gesa ließ sich nicht erklären, dass 10 Zehner zu 100 zusammengefasst werden, und .... Sie kam aber nach etwa 4 Wochen und sagte: „So, jetzt kannst du mich auch über 100 fragen!"
Gesa benutzte das folgende Muster, hatte aber noch nicht die Bündelung von 10 Zehner zu einem Hunderter erkannt. Naturgemäß verursachen die Unregelmäßigkeiten in der Zahlwortreihe kleinere Fehler, die aber schnell behoben werden.

Da Plättchen Stellvertretercharakter haben, denn sie sind einerseits konkret als Material, andererseits aber abstrakt. Man kann sich darunter Kinder, Enten, ... aber auch andere Zahlenbündel, wie Gesa die Zehner (-zigs), vorstellen . So lernt man im ersten Schuljahr nicht nur das Einspluseins, sondern auch dass 5Tausender + 4 Tausender immer 9 Tausender ergeben, aber auch 5 Sechser + 1 Sechser ergeben 6 Sechser.(allgemein $5x + 4x = 9x$) usw. Dies ist Algebra, insofern ist die Ableitung der Einmaleinsaufgaben aus den Grundaufgaben algebraisch.
Für die Multiplikation größerer Zahlen gibt das Malkreuz eine sehr gute Strukturierung. Diese Strukturierung kann im Kindergarten oder im ersten Schuljahr zum Auszählen von Backblechen genutzt werden (vgl. Untersuchungen von Susanne Steinweg im Kindergarten). (Folien mit Malkreuz im zweiten, dritten Schuljahr zur Übung des Einmaleins und zur Ausdehnung der Multiplikation auf 2-stellige Zahlen. Mit dieser Vorgabe haben es Kinder in der Klasse von Frau Zerr geschafft, selbständig ohne weitere Anleitung halbschriftlich auch dreistellige Zahlen zu multiplizieren.
Das Malkreuz ist allgemeiner, aber nach „deep-end" auch erheblich effektiver als der Stufengang. Dahinter verbirgt sich das Distributivgesetz. Wir freuen uns als Didaktiker, dass inzwischen auch einige andere Schulbücher das Malkreuz unter anderem Namen übernommen haben.

Angemerkt sei hier nur noch, dass Mathematiker seit dem Altertum Zahlen auch geometrisch strukturiert haben. Die verschiedenen schönen Muster lieferten mathematische Erkenntnisse, was hier kurz an Quadratzahlen demonstriert werden soll:

1.Muster: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen liefert eine Quadratzahl .
1 , $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$,...... (Folie)

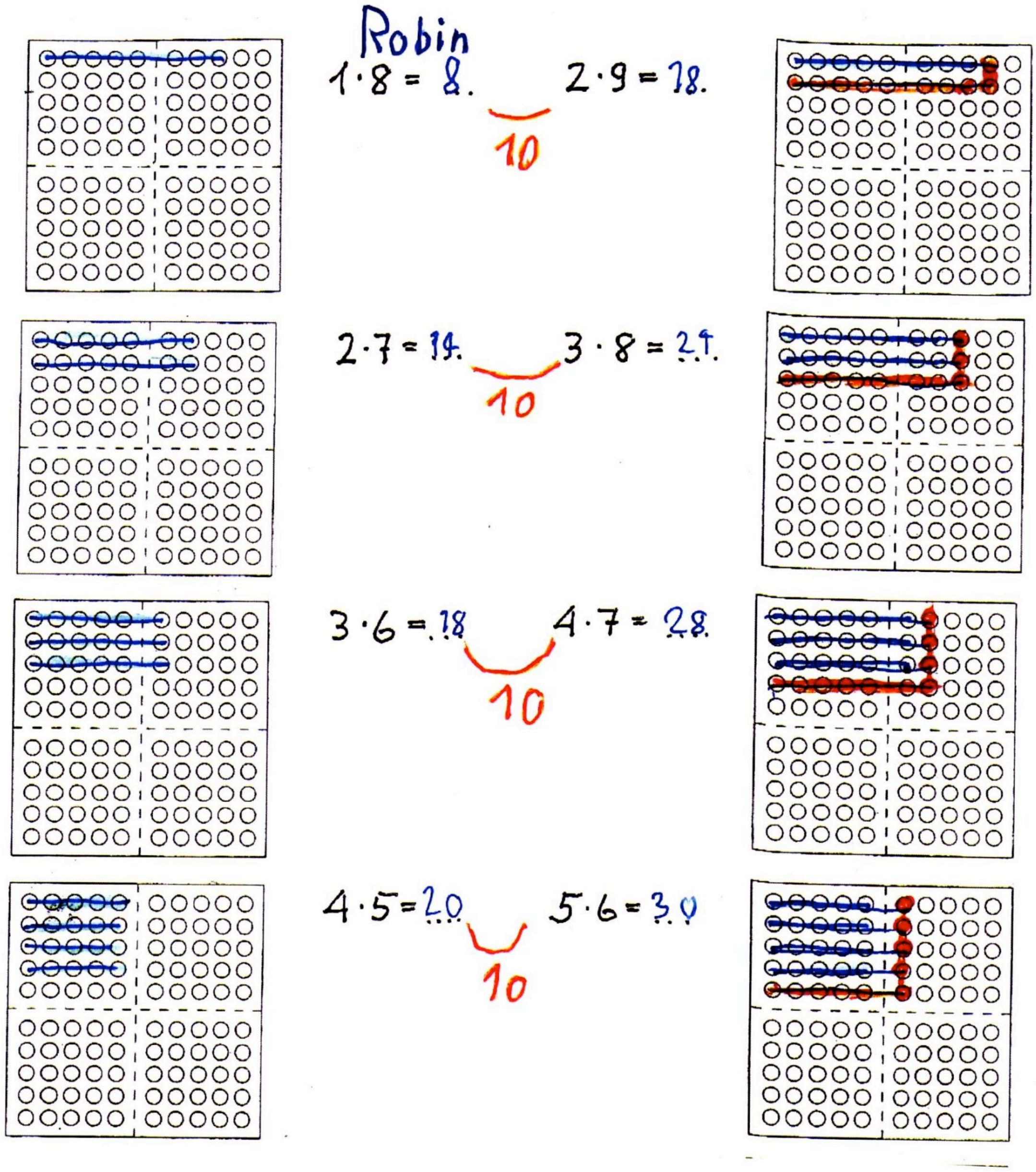
2.Muster: „Trepp-auf, trepp-ab" liefert Quadratzahlen (Folie)

$1+2+1 = 4$, $1 + 2 +3 + 2 + 1 = 9$, $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$

3.Muster: Die Addition der 8 –er Reihe liefert ungerade Quadratzahlen(Folie)
1 , $1 + 8 = 9$, $1 + 8 + 16 = 25$, $1 + 8 + 16 + 25 = 49$,

Man sieht, das Strukturieren liefert schöne arithmetische Sätze. Es gibt ein Gebiet der Mathematik „Geometrische Zahlen", das solche Strukturierungen von Mengen ausnutzt.

Besonders schön ist hier ein Dokument von Elmar Hengartner, der mit strukturierten Punktmustern ein Muster in der Einmaleinstafel (Folie)



Man kann nicht nur mit Punktmustern sondern in der Sekundarstufe mit Hilfe algebraischer Formelrechnung leicht zeigen, ist $x + y = 9$, so unterscheiden sich x mal y und $(x + 1)$ mal $(y + 1)$ um 10:

$$(x+1) (y + 1) = xy + x + y + 1 = xy + 10$$

Es gibt inzwischen viele Punktmusterbeweise und mit zunehmender Sicherheit und Vertrautheit der Lehrer mit dem „mathe 2000“ Konzept finden sich auch immer mehr schöne Schülerlösungen. Robin wird seine Kenntnisse in der Sekundarstufe sicher ausbauen.

Von schönen Päckchen zu Rechenregeln für neue Zahlbereiche

In schönen Päckchen spiegeln sich Rechengesetze, bei Fortsetzung der Muster ergeben sich zwangsläufig nach dem Permanenzprinzip Rechenregeln für das Rechnen mit negativen Zahlen, mit Bruchzahlen und für die Algebra.

Beispiele:

4 + 5 = 9
3 + 6 = 9
2 + 7 = 9
1 + 8 = 9
0 + 9 = 9
(-1)+ 10=9
(-2)+ 11=9
....

Muster: Erste Zahl immer 1 weniger,
zweite Zahl immer 1 mehr,
die Summe bleibt gleich.

5 - 3 = 2
4 - 2 = 2
3 - 1 = 2
2 - 0 = 2
1 – (-1)=2
0 –(-2) =2
(-1) –(-3)=2
....

Muster: Erste Zahl immer 1 weniger,
zweite Zahl immer 1 weniger,
der Unterschied bleibt gleich.

3 mal 6 = 18
2 mal 6 = 12
1mal 6 = 6
0 mal 6 = 0
(-1)mal6 = -6
(-2)mal 6 =

Muster: Erste Zahl immer 1 weniger,
zweite Zahl immer gleich 6,
Ergebnis immer 6 weniger

Setzt man das Distributivgesetz , also das Malkreuz fort, so ergeben sich zwangsläufig Rechenregeln für die Multiplikation von negativen Zahlen und Bruchzahlen.

.	6	-1
6	36	-6
-1	-6	?

Da insgesamt wegen 6 – 1 = 5 auch 5mal 5 = 25 herauskommen muss, muss bei Gültigkeit des Malkreuzes 36 – 6 – 6 + ? = 25 sein, d.h. (-1)(-1) muss +1 sein.
Überträgt man das Malkreuz auf Bruchzahlen, so ergibt sich zwangsläufig 1/2 mal 1/3 = 1/6:

.	1/3	1/3	1/3
1/2	?	?	?
1/2	?	?	?

Da 1/3 + 1/3 + 1/3 ebenso wie ½ + ½ gleich 1 ist, muss insgesamt 1 mal1 gleich 1 herauskommen, in jedem der Felder steht aber das gleiche Ergebnis von ½ mal 1/3 , also 1/6.

Das Malkreuz lässt sich natürlich auch auf das Rechnen mit Variablen ausdehnen. Binomische Formeln ergeben sich in natürlicher Weise als Fortsetzung der Muster beim Einmaleins. (Beispiele)

Ich möchte hier nicht weitermachen, mathematisch lässt sich nach dem Permanenzprinzip und unseren Grundmustern auch die Addition von Brüchen ableiten.

Von Denkaufgaben zur Algebra

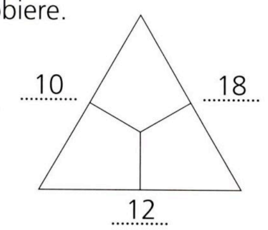
Mathematik(Algebra) in Form von Denkaufgaben (oft mit sachlichem Hintergrund) dem Lernenden näher zu bringen hat eine sehr alte Tradition. Sie findet sich bereits in der ägyptischen und babylonischen Mathematik und wurde im indischen-arabischen Kulturkreis weiter entwickelt, von dort kam sie dann nach Europa (vgl. hierzu Alten u.a. 4000 Jahre Algebra). Durch Stellen und Lösen solcher Aufgaben wurde algebraisches Wissen vermittelt, so z.B. das Lösen quadratischer Gleichungen lange bevor es Formeln in der Mathematik gab. Auch bei Adam Ries finden sich derartige Aufgaben. Durch einen jeweils gegebenen Sachzusammenhang ist es sehr nahe liegend und natürlich Daten verständnisvoll zu variieren und zu interpretieren. Auch der probierende Ansatz (falscher Ansatz) lässt sich von Anfang der Geschichte (z.B. babylonische und ägyptische Mathematik) an nachweisen. Für die Grundschule gilt:
Nimmt man Plättchen als Stellvertreter, so lassen sich diese Aufgaben oft durch Operieren mit Plättchen lösen. Das Operieren mit Zahlen lässt sich oft durch bekannte Übungsformate (wie Tabellen, Rechenketten, sogar Rechendreiecke) unterstützen.
Denkaufgaben finden sich deshalb in der Kinderbuchliteratur, in Kinderzeitschriften und natürlich auch in Schulbüchern.
In den Sekundarstufenbüchern finden sich derartige Aufgaben in der Regel , um Gleichungen aufzustellen und zu lösen.

Hier eine kleine Auswahl solcher Aufgaben:
1.Aufgabe:
Ich zähle 22 Beine. Wie viele Schafe und Hühner können es sein?
Lösungen: Zeichnen, Schieben von Plättchen, systematisches Probieren (z.B. in Tabellen darzustellen)
Mathematische Struktur: Lösen einer diophantischen Gleichung $4S + 2H = 22$ (S Anzahl der Schafe, H Anzahl der Hühner). „Diophantisch“ bedeutet, dass nur ganzzahlige Lösungen sinnvoll sind und gesucht werden.
2.Aufgabe:
Ein Vater und ein Sohn sind zusammen 52 Jahre alt. Der Vater ist 30 Jahre älter als der Sohn.
Lösungen: Schieben von Plättchen, Systematisches Probieren, Inhaltliche Lösung: Bei der Geburt des Sohnes war der Vater 30 Jahre alt, seither sind beide zusammen 22 Jahre älter geworden, jeder also um jeweils 11 Jahre. Der Sohn muss also 11 Jahre, der Vater 41 Jahre alt sein.
Mathematische Struktur: $V + S = 52$, $V - S = 30$ mit V alter des Vaters und S Alter des Sohnes.

Überlegen und rechnen......

1 Probiere.

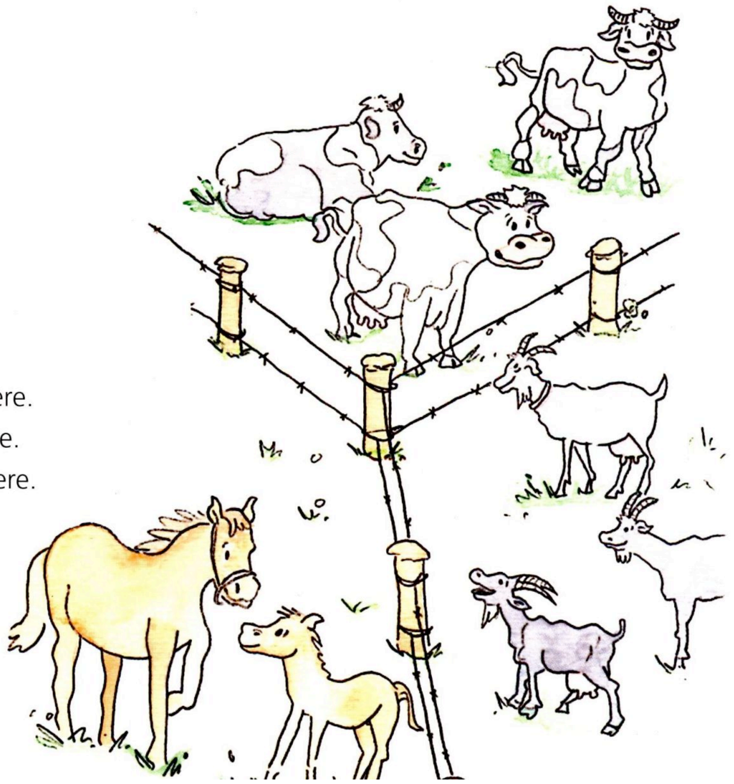
a)



b) Auf einer Weide stehen
Kühe, Pferde und Ziegen.
Ohne Pferde sind es 18 Tiere.
Ohne Kühe sind es 12 Tiere.
Ohne Ziegen sind es 10 Tiere.

Es sind .... Pferde.
Es sind .... Kühe.
Es sind .... Ziegen.

Vergleiche mit **a**).



Lösungen:
Inhaltliches Probieren: Die Anzahl der Kühe und Pferde muss 10 sein. Wären es 9 Kühe, so wäre es 1 Pferd und damit 19 Tiere, also 9 Ziegen. Dies geht nicht, denn ohne Kühe sind es nur 10 Tiere.
Wären es 8 Kühe, so wären es 2 Pferde und damit 20 Tiere und 10 Ziegen. Alles Stimmt.
Lösen durch Probieren an folgendem Rechendreieck (Folie)

Math. Struktur: $P + K + Z - Z = 18$, also $P + K = 18$
$P + K + Z - K = 12$, also $P + Z = 12$
$P + K + Z - Z = 10$, also $P + K = 10$. P Anz. der Pferde,der Kühe,
Z Anz. der Ziegen

Die Darstellung am Rechendreieck lässt sich sowohl inhaltlich als auch mit der Struktur erklären. Die Lösung ist dann einfach.
Pferde
4.Aufgabe:
Im Stall werden Pferde und Fliegen gezählt. Es sind 15 Tiere, Zusammen haben Sie 72 Beine. Wie viele Pferde und wie viele Fliegen sind es?
(Verschiedene Lösungsmöglichkeiten: siehe Zahlenbuch (Folie)
Eine besonders schöne:
Jedes Tier hat mindestens 4 Beine, also haben 60 Tiere mindestens 60 Beine. Es sind aber 12 Beine mehr, also müssen es 6 Fliegen mit je 2 Beinen mehr sein.
Diese Aufgabe ist strukturgleich zu einer schwierigen Mischungsaufgabe, mit der selbst Studenten ihre Schwierigkeit haben:
Ein Armreif hat ein Gewicht von 100g. Er besteht aus Gold und Silber.
Das Volumen des Armreifes beträgt 8 Zentimeterwürfel.

Info: 1 Zentimeterwürfel Gold wiegt 20g, ein Zentimeterwürfel Silber wiegt 10g.
Wie viel g Silber und wie viel g Gold sind es?
Jeder Zentimeterwürfel verwendetes Metall wiegt mindestens 10g, d.h. der Armreif wiegt bei jeder Mischung mindestens 80g. Damit ich 20g mehr erhalte muss ich 2 Zentimeterwürfel Silber durch das schwerere Gold ersetzen und erhalte 20g mehr. 2 Zentimeterwürfel Gold wiegen 40g, 6 Zentimeterwürfel Silber 60g, zusammen also 100g.
Mathematische Struktur:

$F + P = 15$

$6F + 4P = 72$ mit P Anzahl der Pferde und F Anzahl der Fliegen.

$G + S = 8$

$20G + 10S = 100$ mit G Anz. der Zentimeterwürfel Gold und S Anzahl der Zentimeterwürfel Silber. Auch an den Gleichungen ist die gleiche mathematische Struktur ersichtlich .Die Aufgabe wurde übrigens schon Archimedes gestellt. Der König von Syracus stellte ihm die Aufgabe festzustellen, ob in einer 5 kg schweren Krone der Goldschmied auch das übergebene Gold verarbeitet hatte. Archimedes durfte dabei aber die Krone nicht zerstören. Auch Archimedes löste die Aufgabe inhaltlich.
Die so genannte Mischungsrechnung in der Sekundarstufe gilt als besonders schwierig, weshalb sie aus den Schulbüchern verschwunden ist und durch nichtssagende, nichtnaturwissenschaftliche, teilweise banale Aufgaben ersetzt wurde. Die Firmen beklagen sich, dass für im Rahmen chemische Versuche inzwischen bei vielen Schulabgängern die Anwendung des Dreisatzes problematisch ist.

5.Aufgabe:
Zahlenrätsel: Ich denke mir eine Zahl, multipliziere sie mit 4, addiere10, dividiere durch 5 und erhalte die Zahl 6. (vgl. Zahlenbuch)
Lösung: Durch Anwenden der inversen Operatoren.
Darstellung durch Rechenketten (Papygramme)

Mathematische Struktur: $((X * 4) + 10) : 5 = 6$

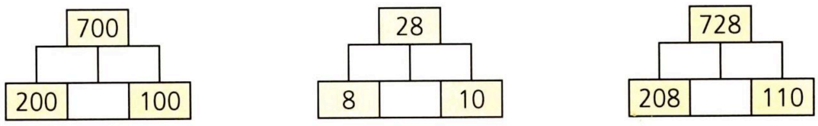
Auch das Lösen von Gleichungen auf der Sekundarstufe erfolgt durch Umkehroperatoren. Diese Art von Zahlenrätsel bilden eine gute propädeutische Gleichungslehre (Folie) .

Nicht nur mit Zahlen rechnen
(Strukturen höherer Ordnung)

In der modernen Algebra rechnet man nicht nur mit Zahlen, sondern in höheren Strukturen mit Vektoren, Matrizen,... . Auch in der Grundschule rechnet man zunehmend auch in höheren Strukturen:
1. Beispiel : Magische Quadrate (Folie)
Wenn man jede Zahl eines magischen Quadrates mit einer Zahl multipliziert, so bleibt das Quadrat magisch. Beispiel: Verdoppelt man jede Zahl im Lo-shu – Quadrat, so erhält man ein magisches Quadrat aus den ersten 9 geraden Zahlen mit der magischen Summe 2 mal 15 . Zieht man nun von jeder Zahl 1 ab, so erhält man ein magisches Quadrat aus den ersten 9 ungeraden Zahlen mit der magischen Summe 30 – 3 = 27. (Folie, ZB)
2.Beispiel : Zahlenmauern
Man kann Zahlenmauern addieren. Bei den folgenden Aufgaben hilft dies bei der Lösung:

5 Von einfachen zu schweren Zahlenmauern. Rechne und vergleiche.

6 Probiere.



3.Beispiel: Einmaleinsreihen
Addiert man geeignet die Zahlen der Dreier- und Viererreihe, so ergibt sich die Siebenerreihe. Es gibt eine Fülle weiterer Beispiele. In der Gesellschaft moderner Datenstrukturen werden diese Strukturen höherer Ordnung immer wichtiger, z.B. beim Operieren mit Tabellen. (Beispiele im Zahlenbuch und Handbuch produktiver Rechenübungen)

Die Grundideen der Geometrie

Die Entwicklung der Geometrie aus einfachen Ideen und Grundmustern heraus ist noch nicht so weit fortgeschritten wie in der Algebra. Dies hat mehrere Gründe:
1. Die Algebra hat mit der Arithmetik einen überaus starken Partner in der Grundschule.
2. Die Gewicht der Geometrie verringerte sich in den letzten Jahren in der Sekundarstufe, in der Grundschule musste sie sich dagegen erst noch etablieren. Auch in der Lehrerbildung verschwand die Geometrie immer mehr aus dem Studium zugunsten von Analysis I, II und III und der Linearen Algebra I und II. Viele Lehrer der Sekundarstufe beherrschen keine Geometrie.
3. Eine fachliche Grundlegung in der Geometrie ist sehr viel komplexer und schwieriger als in der Arithmetik und Algebra. Ein verbindliches inhaltliches Curriculum entwickelte sich erst langsam in den letzten Jahren.
4. Allerdings haben geometrische Spiele nach Froebel eine Tradition im Kindergarten.
(Folien aus den kleinen Formenbücher 1 und 2, insbesondere das Legespiel von Froebel)

Angeregt durch die Arithmetik und Algebra, deren Grundideen bereits im Kindergarten sichtbar sind, hat E. Wittmann Grundideen der Geometrie formuliert. Die geometrischen Inhalte des Kindergartens (Kleine Formenbücher) und der Grundschule(Zahlenbücher) lehnen sich an diese Grundideen an. So können sich diese stetig Schuljahr für Schuljahr entwickeln. Diese Ideen sind über die Sekundarstufen bis hin zur Universität fortsetzbar.

... Grundideen der Geometrie

1. Geometrische Formen und ihre Konstruktion

Der dreidimensionale Anschauungsraum wird von Formgebilden unterschiedlicher Dimension bevölkert (Punkten, Linien, Flächen und Körpern), die sich auf vielfältige Weise konstruktiv erzeugen lassen.

2. Operieren mit Formen

Geometrische Gebilde lassen sich bewegen (verschieben, drehen, spiegeln ...), verkleinern, vergrößern, zerlegen, überlagern ..., wodurch viele Beziehungen entstehen.

3. Koordinaten

Zur Lagebeschreibung von Punkten können auf Linien, Flächen und im Raum Koordinatensysteme eingeführt werden, welche die Grundlage für die analytische Geometrie und für die graphische Darstellung von Funktionen bilden.

4. Maße

Längen, Flächen, Volumina und Winkel lassen sich nach Vorgabe von Maßeinheiten messen. Aus vorgegebenen Maßen lassen sich andere nach verschiedenen Formeln berechnen (z. B. Inhaltsformeln).

5. Geometrische Gesetzmäßigkeiten und Muster

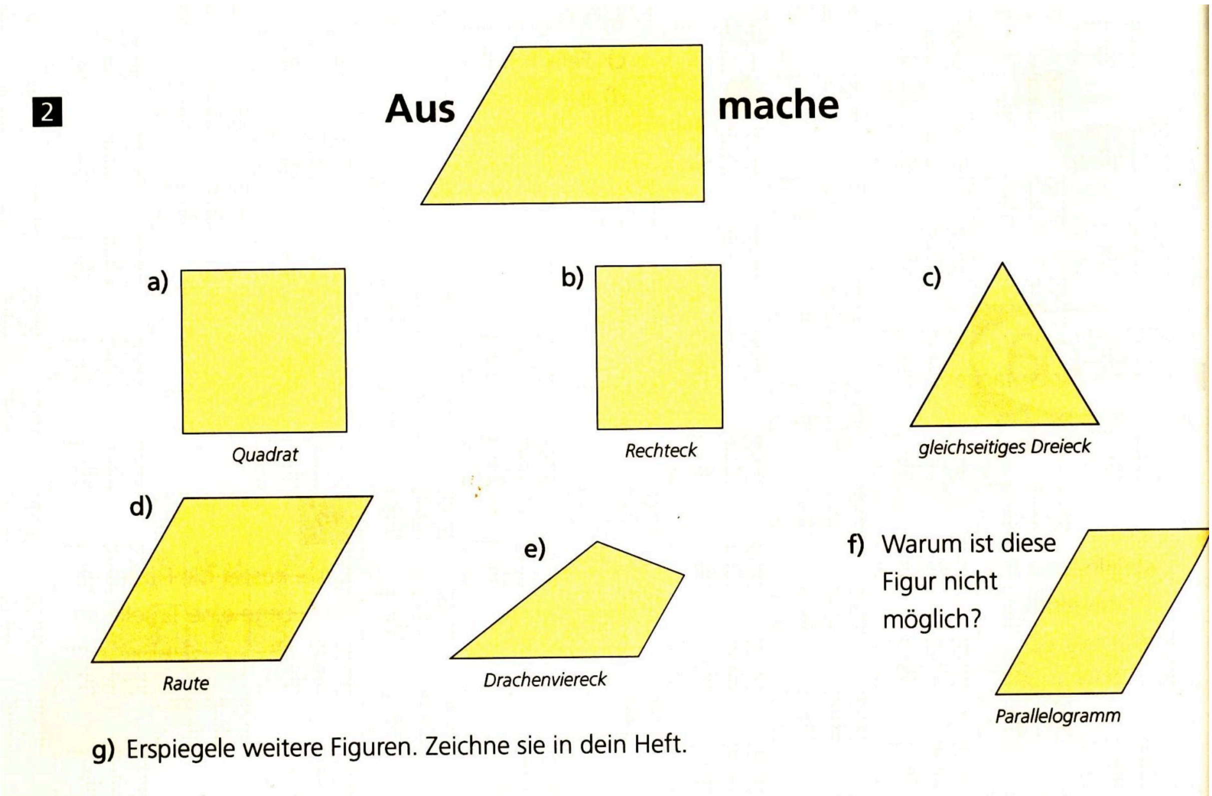
Geometrische Gebilde und ihre Maße können in vielfältiger Weise in Beziehung gesetzt werden, so dass Gesetzmäßigkeiten und Muster („Strukturen") entstehen, deren tiefere Zusammenhänge in geometrischen Theorien systematisch entwickelt werden (euklidische Geometrie der Ebene und des Raumes, kombinatorische Geometrie usw.).

---

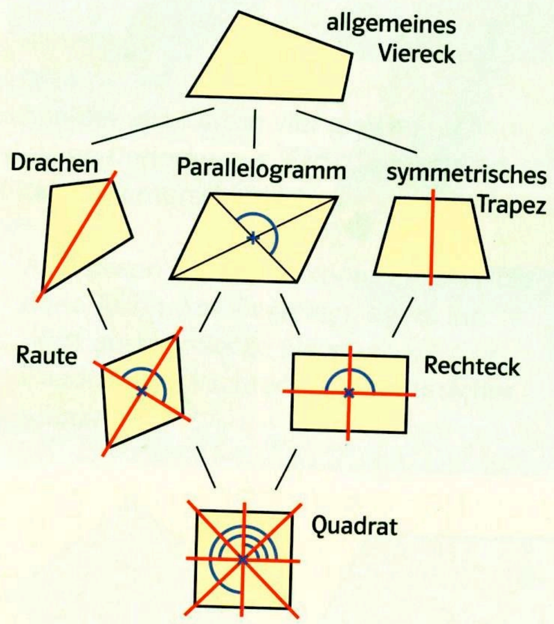
6. Formen in der Umwelt

Reale Gegenstände können mit Hilfe geometrischer Begriffe (angenähert) beschrieben werden. In der Technik werden Verfahren entwickelt um geometrische Formen herzustellen, die bestimmten Zwecken genügen. Künstler setzen geometrische Formen zur Weckung ästhetischer Empfindungen ein.

Ich möchte exemplarisch an wenigen Beispielen aufzeigen, Wie wir diese Ideen verwirklicht haben und wie sie sich über die Schuljahre hinweg entwickeln. Auf das Erspiegeln von Figuren in Bilderbüchern nach der Idee von Marion Walter (Vgl. Zahlenbuch und Kleines Formenbuch) als Einstieg gehe ich nicht weiter ein. Unten werden aus einem Viereck weitere Vierecke erspiegelt. Man vergleiche mit dem bekannten Haus der Vierecke aus einem Schulbuch (8.Schuljahr).
Kollege Wittmann ist ein exzellenter Kenner der Geometrie. Sein Ziel ist die Entwicklung eines Curriculums, bei dem vom 1.Schuljahr bis zum Abitur in jedem Schuljahr in irgendeiner Form (durch Formen Legen, Parkettieren, Falten, Zerlegen von geometrischen Formen,...) der Satz des Pythagoras vorkommt. Im Zahlenbuch haben wir dies verwirklicht.



Wenn man ein achsensymmetrisches Viereck an einer **Symmetrieachse** spiegelt, deckt da Spiegelbild das ursprüngliche Viereck genau zu. Manche Vierecke haben auch **Drehpunkte** mit **Symmetriewinkeln**. Dreht man das Viereck um einen Symmetriewinkel, deckt das gedrehte Viereck das ursprüngliche Viereck genau zu.



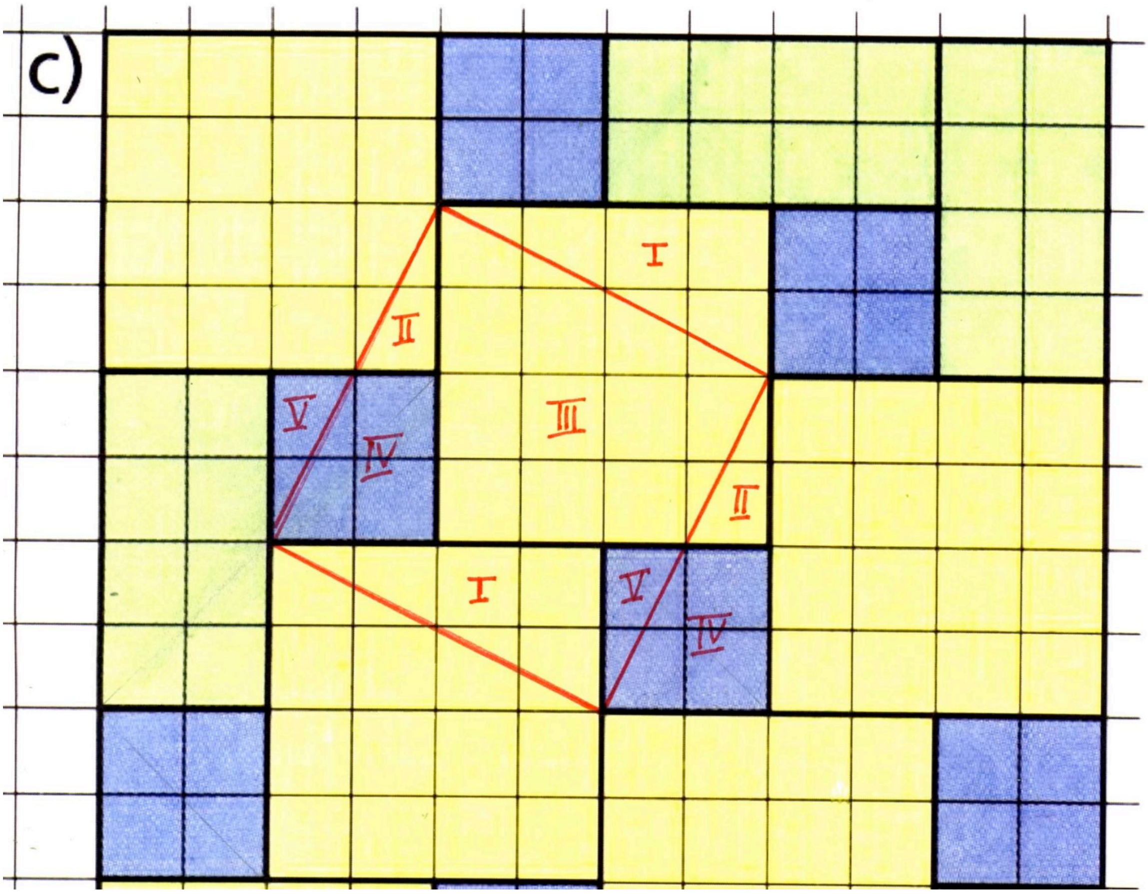
Vierecke mit Symmetrie heißen **besondere Vierecke**. Sie werden in das **Haus der Vierecke** einsortiert. Von oben nach unten kommen immer mehr Symmetrien hinzu.

Ganz oben steht das **allgemeine Viereck**. Es hat keine Symmetrie. Ganz unten steht das Quadrat. Es hat die meisten Symmetrien.

Das folgende Beispiel des Fliesens nennt man Fliesenmuster des Pythagoras. Im Zahlenbuch legen die Kinder dieses Fliesenmuster mit kleinen Quadraten nach. Ich habe durch einen Rotstift angedeutet wie sich hieraus mathematisch exakt der Satz des Pythagoras ergibt. Hierzu verbindet man die linken unteren Ecken der kleinen blauen Quadrate und erhält ein rot umrandetes größeres Quadrat.

Das große rot umrandete Quadrat hat die Teile I, II, III, IV und V, das kleine blaue Quadrat die Teile IV und V, das gelbe Quadrat die Teile I, II und III.

Wie in der Arithmetik ist die Zerlegung und Zusammenlegung von Figuren entscheidend für jedes weitere Verständnis. Im kleinen Zahlenbuch findet sich deshalb eine Fülle von Übungen zum Auslegen. Das „Passen“ oder „Fitting“ ist schon bei Freudenthal das Grundlegende in der Geometrie. Übrigens fanden Schulkinder folgende Fragestellung interessant: Ich wollte meine Garageneinfahrt nach dem Fliesenmuster des Pythagoras gestalten. Benötige ich mehr blaue oder mehr gelbe Fliesen?



Vom Lege- und Schiebespiel zum Hauptsatz der Spieltheorie

In der Grundschule üben wir die Inhalte der Logik und Kombinatorik hauptsächlich an Inhalten der Arithmetik und Geometrie. An einigen wenigen Beispielen haben wir jedoch Seiten mit eigenen Lerninhalten, wie z.B. die Datenstruktur des Baumes gesondert herausgestellt. Weniger bekannt sind auch die 10 Denkspiele in jedem einzelnen Schuljahr, die nur z.T. wie das NIM –Spiel auch im Zahlenbuch vorkommen.
Ich möchte Ihnen ein Strategiespiel (Klettern an einem Baum) vorstellen und dabei den Hauptsatz der Spieltheorie, den ich mit meinen Studenten immer bewiesen habe, erläutern. Wie bisher viele Interviews in Kindergärten erkennen schon Grundschulkinder vom Zielpunkt der Strategiespiele her Gewinn bzw. Verlustpositionen. In der Spieltheorie wird so bewiesen, dass es für Strategiespiele immer eine Gewinn- oder Pattstrategie geben muss.

Schlussbemerkungen

Ich hoffe, dass an den gezeigten Beispielen deutlich geworden ist, dass es möglich ist, Mathematik (Algebra (Arithmetik), Geometrie und Logik) verständnisvoll zu entwickeln.
Im Idealfall entwickeln sich aus nur wenigen fachlichen Grundmustern heraus weitere Muster und Regeln. Mathematik wird nicht nur gelernt sondern verstanden. Die wesentlichen Grundlagen zum Verständnis der Arithmetik, Algebra und Geometrie werden im Kindergarten und in der Grundschule gelegt. Insofern haben Lehrer- und Kindergärtnerinnen eine große Verantwortung. Ich möchte hierzu exemplarisch den 1.Satz im Vorwort „Modelle für den Mathematikunterricht der Grundschule“ verfasst von Mitgliedern der Association of Teachers of Mathematics (1967) anführen:

„Die mathematischen Erfahrungen, die ein Kind bis zu dem Alter von elf Jahren macht, sowie die Reaktionen, zu denen es durch seine Erfahrungen ermutigt wurde, bestimmen weitgehend seine mathematische Entwicklung. Man darf nicht länger glauben, das eigentliche Erlernender Mathematik beginne in den weiterführenden Schulen und die einzige Vorbereitung dafür sei ein gewisses Minimum an Rechenfähigkeit.“
Ich selbst sehe noch eine sehr große Kluft zwischen dem Mathematikunterricht der Grundschule und der Sekundarstufe, die sich aber hoffentlich immer mehr schließt. Gewisse Themen in der Mathematik wie z.B. Bruchzahlen, Satz des Pythagoras, Dreisatz,... sind so wichtig, dass sie wie in der Grundschule nicht nur in einen Schuljahr gelehrt und oft wieder vergessen, sondern in vielen Schuljahren gelernt und immer besser verstanden werden sollten. Die Isolierung der Themen in den einzelnen Schuljahren auf der Sekundarstufe sollte überwunden werden. Auch viele Themen der Grundschule (z.B. das Einmaleins unter algebraischem Aspekt) müssten besser fortgesetzt werden. Z.B. könnte man bei der Behandlung der binomischen Formeln auf das Einmaleins zurückgreifen, bei der Behandlung der quadratischen Ergänzung auf das Malkreuz, bei der Behandlung der Prozentrechnung auf das Hunderterfeld, usw.
Leider werden die Möglichkeiten, die moderner Mathematikunterricht der Grundschule (wie im Zahlenbuch) bietet, bisher in der Sekundarstufe nur ansatzweise benutzt,