

Dr. Daniela Götze (TU Dortmund):

## **Individuelle Förderung auch im Geometrieunterricht der Grundschule?**

## **Hans Freudenthal (1973)**

- Geometrie ist eine der großen Gelegenheiten, die Wirklichkeit mathematisieren zu lernen. Es ist eine Gelegenheit, Entdeckungen zu machen.
- Gewiß, man kann auch das Zahlenreich erforschen, man kann auch rechnend denken lernen, aber Entdeckungen, die man mit Augen und Händen macht, sind überzeugender und überraschender.
- Die Figuren im Raum sind, bis man sie entbehren kann, ein unersetzliches Hilfsmittel, die Forschung und Erfindung zu leiten.

(H. Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd.2, 1973, S.380.)

tu technische universität  
dortmund

## **Welche geometrischen Erfahrungen sollten Schülerinnen und Schüler machen?**

IEA  
Internationaler  
Erziehungswissenschaftlicher  
Kongress

„Handlungen aktivieren und  
auf Erfahrungen zurückgreifen“

Schülerinnen und Schüler müssen ausreichend Gelegenheit haben, an konkreten geometrischen Objekten zu experimentieren, sie selbst herzustellen und vor dem Hintergrund dieser handelnden Erfahrungen Begriffe zu bilden und Zusammenhänge zu entdecken.

Büchter, A.; Henn, W. (2008): Der Mathekoffer. Raum und Form. Lehrerkommentar, S. 2

20.09.08  
Symposium mathe2000

Dr. Daniela Götze  
(daniela.goetze@math.uni-dortmund.de)

3

tu technische universität  
dortmund

## **Wozu Geometrie?**

IEA  
Internationaler  
Erziehungswissenschaftlicher  
Kongress

Geometrisches und arithmetisches Denken stehen in einem engen wechselseitigen Zusammenhang. Daraus erklären sich u. a. manche spezifische Schwierigkeiten beim Mathematiklernen (...)

Die geometrischen Grundlagen (...) werden oft als selbstverständlich vorausgesetzt, wenn man meint, das Kind könne die gemeinte Beziehung doch wohl „sehen“.

→ Geometrie als Voraussetzung zum Verständnis arithmetische Kontext und Veranschaulichung

(Krauthausen, Scherer (2006): Einführung in die Mathematikdidaktik. S. 60)

20.09.08  
Symposium mathe2000

Dr. Daniela Götze  
(daniela.goetze@math.uni-dortmund.de)

4

## Dennoch große Skepsis

- zu materialaufwendig
- nicht kontrollierbar
- kaum Möglichkeiten zur Schulung prozessbezogener Kompetenzen
- kaum Ansätze für eine sinnvolle Differenzierung

## Dennoch große Skepsis

- Materialaufwand lohnt sich!
- gute schriftliche Aufgaben sind auch im Geometrieunterricht möglich
- es gibt vielfältige Ansätze zur Schulung prozessbezogener Kompetenzen – man muss sie nur sehen
- vielfältige Ansätze für einen individualisierten Unterricht

## Analysieren Sie Ihr Material im Hinblick auf folgende Fragestellungen:

1. Sind die Handlungen am Material auch im Kopf durchführbar? (Arbeit mit und ohne Material)
2. Gibt es Arbeitsaufträge, die auf einem leichten und auch auf einem komplexeren Niveau bearbeitbar sind?
3. Können einzelne Spielzüge bzw. Materialhandlungen leicht als ikonische Darstellung zu Papier gebracht und somit für Aufgabenstellungen genutzt werden?
4. Gibt es problemorientierte Ansätze für Sortierungen, systematische Analysen oder Vergleiche innerhalb des Materials?
5. Werden operative Handlungen am Material ermöglicht?
6. Können Forscherfragen zu einzelnen Aufgabenstellungen formuliert werden, die die Kinder verschriftlichen sollen?
7. Sehen Sie Möglichkeiten zur Strategieanalyse?

## Was Sie heute kennen lernen...

1. Spiegeltangram – Erfahrungen zur Achsensymmetrie
2. Mirakel – Spiegeln im Kopf und mit Köpfchen
3. Umspannwerk – Raumvorstellung spielerisch schulen

# Spiegeltangram

von Kordula Knapstein, Hartmut Spiegel, Bernadette Thöne



Zum *Spiegel-Tangram* gehört

- ein Spiegel mit Kunststofffüßen
- sieben geometrische Formen aus Holz (zwei grüne Dreiecke, drei blaue Dreiecke, ein blaues Quadrate, ein blaues Parallelogramm)
- zwölf verschiedene Kartensätze mit je 16 Karten
- eine Anleitung mit methodischen Hinweisen für den Unterricht

# Spiegeltangram

von Kordula Knapstein, Hartmut Spiegel, Bernadette Thöne



**Ziel ist es, ...**

die Formenplättchen (verschiedene Dreiecke, ein Quadrat und ein Parallelogramm) so vor einem Spiegel zu platzieren, dass die gelegte Figur zusammen mit der Figur im Spiegel das Bild auf einer Spielkarte ergibt.

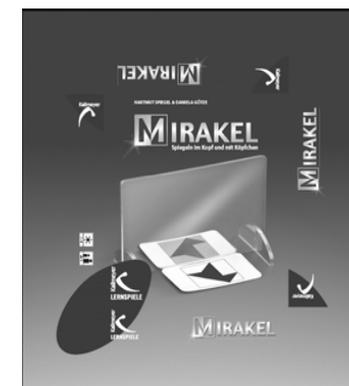
Je nach Kartensatz ist dies unterschiedlich leicht oder schwer.

→ Teile des Spiegeltangram gehören zum Bestandteil des „Mathekoffers“

# Spielerische Vertiefung

1. Jeder Spieler hat einen Spiegel und die entsprechenden Formen vor sich liegen
2. Die Karten werden verdeckt auf einem Stapel zwischen die Spieler gestellt
3. Eine Karte wird aufgedeckt
4. Wer sie zuerst erspiegelt hat, darf diese Karte behalten
5. Wer am Ende die meisten Karten gesammelt hat, hat gewonnen

# Mirakel – Spiegeln im Kopf und mit Köpfchen



## Der Mira-Spiegel

- ist ein halbdurchlässiger Spiegel
- er eignet sich nicht nur zur Prüfung von Symmetrie, sondern kann auch für ein neues Aufgabenformat benutzt werden, das die Fähigkeit fördert, sich Ergebnisse von Spiegelungen vorzustellen

## Hierzu haben wir Kartensätze entwickelt ...

Jeweils 12 zusammenpassen Kartenpaaren

- ➔ Legt man die eine Karte links neben den Mira-Spiegel, die andere Karte rechts davon, so ist im Spiegel zu sehen, dass sich das Spiegelbild der links liegenden Karte zusammen mit der rechts liegenden Karte zu einer Gesamtfigur ergänzt, z. B. einem Quadrat oder einem Sechseck

## Welche Spiel- und Aufgabenformate sind bei *Mirakel* möglich?

### Paare finden

Alle Karten des Kartensatzes oder ein Teil davon liegen auf dem Tisch. Wer am Zug ist, darf zwei Karten suchen, die ein Paar bilden.

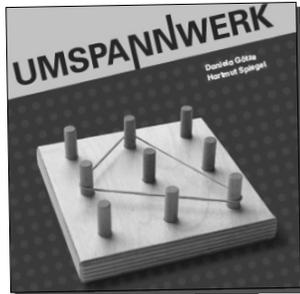
## Welche Spiel- und Aufgabenformate sind bei *Mirakel* möglich?

### Wer findet am schnellsten die passende Partnerkarte?

#### - „Einsacken“ -

Von jedem Kartenpaar wird eine Karte bei Seite auf einen Stapel gelegt. Dieser Stapel wird gemischt und umgedreht in die Mitte des Tisches platziert. Die übrigen Karten werden offen auf dem Tisch verteilt. Die oberste Karte des Stapels wird aufgedeckt. Die Mitspieler müssen nun möglichst schnell versuchen, die dazugehörige Karte auf dem Tisch zu finden. Wer meint, dass er eine gefunden hat, tippt mit dem Finger darauf. Wer meint, dass eine andere richtig ist, tippt auf diese. Wer zuerst auf die richtige getippt hat (das wird ggf. mit dem Spiegel überprüft) darf sich diese Karte einsacken. Wer am Ende die meisten Karten eingesackt hat, hat gewonnen.

# Umspannwerk



Das Spiel besteht aus:  
Geobrett, Gummibändern  
und 48 Spielkarten  
ausgewählter  
Dreiecke, Vierecke und  
Fünfecke!

ein Spiel auf dem 3x3 Geobrett  
von Hartmut Spiegel und Daniela Götze

## Bei den Spielkarten gilt:

Zueinander spiegelbildliche werden unterschieden.



Zueinander gedrehte oder verschobene aber nicht.



## Die Spielidee

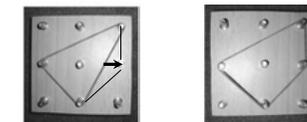
Man versucht, eine Spielkarte, die man auf der Hand hat, abzulegen.

Dazu muss man eine Figur, die schon auf dem Geobrett gespannt ist, so verändern, dass sie so aussieht, wie die Figur auf der Spielkarte.

Dabei dürfen höchstens zwei Umspannschritte gemacht werden.

## Erlaubte Umspannschritte sind:

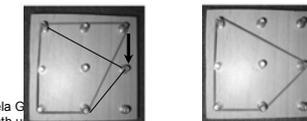
eine Ecke hinzunehmen



eine Ecke wegnehmen



eine Ecke versetzen



## Umspannwerk

### Verschiedene Spielvarianten

#### Variante 1:

Jeder Spieler bekommt eine bestimmte Anzahl Karten, z.B. fünf; eine Startkarte wird aufgedeckt; reihum wird eine Figur auf den Karten erzeugt und abgelegt (sofern möglich); wer zuerst alle Karten abgelegt hat, ist Gewinner.

#### Variante 2:

Wenn ein Spieler an der Reihe ist, muss er auf jeden Fall eine Karte ablegen. Das kann bedeuten, dass er auch mehr als zwei Umspannungen benötigt. Die Anzahl der gemachten Umspannungen wird mit Hilfe einer Strichliste oder mit Plättchen festgehalten. Gewonnen hat der, der die wenigsten Striche für sich hat verzeichnen können.

## Hinweis:

Anfänger dürfen bei Bedarf die Spielkarten bzw. das Geobrett drehen, Fortgeschrittene nicht .

## Spiegeltangram

von Kordula Knapstein, Hartmut Spiegel, Bernadette Thöne



## Die Kinder können dabei u. a. entdecken,

- dass nur eine Hälfte gelegt und die andere vom Spiegel erzeugt werden muss.
- jede Zielfigur (mindestens) eine Symmetrieachse hat.
- geometrische Formen zu neuen Formen zusammengesetzt werden können (z. B. kann aus zwei Dreiecken ein Quadrat entstehen).

## Schulung der räumlichen Vorstellungsvermögens

- durch die aktiv handelnde Auseinandersetzung mit dem Material erhalten die Schülerinnen und Schüler eine tragfähige Grundvorstellung des „Symmetrie“-Begriffs
- das „Hineinsehen“ von Teilfiguren in eine Gesamtfigur ist eine grundlegende Fähigkeit und wird in vielen anderen Bereichen der Mathematik *vorausgesetzt*

## Das Material bietet Ansätze für einen differenzierten Unterricht

- 12 differenzierte Kartensätze, die je nach Leistungsniveau systematisch probierend (operativ) aber auch direkt erspiegelt werden können.
- Einzel- oder Partnerarbeit möglich
- Ansätze für Differenzierungen innerhalb der Kartensätze

## Das Material bietet Ansätze für einen differenzierten Unterricht

Der Spiegel muss mal an einer Ecke mal an einer Kante der Legefigur angelegt werden.



Wird der Spiegel an einer Ecke angelegt, sticht die Legefigur deutlicher heraus als bei einer Karte, bei der der Spiegel an einer Kante angelegt wird.

→ Arbeitsaufträge für die Kinder:

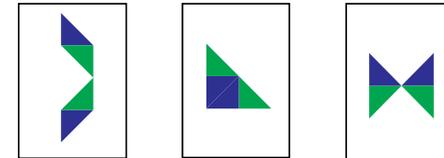
1. Verteile einen Kartensatz offen auf dem Tisch. Suche dir einige Karten heraus und versuche sie zu erspiegeln.
2. Sortiere den Kartensatz danach, ob der Spiegel an einer Ecke oder einer Kante der Legefigur angelegt werden muss.

## Das Material bietet Ansätze für einen differenzierten Unterricht

Die Karten sind so gestaltet, dass die Spiegelachse auf den Karten mal...

- waagrecht
- diagonal
- senkrecht

verläuft.

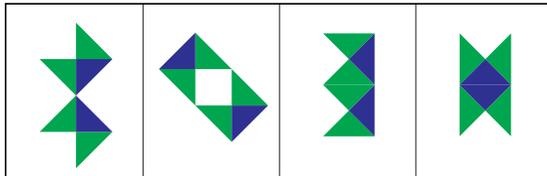


Meist ist es für Kinder schwerer, die Karten mit diagonalen Symmetrieachse zu erspiegeln.

- Arbeitsauftrag für leistungsstarke Kinder: Sortiert den Kartensatz danach, ob die Spiegelachse waagrecht, senkrecht oder diagonal zur Kartenkante verläuft.

## Das Material bietet Ansätze für einen differenzierten Unterricht

Zu ein und derselben Legefigur gibt es vier unterschiedliche Zielfiguren.



## Was noch möglich ist ...

- Einzelne Karten auf ein Arbeitsblatt kopieren. Bestimme die Symmetrieachse. Welche Formen brauchst du für diesen Kartensatz?
- Entwerfe einen eigenen Kartensatz für die Klassenkarte!
  - ohne Vorgaben
  - gemäß den Rahmenbedingungen der Originalkarten
- Finde Karten, die mehrere Symmetrieachsen haben!
- Suche dir eine Karte und schreibe einen Text für deine Mitschüler, wie du vorgehst, um diese Karte zu erspiegeln!
- „Reflexion“ aus ‚Räumliches Denken fördern‘ von Carniel, Knapstein, Spiegel

## Mirakel – Spiegeln im Kopf und mit Köpfchen



## Was die Kinder im Umgang mit Mirakel lernen können ...

In der Auseinandersetzung mit Mirakel können Kinder z. T. andere Dinge als in der Auseinandersetzung mit einem „normalen“ Spiegel lernen.

Sie können entdecken,

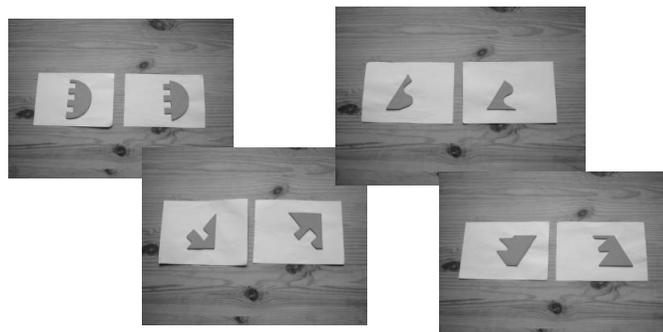
➔ dass eine Gesamtfigur in zwei Teilfiguren zerlegt wurde, wobei eine Teilfigur in gespiegelter Position auf der Karte abgebildet ist.

## Im Umgang mit dem Material lernen die Kinder, ...

- zwei Teilfiguren im Hinblick auf ähnliche Schnittkanten zu vergleichen
- zu einer vorgegebenen Karte das entsprechende „Negativ“ (=die dazu passende Karte) in gespiegelter Form zu erkennen
- sich Teilfiguren in gespiegelter Position vorzustellen
- bei zwei Teilfiguren eine davon gedanklich in die andere hineinzuspiegeln und mit der gesuchten Gesamtfigur zu vergleichen
- die in den Spiegel hineinprojizierte Teilfigur mit der hinter dem Spiegel liegenden Teilfigur als Gesamtfigur zu erkennen
- sich Teilfiguren auf den Karten um 180° gedreht vorzustellen bzw. zu erkennen, dass Karten manchmal in gedrehter Position liegen.

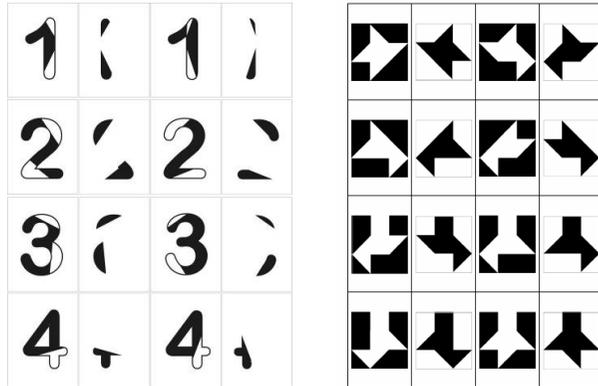
## Möglichkeiten der Differenzierung

1. Kartenmaterial zum „Anfassen“



## Möglichkeiten der Differenzierung

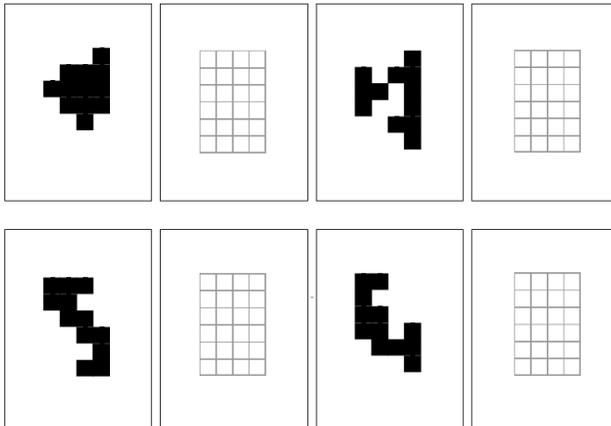
1. Kartenmaterial zum „Anfassen“
2. Differenzierung der Spielformate
  1. Paare finden kooperativ (zwei Kinder spielen gemeinsam gegen zwei andere Kinder oder mehrere Kinder versuchen gemeinsam, zueinander passende Paare zu finden)
  2. „Einsacken-light“
3. Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Kartensätzen, mit je eigenem Anspruchsniveau



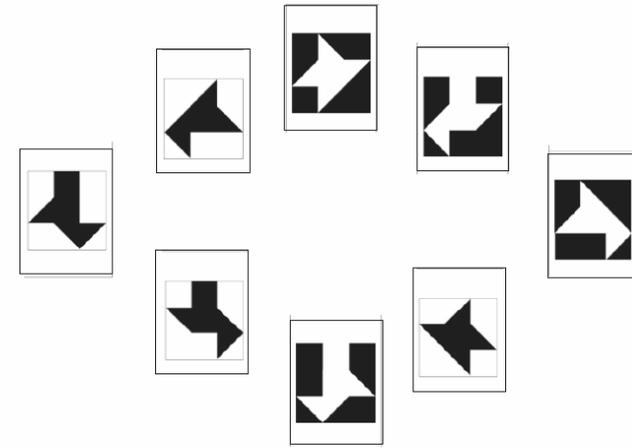
## Möglichkeiten der Differenzierung

1. Kartenmaterial zum „Anfassen“
2. Differenzierung der Spielformate
  1. Paare finden kooperativ (zwei Kinder spielen gemeinsam gegen zwei andere Kinder oder mehrere Kinder versuchen gemeinsam, zueinander passende Paare zu finden)
  2. „Einsacken-light“
3. Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Kartensätzen, mit je eigenem Anspruchsniveau
4. Anregung zur Reflexion von Spielstrategien
5. Auseinandersetzung mit Arbeitsaufträgen

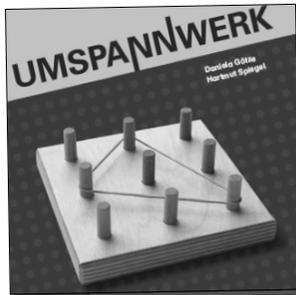
Zeichne die passende Partnerkarte.  
Du darfst auch den Spiegel zu Hilfe nehmen  
oder das Blatt drehen.



Immer zwei Karten bilden ein Paar.  
Verbinde die Karten, die zusammen gehören.



# Umspannwerk



ein Spiel auf dem 3x3 Geobrett  
von Hartmut Spiegel und Daniela Götze

# Die Kinder können dabei lernen, ...

- zueinander gedrehte Figuren als gleich zu erkennen
- von gespiegelten Figuren zu unterscheiden
- identische Figuren in anderer Position auf dem Brett wiederzufinden
- zwei Figuren miteinander zu vergleichen und Gemeinsamkeiten bzw. gemeinsame Strecken, Winkel und Ecken zwischen ihnen zu erkennen
- sich Figuren in einer anderen Lage (verschoben wie auch gedreht) auf dem Geobrett vorzustellen
- Umspannschritte zu antizipieren, d. h. sich vorzustellen, wie eine Figur nach einer Umspannung aussieht
- Fachsprache zu verwenden (rechter Winkel, Strecke, Ecke ...)
- Genaues Zeichnen

# Möglichkeiten der Differenzierung

1. Das Drehen des Geobretts und das probeweise Versetzen des Gummibandes wird erlaubt.
2. Unterschiedliche Spielvariante mit je eigenem Anspruchsniveau. Vier verschiedene Spielvarianten sind möglich.

# Möglichkeiten der Differenzierung

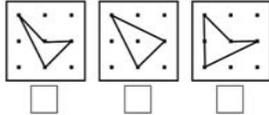
1. Das Drehen des Geobretts und das probeweise Versetzen des Gummibandes wird erlaubt.
2. Unterschiedliche Spielvariante mit je eigenem Anspruchsniveau (Mini-Umspannwerk)
3. Arbeitsblätter und Forscherfragen
4. Reflexion von Spielstrategien

## Arbeitsblätter und Forscherfragen

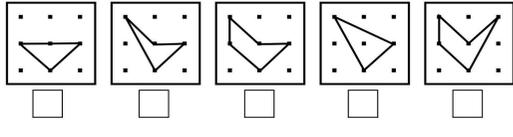
Name: \_\_\_\_\_

Du darfst von Karte zu Karte nur einmal umspannen.  
Wie kannst du die Karten nacheinander ablegen?  
Ordne und schreibe die Zahlen in die Kästchen.

①



②

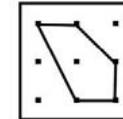
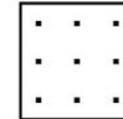
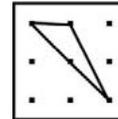
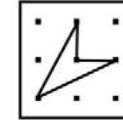
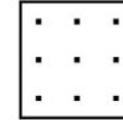
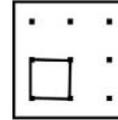
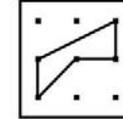
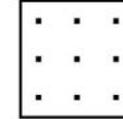
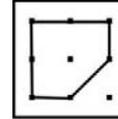


Du kannst aus der Figur auf Karte A die Figur der Karte B durch genau zwei Umspannungen erzeugen.  
Zeichne ein, wie der Zwischenschritt aussehen kann.

Karte A

Zwischenschritt

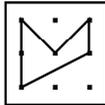
Karte B



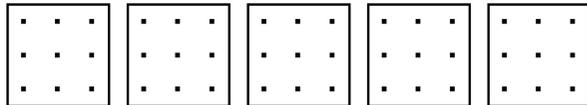
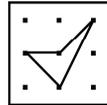
Name: \_\_\_\_\_

Wie viele Umspannungen brauchst du, um von der Figur auf der ersten Karte zur Figur der zweiten Karte zu kommen? Versuche dabei möglichst wenig Schritte zu machen. Zeichne deine Zwischenschritte ein!

①



②



[www.mathematik-grundschole.de](http://www.mathematik-grundschole.de)

[daniela.goetze@math.uni-dortmund.de](mailto:daniela.goetze@math.uni-dortmund.de)

**Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!**