Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit: Fachliche Argumente für individuelle Lern- und Lösungswege

Erich Ch. Wittmann, Technische Universität Dortmund, Projekt „mathe 2000“

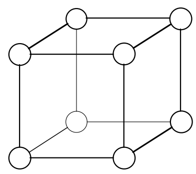
In der Diskussion über die Zukunft des Bildungssystems ist die individuelle Förderung aller Schülerinnen und Schüler heute eine zentrale Forderung. Wer die offiziellen Texte, z.B. das Schulgesetz von Nordrhein-Westfalen aufmerksam liest, wird feststellen, dass fast nur *pädagogisch* argumentiert wird. Zwischen den Zeilen schwingt die Sorge mit, die Lernenden könnten in der Auseinandersetzung mit den fachlichen Anforderungen auf der Strecke bleiben, wenn Lehrerinnen und Lehrer nicht permanent für individuelle Betreuung bereit stünden und jeweils maßgeschneiderte individuelle Angebot unterbreiten würden. Im Gefolge dieser Argumentation breiten sich Formen der Individualisierung aus, die hoch bedenklich sind: Klassen, in denen jedes Kind auf sich bezogen Themenhefte bearbeitet, sind bereits keine Seltenheit mehr.

Im Folgenden soll die einseitig pädagogische Sichtweise durch eine Sichtweise von Individualisierung relativiert werden, bei der das im „wohlverstandenen Fach“ liegende Potenzial für individuelle Lern- und Lösungswege zur Geltung kommen und ein bestimmter fachlicher Standard sichergestellt werden soll. Die Anforderungen an Lehrerinnen und Lehrer erscheinen mir dabei bedeutend geringer, die Erfolgschancen für die Lernenden höher. Kronzeuge für die Überlegungen ist John Dewey, einer der Erzväter von „mathe 2000“.

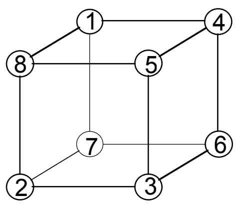
Individuelle Lösungen der „mathe 2000“-Weihnachtsaufgabe von 2007

Auf der Weihnachtskarte des Projekts „mathe 2000“ wurde im Dezember 2007 folgende Aufgabe gestellt:

> Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 sollen so auf die Ecken eines Würfels verteilt werden, dass die Summe der Zahlen an den Ecken jeder Seitenfläche einen festen Wert hat.
> Zusatz: Wie viele wesentlich verschiedene Lösungen gibt es?



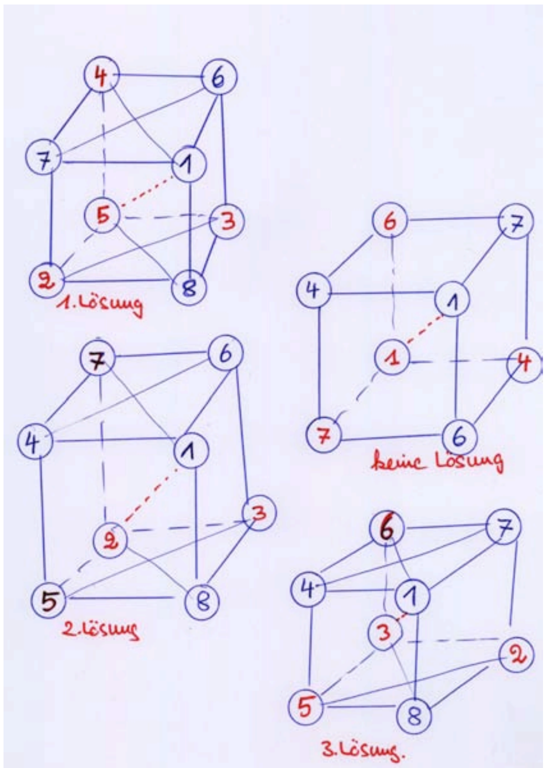
Diese Aufgabe wurde Anfang des Jahres 2007 von mir in Analogie zu magischen Quadraten formuliert, wobei ich zunächst nicht wusste, ob überhaupt eine Lösung existiert, was natürlich Voraussetzung für die Nutzung als Weihnachtsaufgabe war. Folgende Überlegungen führten zu einer Lösung: Wenn alle 8 Zahlen den Bedingungen der Aufgabe gemäß auf die Ecken verteilt sind, muss die Summe der vier Zahlen in den Ecken der vorderen Seitenfläche gleich der Summe der vier Zahlen der hinteren Seitenfläche sein. Zusammen ergeben die acht Zahlen 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36. Die Summe der vier vorderen und die Summe der vier hinteren Zahlen muss daher 36 : 2 = 18 sein. Die „magische Summe“ ist daher notwendig 18. Im ersten Schuljahr lernt man 18 zu halbieren (18 = 9 + 9) und 9 zu zerlegen in 8 + 1, 7 + 2, 5 + 4, 6 + 3. Wenn man die Ecken der von vorne nach hinten laufenden Kanten des Würfels links oben mit 8 und 1, links unten mit 7 und 2, links oben mit 6 und 4 sowie rechts unten mit 6 und 3 belegt, ist sicher gestellt, dass die vier Zahlen an der oberen, linken, unteren und rechten Seitenfläche des Würfels zusammen immer 18 ergeben. Welche Zahl jedes Pärchens hinten und welche vorne platziert wird, spielt dabei aber keine Rolle. Dadurch dass man 8, 2, 5 und 3 vorne platziert, erreicht man an allen Seitenflächen die magische Summe, denn 8 + 2 + 3 + 5 = 18 und 1 + 7 + 6 + 4 = 18.



8 + 7 + 2 + 1
8 + 6 + 3 + 1
8 + 5 + 4 + 1
8 + 5 + 3 + 2
7 + 6 + 4 + 1
7 + 6 + 3 + 2
7 + 5 + 4 + 2
6 + 5 + 4 + 3

Als dann im November 2007 die Weihnachtskarte fertig gestellt werden musste, befasste ich mich ein zweites Mal mit der Aufgabe um herauszufinden, *wie viele* verschiedene Lösungen es gibt. Dieses Mal ging ich anders vor. Ich suchte zuerst alle Zerlegungen der Zahl 18 in vier Summanden, die sich mit den Zahlen 1, 2, ..., 7, 8 bilden lassen (s. nebenstehenden Kasten). Für einen magischen Würfel benötigt man jeweils sechs dieser Zerlegungen. Die Zahlen 8 und 7 kommen aber nur in einer der Zerlegungen gemeinsam vor. Daraus folgt, dass 8 und 7 auf keinen Fall auf Nachbarecken, d.h. an den beiden Ecken einer Kante, platziert werden können, denn diese Kante gehört zu zwei Seitenflächen. Auch die Zahlen 8 und 4 kommen nur in einer Zerlegung vor, d.h. auch 8 und 4 können nicht auf Nachbarecken platziert werden. Als Nachbarn von 8 kommen also höchstens 1, 2, 3 und 5 in Frage. Eine Untersuchung dieser Fälle führte mich auf zwei Lösungen, die ich meinem Kollegen Gerhard Müller zur Prüfung übersandte. Einen Tag später erhielt ich von ihm folgende e-mail:

Lieber Erich,
ich habe mit meiner Methode d r e i wesentlich verschiedene Lösungen deiner schönen Aufgabe gefunden. Es geht darum, die Zahlen 1 bis 8 so auf die Ecken eines Würfels zu verteilen, dass die Summe der vier Zahlen an einer Quadratfläche gleich ist.
Diese Summe muss 18, die Hälfte von 36 sein.
Ich habe die Lösungen folgendermaßen gefunden: Ich schreibe alle zugelassenen Viererzerlegungen von 18 mit der Zahl 1 auf:
1+ 2 + 7 + 8 = 18, 1 + 3 + 6 + 8 = 18, 1 + 4 + 6 + 7 = 18 , 1 + 4 + 5 + 8 = 18.
Hier liegt das Geheimnis vergraben. Ich drehe bei dem Würfel die Ecke mit der Zahl 1 zu mir: Für die 3 benachbarten (mit Kante verbundenen Ecken) kommen nur die mindest doppelt vorkommenden Zahlen 4, 6, 7 und 8 in Betracht.
Man erhält dann folgende Lösungen:
Benachbarte Ecken der Ecke 1 seien 7, 6 und 8. Dies liefert die anliegenden Flächen: 1 + 6 + 7 + 4 (Ecke 4), 1 + 6 + 8 + 3 (Ecke 3) und 1 + 7 + 8 + 2 (Ecke 2). Für die der 1 gegenüber liegende Ecke bleibt 5.
Der Ecke 1 benachbarte Ecken seien 6, 8 und 4. Weitere Ecken sind dann 1 + 6 + 4 + 7 = 18 (Ecke 7), 1+ 6 + 8 + 3 = 18 (Ecke 3) und 1 + 4 + 8 + 5 = 18 (Ecke 5). Für die der 1 gegenüber liegende Ecke bleibt 2.
Dieser Würfel erfüllt wieder die Bedingungen.
Benachbarte Ecken zu 1 seien 4, 7 und 8. Weitere Ecken sind dann 1 + 8 + 7 + 2 = 18 (Ecke 2), 1 + 4 + 7 + 6 = 18 (Ecke 6) und 1 + 4 + 8 + 5 = 18 (Ecke 4). Es bleibt für die gegenüber liegende Ecke die Zahl 3. Auch dieser Würfel ist eine Lösung.
Die letzte Möglichkeit ist die Kombination 4,6 und 7. Diese liefert keine Lösung, denn 1 + 6 + 7 + 4 = 18 (4 ist keine weitere Ecke). Die Ecke 8 muss also immer zur Ecke 1 benachbart sein.
Viele Grüße
Gerd



Ich habe daraufhin meine Überlegungen noch einmal überprüft und festgestellt, dass ich eine Möglichkeit übersehen hatte.

Wenige Tage nach Versenden der Weihnachtskarte traf die erste Lösung von außerhalb ein. Absender war Man Keung Siu, Professor für Mathematik an der Universität Hongkong und intimer Kenner der Elementarmathematik, mit dem ich seit vielen Jahren einen sehr interessanten Austausch habe.

Dear Erich,

as a Cantonese colloquial saying goes, my neck has been long stretched in awaiting your annual Weihnachtsaufgabe!

Let me tell you my first reaction in the problem solving process. I may have to check more carefully later. From what I have done this far, I get two solutions and, unless I made a careless slip in my checking, those are the only two solutions, namely, (8,1,4,5;2,7,6,3) and (8,1,4,5;3,6,7,2), where the first four numbers are on the top (going coounterclockwise), the last four numbers are on the bottom (going counterclockwise) and corresponding numbers are on the four vertical edges. Of course, I count as equivalent those labellings obtained from these by symmetries (plus mirror reflections) of the cube.
Naturally, I first computed the constant sum of each face, which comes to be (1+2+3+4+5+6+7+8)/2 = 18. Then I tried to find all possible choices of four numbers among 1 to 8 that would give the sum of 18. Fortunately, there are not that many, namely, A = (8,7,2,1), B = (8,6,3,1), C = (8,5,4,1), D = (8,5,3,2), E = (7,6,4,1), F = (7,6,3,2), G = (7,5,4,2), H = (6,5,4,3) .
Then, I drew a table (sort of like an incidence matrix in dealing with combinatorial designs or with finite geometries) with the columns labelled 1 to 8 and the rows labelled A to H, and a cell coloured black if and only if that row contains that number. To obtain a solution we need to delete two rows (to have the six faces) so that (i) each column has three black cells, and (ii) for any pair of columns the black cells match at most twice.
The first condition allowed me to eliminate at a glance almost all possibilities except three: delete A and H, or B and G, or D and E. The third possibility was ruled out by the second condition. The remaining two possibility yielded the two solutions.

Fröhliche Weihnachten!
Man Keung
December 14, 2007.

Als ich Man Keung Siu mitteilte, dass es drei Lösungen gäbe, erhielt ich postwendend einen Nachtrag:

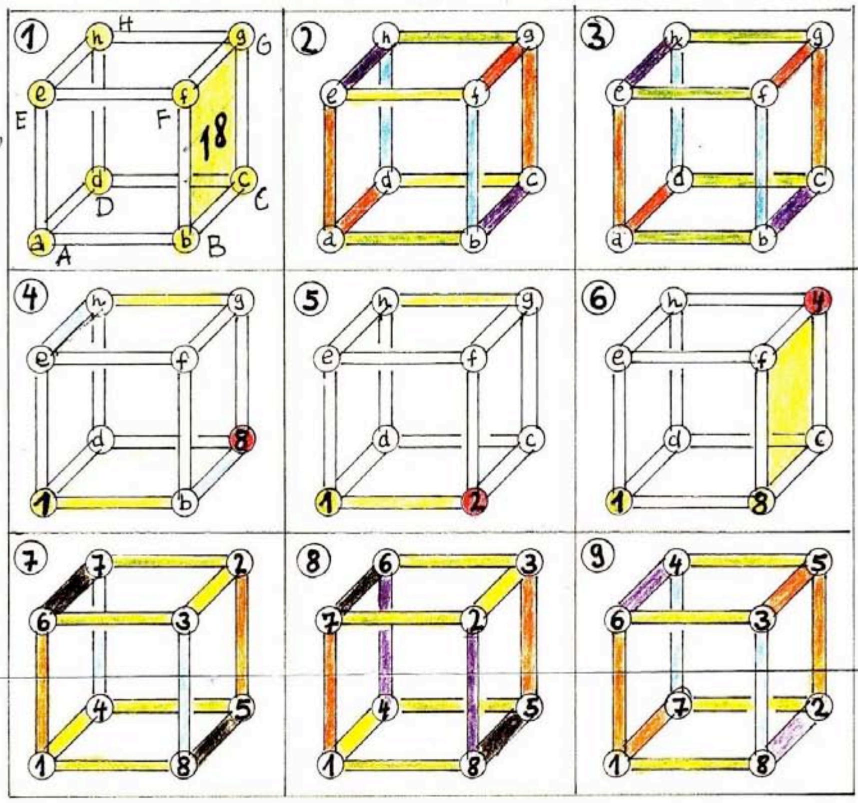
Dear Erich,
of course, I was careless and missed the case where C and F are to be deleted, which then leads to the third possibility (8,1,7,2;3,6,4,5) .
Man Keung
December 15, 2007.

Im Januar 2008 erhielt ich dann von Heinrich Winter die am weitesten ausgearbeitete elementarmathematische Analyse der Aufgabe, in der mehrere Sätze bewiesen und *sechs* Lösungen abgeleitet wurden. Ich erkannte schnell, dass Herr Winter, anders als die anderen Aufgabenlöser nur zwischen Lösungen unterschied, die sich nicht durch Drehungen in einander überführen lassen, also spiegelsymmetrische Lösungen nicht identifizierte. Aus dieser Analyse entwickelte er folgendes Poster:

Lieber Herr Wittmann, das soll so als Einstiegsthema auf mein Würfelposter, das der Fertigstellung entgegen geht. Herzliche Grüße Ihr Heinrich Winter

PS.: Email ist angekommen, danke. Den Termin Ihres Vortrags habe ich vorgemerkt.

Magischer Würfel



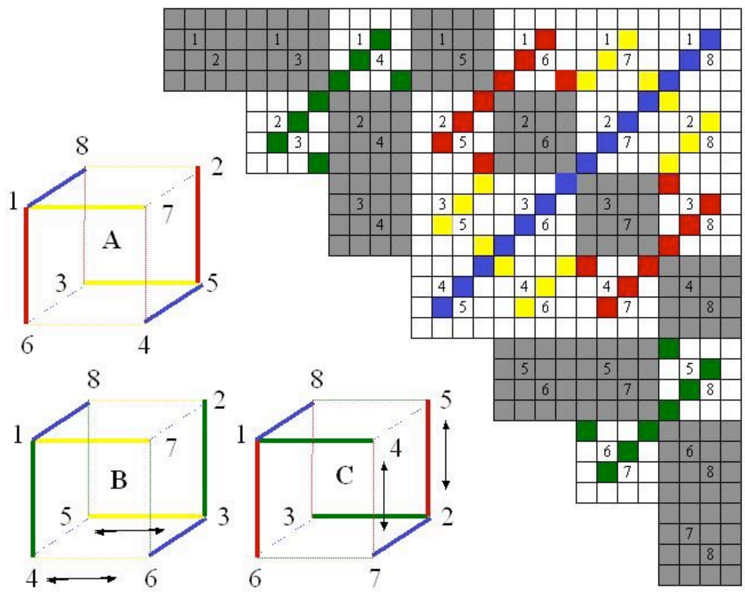
1. Keine Angst, es geht nicht um Zahlenmystik, vielmehr um die Lösung einer Aufgabe, in der in bezaubernder Weise geometrische und arithmetische Ideen verquickt sind:
   Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sollen so auf die Ecken eines Würfels verteilt werden, dass die Summe der Zahlen an den Ecken jeder Seitenfläche einen festen Wert hat.
   Zusatz: Wie viele verschiedene Lösungen gibt es?
   (Weihnachtsaufgabe 2007 des Mathe-2000-Projektes der Uni Dortmund)
   Wir können rückwärts arbeiten, also annehmen, wir hätten eine Lösung, um daraus Schlüsse zu ziehen. Dass dann der in der Aufgabe erwähnte feste Wert 18 sein muss, könnt ihr ausrechnen (Abb. 1). 18 heiße Flächenzahl.
2. Dass dann jede Kante dieselbe Kantenzahl (= Summe der beiden Eckenzahlen) hat wie ihre Gegenkante, ist leicht zu finden und zu begründen, z. B. ist $a + b = g + h$, weil ja $a + b + e + f = g + h + e + f = 18$ ist (Abb. 2).
3. Aus 1. und 2. kann man folgern, dass 4 zueinander parallele Kanten die Kantenzahl 9 haben und nur diese, wenn eine von ihnen diese Kantenzahl hat (Abb. 3).
4. In den Abbildungen 4, 5, und 6 sind weitere Folgerungen aus den vorausgehenden Sätzen angedeutet, die für die Konstruktion der Lösungen wichtig sind, in Abb. 4 z. B.: Ist $a = 1$, dann kommen für 8 nur die Nachbarecken von A in Frage. Arbeitet das genauer durch.
5. Zur Konstruktion der Lösungen suchen wir zunächst alle 8 Möglichkeiten, die Zahl 18 als Summe von 4 Zahlen aus dem Repertoire von 1 bis 8 zu schreiben. Daraus kann man 4 Paare bilden und bezüglich Kantenzahl 9 zwei Sorten bilden. Ein Resultat sind die 3 Lösungen in den Abbildungen 7, 8 und 9. Es gibt aber noch 3 Lösungen!

Am Rande des Klett-Grundschultags in Hannover im Februar 2008 erzählte mir dann Wolf-Rüdiger Rink, SINUS-Aktivist aus Osnabrück, wie er eine Lösung gefunden hatte: Es war ihm sofort klar, dass die magische Summe 36 : 2 = 18 sein musste. Er verteilte zunächst die 8 Zahlen zunächst irgendwie auf die acht Ecken und rechnete die Seitensummen aus. Von einer Seitenfläche, an der die Summe größer als 18 war, nahm er dann eine größere Zahl weg und vertauschte sie mit einer kleineren Zahl bei einer Seitenfläche, an der die Summe kleiner als 18 war. Nach einigen Vertauschungen hatte er eine Lösung, die ihm genügte.

Im August 2008 traf ich in Bochum bei einer Party Herrn Helmut Noesselt, der auf meine Bitte hin seinen Lösungsweg schriftlich formulierte:

Sehr geehrter Herr Professor Wittmann,
wie vor kurzem auf der Feier bei Frau Wieghardt angedeutet habe ich mir Gedanken zur Lösung Ihrer Weihnachts- Würfel-Aufgabe gemacht und diese jetzt auch einmal zu Papier gebracht in Form einer zweiteiligen Grafik:

Teil 1:



Die Rastergrafik zeigt alle Zweier-Kombinationen für die Ziffern 1 bis 8 (ohne gleichziffrige Paare). Die dunkelgrau hinterlegten Paare sind für die Lösung irrelevant, weil sie folgende Bedingungen nicht erfüllen:
An jede Würfelkante grenzen zwei Würfelflächen.
Da für jede Würfelfläche gilt: die Summe der Ziffern, die den vier Ecken zugeordnet sind, muss 18 sein (die Summe der Ziffern 1 bis 8 ist 36 – da zwei gegenüberliegende Flächen alle acht Würfelecken enthalten und die Summe für alle Flächen gleich sein soll, ergibt sich pro Fläche die Hälfte der Gesamtsumme), muss es also mindestens zwei Paare geben, von denen jedes mit dem Ausgangspaar die Summe 18 bildet.
Darüber hinaus muss es wenigstens ein weiteres Paar geben, das die gleiche Summe hat wie das Ausgangspaar.
Die Grafik zeigt vier farblich gekennzeichnete Gruppen, von denen jede die vier Paare von Ziffern repräsentieren, die jeweils den vier zueinander parallelen Würfelkanten zugeordnet sind.
Jeweils drei dieser Gruppen gehören zu einer Würfel-Lösung.
Lösung 1: blau, gelb, rot

Lösung 2: blau, gelb, grün und
Lösung 3: blau, rot, grün
<u>Teil 2:</u>
Die acht Ecken des Würfels lassen sich über zwei „Dreibeine“ oder Pyramiden definieren, deren jeweilige Spitzen identisch sind mit den Endpunkten einer der drei Raumdiagonalen. Wenn man eine der beiden Pyramiden mit drei Ziffernpaaren belegt (aus der Menge der relevanten) sind für drei Würfelflächen bereits drei Zuordnungen erfolgt, die vierte ergibt sich aus der Summe 18. Damit sind sieben Zuordnungen getroffen; die achte ergibt sich automatisch aus der übrig bleibenden Ziffer.
Die drei Lösungen ergeben sich, in dem man das vierte Ziffernpaar mit dem 2. bzw. dem 3. vertauscht. Zu jeder Ziffer gibt es genau vier (relevante) Ziffernpaare (s. Rastergrafik).

Ich hoffe, es waren nicht allzu viele (umständliche) Worte und sie waren darüber hinaus verständlich und ohne Denkfehler!?
Herzliche Grüße
Helmut Noesselt

Aus diesen verschiedenartigen Lösungen kann man folgenden Schluss ziehen:

Gerhard, Man Keung, Heinrich, Wolf-Rüdiger, Helmut und Erich „rechnen jeweils anders“. Erich überlegt anders, als er vor einem Jahr überlegt hat. Helmut überlegt anders, als es Mathematiker vermuten.

Diese Schlussfolgerung ist keinesfalls ein Widerspruch zu den Befunden über die Besonderheiten von Kindern beim Finden von Rechenwegen (s. Selter/Spiegel 1997, S. 10-17), zu denen im Projekt KIRA gerade noch weitere eindrucksvolle Dokumente gesammelt werden, denn: Gerhard, Man Keung, Heinrich, Wolf-Rüdiger, Helmut und Erich sind insofern Kinder geblieben, als sie sich das für Kinder typische unbefangene Herangehen an Aufgaben unter Nutzung der zur Verfügung stehenden individuellen Mittel bewahrt haben – im Gegensatz zu der großen Mehrheit der Erwachsenen, denen diese Eigenschaften abhanden gekommen sind. Natürlich unterscheiden sich die „Eigenproduktionen“ dieser erwachsenen Kinder von den spontanen Eigenproduktionen von Schulkindern (s. weiter unten).

Die Befreiung von didaktischen Zwängen

Problematisch ist nicht nur, dass Kinder „anders“ rechnen und dass viele Lehrerinnen und Lehrer das nicht wahrnehmen und nutzen, problematisch ist vor allem, dass ältere Kinder, Jugendliche und Erwachsene nicht mehr „anders“ rechnen, weil ihnen der eigenständige Zugang zur Lösung von Aufgaben im Laufe der Schulzeit mehr und mehr abhanden kommt bzw. abhanden gekommen ist. Die Fixierung deutscher Schülerinnen und Schüler auf Routine-Lösungen ist eine der klaren Ergebnisse von PISA.
Renate Rasch hat bei ihrem Vortrag bei dem 17. Symposium „mathe 2000“ zwei in dieser Hinsicht sehr lehrreiche Videodokumente gezeigt:
Auf dem ersten Clip war eine Erstklässerin zu sehen, die sich ganz unbefangen mit folgender Aufgabe auseinander setzte und sie mit Hilfe von Material (Holzwürfelchen) löste.
Max und Jan haben zusammen 10 Sammelbilder. Max hat vier mehr als Jan. Wie viele Sammelbilder hat Max, wie viele hat Jan?

Auf dem zweiten Clip wurde einer Viertklässlerin, die in Mathematik eine sehr gute Schülerin ist, folgende strukturell analoge Aufgabe gestellt:

Tim und Paul haben zusammen 30 Legosteine. Tim hat 6 mehr als Paul. Wie viele hat Tim, wie viele hat Paul?

Bereits die erste Reaktion „Oh, das ist eine Knobelaufgabe“ zeigte die Befangenheit der Schülerin, die im Folgenden keinen Lösungsweg fand, weil sie im Unterricht offenbar nur gelernt hat, mit gegebenen Zahlen vorschriftsmäßig zu rechnen.

In seinem Artikel „Zukunft der Wahrnehmung: Wahrnehmung der Zukunft“ nimmt H. von Foerster, einer der Pioniere des systemischen Denkens, in einem mit „Kastration“ überschriebenen Abschnitt Bezug auf eine Untersuchung des Psychologen George Miller aus dem Jahr 1967: In dieser Untersuchung wurden 9 – 10 jährigen Kindern und Erwachsenen 36 Wörter mit der Aufforderung vorgelegt, sinnvolle Gruppen zu bilden. Während die Erwachsenen nur blutleere, grammatikalische Gruppen bilden konnten, zeichneten sich die Gruppenbildungen der Kinder durch reichhaltige Sinnzusammenhänge aus. Von Foerster versteht diese Befunde als Indiz für einen falschen Unterricht.

Für den Mathematikunterricht lässt sich der vermutlich entscheidende Grund für den Verlust der bei Kindern ursprünglich vorhandenen aktiven Lerneinstellung klar benennen:
Es sind die Zwänge, die von Didaktikern im guten Glauben eingeführt wurden, damit würde den Lernenden das Lernen erleichtert. Ein Musterbeispiel für einen solchen didaktischen Zwang ist der traditionelle Zehnerübergang im Teilschrittverfahren (s. weiter unten).
Die Befreiung aus didaktischen Zwangsjacken ist eine alte Forderung, die unterschiedlich begründet wurde. Johannes Kühnel, ein anderer Erzvater von „mathe 2000“ spricht sich in seinem Buch „Lebensvoller Unterricht“ klar gegen Normalverfahren beim halbschriftlichen Rechnen aus. Er zeigt die Vielfalt von Rechenwegen eindrucksvoll auf (s. Kasten) und gibt

„Wer kriegt es heraus?“

38 + 45 =

a)	b)	c)	d)	
Fritz rechnet so:	Paul rechnet so:	Ernst rechnet so:	Max so:	
30 + 40 =	38 + 40 =	38 + 5 =	38 + 2 =	
8 + 5 =	+ 5 =	+ 40 =	+ 43 =	
70 + 13 =				
e)	**f)**	**g)**	**h)**	**i)**
Martha so!	Elfriede rechnet:	Kurt rechnet	Willi:	Walter
45 + 5 =	40 + 45 =	38 + 50 =	2 · 45 =	40 +40 =
+ 33 =	− 2 =	− 5 =	− 7 =	+ 3 =

47 + 58

a)	b)	c)
Fritz rechnet so:	Paul:	Ernst:
40 + 50 =	47 + 50 =	47 + 8 =
7 + 8 =	+ =	+ =
Wie geht es weiter?		
d)	**e)**	**f)**
Max:	Martha:	Elfriede:
47 + 3 =	58 + 2 =	47 + 60 =
+ =	+ =	− =
g)	**h)**	**i)**
Kurt:	Willi:	Walter:
50 + 58 =	50 + 60 =	50 + 50 =
− =	− =	+ =

dazu folgenden Kommentar:

Einfache Aufgaben sind hier auf 9 verschiedenen Lösungswegen gerechnet. Und dabei sind feinfühliger Weise nicht einmal alle Möglichkeiten erschöpft. Kindliche Entdecker können also noch eigene Wege finden. Es kann sich gewiss niemand dem Eindruck entziehen, dass auf diese Weise wahrhafte Geistesbildung betrieben wird, aber auch dem anderen, dass der alte Rechenunterricht von Geistesbildung weit entfernt war.
Fassen wir zusammen! Ein selbständiges Suchen, Finden und Verstehen mehrerer Lösungswege, das müssen wir an die Stelle der alten Normalverfahren setzen; es ist wirklich ein Zauberstab, dies Wörtchen: „Wer kann es anders?"

Seine Argumente für ein solches Vorgehen sind bildungstheoretischer und pädagogischer Art:

Das Normalverfahren wirkt daher entgegengesetzt der Richtung, die beabsichtigt war: es erzeugt keine mathematische Bildung, sondern ist Abrichtung, Dressur, die so lange anhält, als die Übung währt. Sobald diese eingestellt wird, verschwindet auch die Dressur, und Fortbildungsschüler und Volk sind Zeugen dafür, wie schnell sie entschwindet. Ein Rechenunterricht, der Normalverfahren anstrebt, ist also eine pädagogische Versündigung. Dazu kommen erzieherische Bedenken.

Als ein Beispiel für eine pädagogische Argumentation aus heutiger Zeit sei der Aufsatz „Das Recht der Kinder auf eigenes Denken" genannt. Hengartner bezieht sich dabei auf Hans Brügelmann, der in einem Aufsatz über offenen Unterricht folgende Position formulierte:

Kinder lernen
- *an für sie bedeutsamen Aufgaben*
- *auf individuellen Wegen*
- *selbständig*
- *durch aktives Entdecken*
- *von- und miteinander*
- *durch Verstehen*

Solchen pädagogischen Argumenten kann man natürlich nur zustimmen. Gleichwohl sind sie nicht ausreichend. Es könnte ja sein, dass die Festlegung von Rechenwegen zum Wesen der Mathematik gehört, was viele Menschen im Übrigen glauben. Der geforderte pädagogische Zugang würde dann dem Fach widersprechen, was hochproblematisch wäre. Aber genau dieser Widerspruch besteht nicht. Es ist das Verdienst von Heinrich Winter *mathematische Argumente* für die freie Wahl der Rechenwege in den Vordergrund gestellt zu haben. Winter ist es zu verdanken, dass das Prinzip des entdeckenden Lernens 1985 in den Jahrhundert-Lehrplan von Nordrhein-Westfalen aufgenommen wurde. In seinen Schriften und Büchern hat er dieses Prinzip zwar auch pädagogisch und psychologisch untermauert, aber in erster Linie aus der Mathematik selbst hergeleitet: Dieses Prinzip entspricht dem wahren Wesen der Mathematik, denn, wie es der große Mathematiker Georg Cantor (1845 – 1918) in der Grundlegung seiner Mengenlehre formuliert hat:

Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.

Die Mathematik beruht zwar auf Regeln. Die Anwendung dieser Regeln ist aber frei. Man kann sogar sagen, dass die Gewinnung mathematischer Erkenntnisse auf der fantasievollen Anwendung der Regeln beruht.

Aus dieser Tatsache ist folgender Schluss zu ziehen:

Die didaktischen Zwänge, die von Didaktikern fixiert und von Lehrerinnen und Lehrern nachvollzogen werden, beruhen weniger auf mangelndem psychologisch-didaktischem Verständnis für das Denken von Kindern und weniger auf mangelnder pädagogischer Sensibilität, sondern zu allererst auf mangelnder Einsicht in das wahre Wesen von Mathematik. Nicht nur das Lernen, sondern das Fach wird verfälscht, wenn die in der Mathematik wesenhaft gegebene Freiheit durch fachfremde Zwänge eingeschränkt wird. Wer das tut, hat nicht verstanden, was Mathematik ist.

Instruktiv ist in diesem Zusammenhang die Diskussion um den traditionellen Zehnerübergang. Im Band 1 des „Handbuchs produktiver Rechenübungen“ (Wittmann/Müller 1990) wurde erstmals *systematisch* herausgearbeitet, dass das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz beim additiven Rechnen frei angewandt werden dürfen. Es wurde darauf hingewiesen, dass das Feststehende nicht die Rechenwege, sondern die Rechengesetze sind. Von Seiten traditionell denkender Mathematikdidaktiker wurde diese Position damals kritisiert. Einer von ihnen bezeichnete die „Freigabe des Zehnerübergangs“ als „unverzeihlichen Fehler“, ein anderer kritisierte, mit dieser Freigabe würde auch das „zählende Rechnen“ legitimiert. Beide Äußerungen sind abwegig, denn es steht weder im Ermessen der Didaktiker, Rechenwege einzuschränken, noch sie freizugeben.

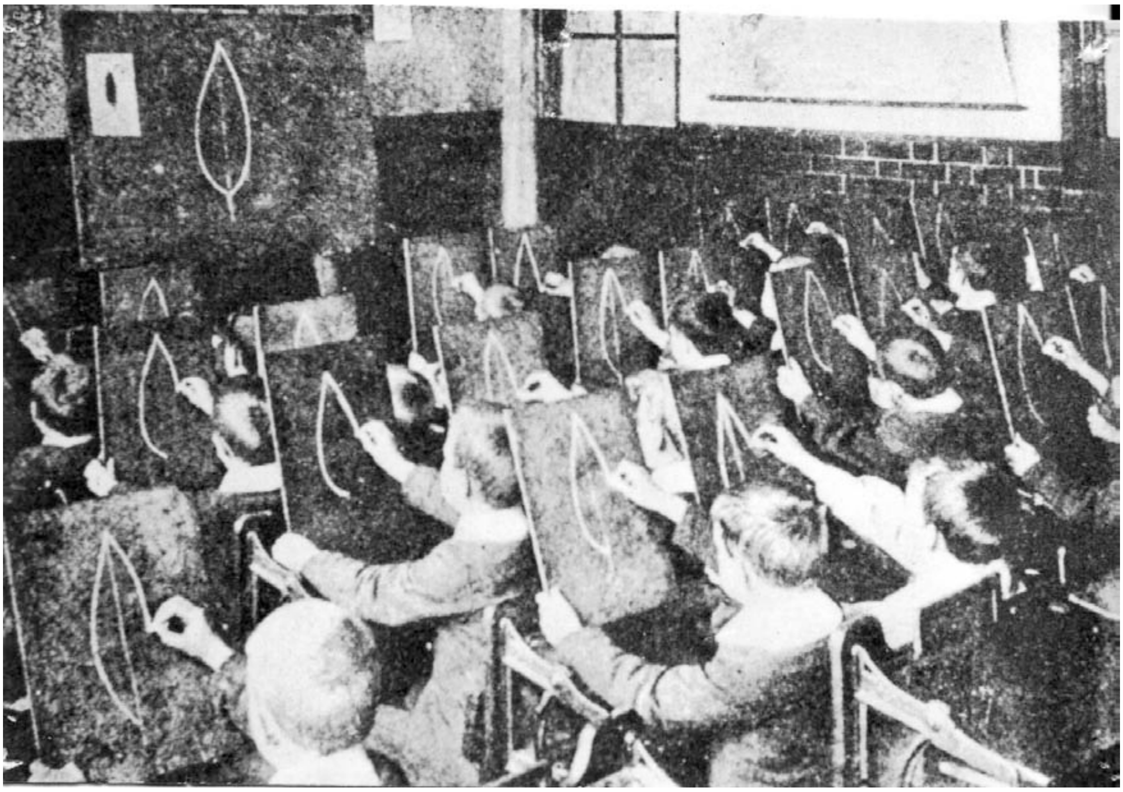
Offenheit vom Fach aus und Individualisierung

So sehr auf der einen Seite auf die wesenhafte Freiheit der Mathematik verwiesen werden muss, so sehr muss auf der anderen Seite betont werden, dass es sich dabei um keine unbegrenzte Freiheit handelt, sondern dass diese Freiheit durch fachliche Festlegungen begrenzt wird. Dabei handelt es sich um fachliche Strukturen, die im Laufe der Jahrhunderte herausgearbeitet wurden, um das Arbeiten mit der Mathematik zu erleichtern und auch um Konventionen im sprachlichen, zeichnerischen und symbolischen Ausdruck. Für die Lernenden ist diese fachliche Basis, wenn sie richtig genutzt wird, keineswegs eine Einengung, sondern ganz im Gegenteil eine hocheffiziente Hilfe für das Finden eigener Wege. Sie fördert zudem den sozialen Austausch. Man kann sogar sagen, dass der einzelne seine Möglichkeiten nur dann voll ausschöpfen kann, wenn er das fachliche Potenzial nutzt. Je weiter man in der Mathematik voranschreitet, desto aussichtsloser ist es, die Mathematik aus spontanen Eigenproduktionen zu entwickeln. Man stelle sich eine mathematische Vorlesung über irgendein Gebiet der höheren Mathematik vor, z.B. über algebraische Topologie. Da kann es nur darum gehen, die Studierenden zu einem möglichst selbständigen Umgang mit dem Stoff anzuregen (s. weiter unten „mathematisch fundierte Eigenproduktionen“).

Von John Dewey gibt es zu dieser Thematik zwei grundlegende Artikel. Ausgangspunkt für den Artikel *Individuality and Experience* von 1927 war ein überschwänglicher Bericht über die neuartige Mal- und Zeichenschule eines Professor Cizek in Wien. Um den Ansatz von Cizek richtig einschätzen zu können, muss man berücksichtigen, dass der Zeichen- und Malunterricht im 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts vor einer extrem klein- und gleichschrittigen Methodik beherrscht war. Die Kinder mussten auf Kommando auf einer Netztafel im Heft zuerst Grundelemente zeichnen (horizontale, vertikale und schräge Striche, Streckenzüge, Bögen, usw.) und wurden nur langsam an das Ab- und Nachzeichnen von Vorlagen herangeführt.
Wie dieser Unterricht ablief, ist folgendem Auszug aus einer Zeichenmethodik zu entnehmen (Heinze 1891):

Der Lehrer zeigt [auf einer Netztafel] verschiedene gefärbte Stäbchen von 5cm Länge und steckt eines auf die oben ganz links liegende Netzlinie. Er fragt „Welche Richtung hat das Stäbchen?“ Die Kinder antworten „Das Stäbchen ist senkrecht ausgerichtet.“. Dann fährt der Lehrer fort: „Nun wollen wir das Stäbchen zeichnen“. Er zieht von dem bezeichneten Netzpunkt aus eine Lotrechte bis an den nächsten Netzpunkt und sagt: „Nun sollt ihr den senkrechten Strich zeichnen!“
Zuvor Haltung des Körpers, der Arme,, des Bleistifts! Der Lehrer zeigt den Kindern die richtige Haltung des Hand beim Zeichnen der Senkrechten. Nun Kommando: „Hand mit Stift in die Höhe““ – „Stift lang. Finger gestreckt! – „Hand mit dem Stift herum!“ – „Setzt an!“ – Nachdem sich der Lehrer überzeugt hat, dass alle Kinder den richtigen Netzpunkt getroffen haben, kommandiert er: „Zeichnet!“

Auch das folgende Foto vermittelt einen lebhaften Eindruck des damaligen Zeichen- und Malunterrichts: Die Kinder zeichnen auf Kommando ein vorgezeichnetes Blatt ab.



In der Zeichen- und Malschule von Cizek waren im Gegensatz dazu alle Zwänge aufgehoben. Dreh- und Angelpunkt waren die spontanen Mal- und Zeichenaktivitäten der Kinder, in der heutigen Terminologie „ihre Eigenproduktionen“, die individuell gefördert wurden.
Solche neuen Zugänge zum Zeichnen und Malen, die es auch an anderen Orten gab, wurden damals als Befreiung der Kinder verstanden und gefeiert. Sie bildeten den Ausgangspunkt für die Reformpädagogik, die schließlich alle Fächer erfasste.
Auch der amerikanische Berichterstatter zeigte sich hingerissen von Ciseks Ansatz, was John Dewey zu einer Grundsatzkritik veranlasste. Dewey hält zunächst fest, dass aus der Schule von Cizek kein einziger bekannter Maler hervorgegangen sei, was er nicht verwunderlich findet, da die wirkliche Beherrschung irgendeiner Sache nach seiner Überzeugung nicht ohne angeleitetes Erlernen von Grundtechniken möglich ist. Bei seiner Argumentation stellt er einen interessanten Vergleich mit dem Erlernen des Schreiner-Handwerks an:

Die Befürworter individueller Lernprozesse argumentieren oft folgendermaßen:
Gebt den Kindern gewisse Materialien, Werkzeuge, Hilfsmittel und lasst sie damit nach ihren ganz individuellen Wünschen umgehen. Setzt den Kindern keine Ziele, gebt ihnen keine Verfahren vor. Sagt ihnen nicht, was sie tun sollen. Das wäre ein ungerechtfertigter Eingriff in ihre heilige kognitive Individualität, denn das Wesen der Individualität ist es gerade sich selbst die Zwecke und die Ziele zu setzen.

Dewey weist diese Argumentation in einer für ihn ungewöhnlichen Schärfe zurück:

Ein solcher Standpunkt ist wirklich töricht [stupid]. Denn wenn man ihn einnimmt, versucht man das Unmögliche, was immer töricht ist, und man missversteht die Bedingungen für selbständiges Denken. Es gibt viele Möglichkeiten auf Angebote und Aufgaben zu reagieren, und es ist so gut wie sicher, dass die eigenen Versuche ohne Anleitung erfahrener Lehrer sehr oft zufällig, sporadisch und ineffektiv sein werden.
Niemand würde bezweifeln, dass die persönliche Entwicklung in irgendeinem Lebensbereich durch die Nutzung der von anderen gesammelten Erfahrungen gefördert wird. Niemand würde z.B. ernsthaft vorschlagen, dass die Ausbildung von Schreinerlehrlingen beim Nullpunkt beginnt, d.h. ohne Wissen über Mechanik, den Gebrauch von Werkzeugen usw. Niemand käme auch auf die Idee, dass ein Schreiner, wenn er seinem Lehrling dieses Wissen vermittelt, den persönlichen Stil des Lehrlings einengen und seine individuelle Entwicklung behindern würde. ***Ein Lehrer hat dasselbe Recht und die dieselbe Pflicht seinen Schülern Hinweise zu geben wie ein Handwerksmeister seinen Lehrlingen*** *(Hervorhebung E.Ch.W.)... Um es kurz und bündig zu formulieren: Freiheit oder Individualität ist keine ursprüngliche Gabe und kein ursprünglicher Besitz. Es ist etwas, was man sich erarbeiten muss. Hinweise, wie man Kenntnisse und Fertigkeiten für bestimmte Aufgaben nutzt, sind unabdingbare Bedingungen dafür zu lernen, sein Wissen frei einzusetzen. Es liegt in der Natur der Sache, dass ein Lehrer diese Hinweise nur geben kann, wenn er die im betreffenden Wissensgebiet in der Vergangenheit gesammelten Erfahrungen würdigt.*

Eine ähnliche Position hat John Dewey bereits in seinem Artikel *The Child and the Curriculum* [Das Kind und die Fächer] von 1903 eingenommen, in dem es ihm ebenfalls um die Nutzung des in der Struktur jedes Faches liegenden Potenzials für das Lernen ging. Nach einer spannenden Gegenüberstellung zweier Positionen, „Pro Kind“ bzw. „Pro Fachdisziplin“, in Form eines fiktiven Gerichtsverfahrens zieht er einen sehr schönen Vergleich: er setzt das Lernen unter Nutzung der Fachstruktur in Beziehung zum Bereisen eines Landes unter Nutzung einer Karte:

Wir können zuerst sagen, was die Karte nicht ist. Die Karte ist kein Ersatz für die persönliche Erfahrung. Die Karte tritt nicht an die Stelle einer tatsächlichen Reise. Das logisch geordnete Material einer Wissenschaft, eines Wissenszweiges oder eines Faches ist kein Ersatz für individuelle Erfahrungen. Die mathematische Formel für einen frei fallenden Körper kann nicht den persönlichen Kontakt und die unmittelbare persönliche Erfahrung mit dem fallenden Gegenstand ersetzen. Aber die Karte als Zusammenfassung, als geordnete und methodische Sichtung früherer Erfahrungen, dient als Führer für zukünftige Unternehmungen; sie gibt Richtung, sie erleichtert die Kontrolle; sie spart Kräfte, indem sie nutzloses Wandern erspart und die Pfade zeigt, die am schnellsten und sichersten zu einem gewünschten Ergebnis führen. Durch die Karte kann jeder neue Reisende für seine eigene Reise den Nutzen aus den Ergebnissen der Forschung anderer ziehen. Wenn ihm nicht die Hilfe objektiver und verallgemeinerten Berichte der früheren Forschungen zur Verfügung stünde, müsste er den früher notwendigen Energie- und

Zeitaufwand erneut erbringen. Das, was wir eine Wissenschaft oder ein Fach nennen, bringt das Nettoergebnis der vergangenen Erfahrung in eine für die Zukunft am leichtesten zugängliche Form. Damit steht ein Kapital zur Verfügung, das sofort Zinsen trägt. Das Gedächtnis wird weniger belastet, weil die Erkenntnisse um ein gemeinsames Prinzip gruppiert werden, anstatt mit den Nebensächlichkeiten der ursprünglichen Entdeckung verbunden zu sein.

Zu dem Nutzen der Fachstruktur für individuelle Lernprozesse tritt noch ein anderer Vorteil: Mit der Fachstruktur verbunden sind auch Konventionen, die der sozialen Verständigung dienen. Wissen hat nur Sinn, wenn es sozial geteilt wird. Der Aspekt des sozialen Lernens wird bei den Bemühungen um Individualisierung leider oft vergessen, wenn das Wohl des einzelnen Kindes im Mittelpunkt der Bemühungen steht.

Aus diesen Überlegungen ist folgende Schlussfolgerung zu ziehen:
Die spontanen Eigenproduktionen von Kindern sind ein unverzichtbarer Einstieg in Lernprozesse, aber nicht mehr. Worauf hinarbeitet werden muss, sind „Eigenproduktionen" unter Nutzung des Fachwissens, d.h. **mathematisch fundierte Eigenproduktionen.** Die individuellen Lösungen der Weihnachtsaufgabe in Abschnitt 1 sind dafür typische Beispiele, die zeigen, wie individuelle Lösungswege durch fachliche Grundkenntnisse begünstigt bzw. sogar erst ermöglicht werden.

4. Ein Praxisbeispiel: Addition im ersten Schuljahr

Um deutlich zu machen, was die „Offenheit vom Fach aus" in der Praxis bedeutet, soll ein Beispiel etwas ausführlicher betrachtet werden. Es geht darum zu zeigen, dass es Rechengesetze gibt, in denen klare fachliche Festlegungen getroffen werden, dass diese Gesetze aber Spielräume lassen und verschiedene Rechenwege ermöglichen.

Der Addition liegen zwei Rechengesetze zugrunde:

Vertauschungsgesetz: $a + b = b + a$
Dieses Gesetz bedeutet: Die Reihenfolge spielt bei der Addition keine Rolle.

Verbindungsgesetz: $a + (b + c) = (a + b) + c$
Dieses Gesetz lässt sich auf drei Weisen deuten:

1. Jede Summe lässt sich durch Aufspaltung eines Summanden in Teilsummanden schrittweise berechnen.

allgemein	Beispiel
$a + b$*	$8 + 5$
$a + (b + c)$	$8 + (2 + 3)$
$(a + b)$	$8 + 2 = 10$
$(a + b) + c$	$10 + 3 = 13$

2. Wenn ein Summand um eine Zahl erhöht wird, erhöht sich die Summe um diese Zahl.

allgemein	Beispiel
$a + b$	$5 + 5$
$(a + b) + c$	$6 + 5 = 10 + 1 = 11$

3. Wenn ein Summand um eine Zahl erniedrigt und der andere um die gleiche Zahl erhöht wird, bleibt die Summe gleich (Gesetz von der Konstanz der Summe).

allgemein	Beispiel
a + b* a + (b + c) = (a + b) + c	5 + 5 = 10 5 + (1 + 4) = 10 (5 + 1) + 4 = 10 6 + 4 = 10

Das Kommutativ- und das Assoziativgesetz sind der feste Grund, auf dem das additive Rechnen ruht und auf dem sich der Unterricht bewegen muss. Die freie Anwendung der Gesetze gehört zum Wesen der Mathematik.

Natürlich kann man nicht am ersten Schultag vor die Klasse treten und diese Gesetze formal an die Tafel schreiben, sondern man muss ihre Bedeutung handelnd, „operativ", wie man sagt, kommunizieren. Das hierfür am besten geeignete Material sind Plättchen. Im Abschnitt 4.1. des Buches „Arithmetik als Prozess" (Müller, Steinbring und Wittmann 2004) ist ausgeführt, wie man damit die Rechengesetze begründen kann. Grundlage ist ein fundamentales Invarianzprinzip: Die Anzahl von Plättchen bleibt unverändert, wenn nur ihre Lage verändert wird.

Für die Praxis stellt sich dies folgendermaßen dar: Zahlen werden durch Plättchenmengen dargestellt, die Summenbildung ist die Zusammenfassung der Mengen zu einem Ganzen. Die beiden Gesetze besagen, dass die Mengen beliebig zerlegt und die Teile in beliebiger Reihenfolge zusammengefasst werden dürfen.
Natürlich wird nicht blind zerlegt und zusammengefasst, sondern ökonomisch: Man verändert beim Addieren die Summanden so, dass die Struktur des Zehnersystems vorteilhaft genutzt werden kann, wie die Beispiele oben zeigen. Eine wesentliche Hilfe für das Finden vorteilhaften Wege sind geeignete Darstellungen der dekadischen Struktur. Für das Rechnen im 1. Schuljahr gibt es dafür nichts Besseres als das Zwanzigerfeld. Am Zwanzigerfeld kann man mit den Kindern schön erarbeiten, welche Aufgaben (im dekadischen System) einfach sind und wie man sich aus einfachen Aufgaben schwierigere erschließen kann.
Im Zahlenbuch wird dieser Weg systematisch beschritten, wie am Band 1, S. 48 ff. ersichtlich ist: Die Kinder versuchen sich zuerst selbst an Einspluseinsaufgaben (s. Hinweise im Lehrerband unter „Vor der Arbeit mit dem Buch"), vergleichen dann ihre eigenen Versuche mit den Rechnungen der Kinder auf S. 48. Bei diesen Rechnungen handelt es sich weder um Muster- noch um Beispiellösungen, sondern um genau die Rechenwege, bei denen das dekadische System sinnvoll genutzt wird. Daran sollen sich die Kinder orientieren. In der Besprechung der Lösungswege mit den Kindern sollte deutlich werden, dass alle Wege einzig und allein auf dem Zerlegen und Neuzusammenfassen der Zahlen beruhen.
Die Beziehung zwischen einfachen und schwierigen Aufgaben wird im Zusammenhang mit der **Einspluseinstafel** weiter thematisiert, die in unserem Konzept ein weiteres wesentliches Element des fachlichen Rahmens ist. Sie dient den Kindern als eine Art „Landkarte" bei ihren Reisen in die Welt des Einmaleins.

Natürliche Differenzierung im fachlich gerahmten Unterricht

Wie das Beispiel zeigt, beruht der „offene Unterricht vom Fach aus“ auf einer **für alle Kinder gemeinsamen fachlichen Grundlage, die in der Natur der Mathematik liegt.** Lehrerinnen und Lehrer müssen die unterschiedlichen Vorkenntnisse der Kinder auf jeden Fall nutzen, aber sie werden nicht vor die Aufgabe gestellt, jedes Kind im Weiteren auf seinem vermeintlich ganz persönlichen Weg zu begleiten, was sie in einer Klasse mit 25 oder mehr Kindern in einer womöglich noch altersgemischten Klasse gar nicht leisten könnten. Vielmehr ist es ihre Aufgabe, den Kindern im Lauf der Zeit die wenigen Rechengesetze und die dekadische Struktur des Zahlenraums mehr und mehr bewusst zu machen und dabei immer wieder aufzuzeigen, dass man die Gesetze frei anwenden darf. Das ist ein überschaubarer Auftrag. Wichtig ist, dass der Unterricht immer Bodenhaftung hat, d.h. dass immer ein Bezug zu den dekadischen Standarddarstellungen vorhanden ist. Jedes wichtige Thema muss in mehreren Durchgängen behandelt werden, damit kein Kind abgehängt wird.

Zur fachlichen Fundierung des Unterrichts gehört nach unseren Vorstellungen vor allem auch die bewusste Förderung von Basiskompetenzen. Es gibt in jedem Inhaltsbereich Wissenselemente und Fertigkeiten, die ständig benutzt werden und deren Beherrschung eine wesentliche Voraussetzung für erfolgreiches Mathematiklernen ist. **Wir sehen die Übung der Basiskompetenzen als allgemein verbindlichen Teil des Unterrichts an. Alle Kinder müssen sie lernen, so gut sie können.** Die Bedeutung der Basiskompetenzen wird leider weithin unterschätzt, was wir für ein großes Problem halten. Mit unserer Blitzrechenoffensive (s. Homepage www.uni-dortmund.de/mathe2000) haben wir einen weiteren Anlauf genommen, um Lehrerinnen und Lehrern, Kindern und Eltern den Blick für die Notwendigkeit zu öffnen, diese Kompetenzen stetig zu üben. In der begleitenden Schrift, die vom Klett-Verlag zusammen mit einem Poster bezogen werden kann, werden unsere Vorstellungen für die praktische Umsetzung genau ausgeführt. AnhängerInnen des offenen Unterrichts werde es paradox finden, dass die von allen Kindern gleichermaßen geübten Basiskompetenzen die individuelle Problemlösefähigkeit steigern sollen, aber genau das ist der Fall.
Was produktive Übungen anbelangt, muss die Einstiegsschwelle niedrig angesetzt werden, damit alle Kinder arbeiten und mitarbeiten können. Bei diesen Übungen kann sich die natürliche Differenzierung voll entfalten. Die Vielfalt der Lösungswege ist hier ungleich größer als bei grundlegenden Übungen.

In der Kognitionspsychologie wurden eindrucksvolle Belege dafür gesammelt, dass ein Unterricht mit einer klaren Fachstruktur gerade den schwachen Kindern am besten hilft. Auch schwache Kinder lernen Mathematik nur durch Mathematik, und zwar umso besser, je authentischer sie diesem Fach begegnen. In der Arbeit mit rechenschwachen Kindern wird man unter dem Druck, schnelle Erfolge erzielen zu müssen, leicht dazu verleitet, zu psychologisch-didaktischen Hilfskonstruktionen zu greifen. Auf Dauer ist das aber keine Lösung. Weit besser ist es, sich an die mathematischen Strukturen zu halten, auch wenn auf diese Weise keine schnellen Erfolge zu erzielen sind. Auch schwache Kinder müssen lernen die Freiheiten der Mathematik zu nutzen. Man muss bei der Arbeit mit diesen Kinder sehr aufpassen, dass man unter der Devise „Individualisierung“ und „Fördern“ nicht den traditionellen rezeptiven Unterricht wieder aufleben lässt.

Schlussbemerkung

Im möchte schließen mit einigen grundsätzlichen Überlegungen, die über das Fach Mathematik hinausgehen.
Im „kleinen Stowasser“, dem Wörterbuch, das wir im Lateinunterricht verwendet haben, werden folgende Bedeutungen des Wortes „disciplina“ unterschieden:

I. Unterweisung, Lehre, Unterricht; Bildung, Kenntnis, Wissen, Kunst; Methode, Lehrgang; System
II. Erziehung, Zucht, Kriegszucht, Manneszucht; Ordnung, Einrichtung, Gewohnheit; Staatsverfassung, Staatsordnung

Die erste Gruppe von Bedeutungen hat mit der Fachdisziplin zu tun, die zweite mit dem individuellen Verhalten und der Einordnung des Menschen in die Gesellschaft. In beiden Gruppen zeigt sich eine interessante Dualität: Die innere Ordnung im Menschen steht in Beziehung zu äußeren Ordnungen, einerseits den Strukturen der wissenschaftlichen und praktischen Disziplinen, andererseits der staatlichen Ordnung.

Alle Erfahrungen zeigen, dass in jedem Fach ein wohlverstandener fachlicher Rahmen für erfolgreiches Lernen notwendig und sehr hilfreich ist. Gleichzeitig wird gerade am Fach Mathematik deutlich, dass zum Lernen wesenhaft auch Freiheit gehört.

Es ist ein Grundproblem der menschlichen Existenz, dass sich Freiheit und Disziplin zu widersprechen scheinen. Ernst Friedrich Schumacher zeigt in seinem Buch „Rat für den Ratlosen“ sehr überzeugend, wie man bei einer übersteigerte Betonung von Disziplin im „Gefängnis“ und bei einer Überbetonung von Freiheit im „Tollhaus“ landet. Es muss daher ein Ausgleich zwischen den Forderungen nach Freiheit und Disziplin gefunden werden, wie ihn z.B. dem Mathematiker und Logiker Alfred N. Whitehead in seinen „Aims of Education“ (1935) vorgeschwebt hat:

> *Der Gegensatz zwischen Freiheit und Disziplin ist nicht so scharf, wie eine logische Analyse der Begriffe nahe legen könnte, denn der kindliche Geist ist ein sich entwickelnder Organismus. Das bedeutet einerseits, dass man ihm von außen keine Ideen aufzwingen kann, die ihm fremd sind, aber andererseits auch, dass systematisches Wissen der Nährboden für die kindliche Denkentwicklung ist. Daher muss es das Ziel einer ideal eingerichteten Erziehung sein, Freiheit mit Disziplin und Disziplin mit Freiheit zu verbinden.*

Immanuel Kant hat in seinen Vorlesungen über Pädagogik die Frage

Wie kultiviere ich die Freiheit bei dem Zwange?

als Hauptfrage der Pädagogik bezeichnet. Zu seiner Zeit waren fachliche Disziplin und Disziplin im Verhalten keine Frage. Er musste daher das Gewicht auf die Freiheit legen. Heute ist die Situation eine andere, und die Frage lautet wohl besser

Wie kultiviere ich die Disziplin bei der Beliebigkeit?

Ich plädiere für eine Rückkehr zur wohlverstandenen **Fachdisziplin**, nicht nur in der Mathematik, sondern auch in anderen Fächern, und natürlich auch für mehr Disziplin im Verhalten. Für alle Beteiligten, Kinder, Lehrerinnen, Lehrer und Eltern wäre das ein Segen.

Mit folgendem Ausschnitt aus einem Brief einer Freundin meiner Frau möchte ich schließen:

> *Vor einigen Tagen mussten wir unsere Enkeltochter Emma zwei Tage lang hüten. Das war sehr anstrengend. Wir waren froh, als wir wieder alleine waren. Als mein Mann und ich nach einiger Zeit des erschöpften Schweigens wieder redeten, wussten wir in puncto Emma die Vorzüge einer deutlich strengeren Erziehung zu schätzen.*

Literatur

Dewey, J.: The Child and the Curriculum. In: The Middle Works of John Dewey, 1899-1924, ed. by Jo Ann Boydston, vol. 2, Carbondale, Ill. 1976,71-291

Dewey, J.: Individuality and Experience: In: The Later Works of John Dewey, 1925-1927, ed. by Jo Ann Boydston, vol. 2, Carbondale, Ill. 1984,55-61

Heinze, W.: Lehrgang für den Zeichenunterricht in einfachen Schulverhältnissen. Dortmund: Crüwell 1891

Hengartner, E.: Für ein Recht der Kinder auf eigenes Denken. Neue Schulpraxis 1992, H. 7/8, S. 15 ff.

Kühnel, J.: Lebensvoller Rechenunterricht. Leipzig 1942

Schumacher, E.F.: Rat für Ratlose. Hamburg: Fischer TB 1979

Selter, Ch. & Spiegel, H.: Wie Kinder rechnen. Stuttgart: Klett 1997

Von Foerster, H.: Zukunft der Wahrnehmung: Wahrnehmung der Zukunft. In: ders. Sicht und Einsicht. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1985.

Whitehead, A.N.: The Aims of Education. London: Ernest Bennet Ltd. 1950

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett 1990.