

Symposium Mathe 2000

Herausfordern statt Beschäftigen

-

Förderung prozess- und inhaltsbezogener Kompetenzen am Beispiel der Umkehrzahlen

19. September 2009

Anne Westermann und Martin Reinold

Ablauf des Workshops

1. Vorstellung und Kurzinfo Projekt PIK AS

2. Auseinandersetzung mit den Qualitätsmerkmalen guter Lernaufgaben am Beispiel der „Umkehrzahlen“
 - Selbsterfahrungsprozess zum Kennen lernen des Aufgabenformats
 - Bezugnahme zu den inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen
 - Differenzierung nach Anforderungsbereichen
 - Vorstellung möglicher Variationen zur Aufgabenstellung

3. Bezug zum Umgang mit dem Schulbuch

Zielsetzungen

- Qualitätsmerkmale „guter Aufgaben“ kennen lernen
- Aufgaben hinsichtlich ihres Potenzials zur Förderung inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen analysieren können
- Teilaufgaben entsprechend der Vorgaben der Bildungsstandards unterschiedlichen Anforderungsbereichen zuordnen können
- Das Instrument der „Aufgabenvariation“ kennen lernen und anwenden können

Mathematikunterricht weiter entwickeln: PIK AS

- **PIK**
 - **P**rozess- und **i**nhaltsbezogene **K**ompetenzen:
Unterstützungsmaterialien für Fortbildung und Unterricht
- **AS**
 - **A**nregung von fachbezogener **S**chulentwicklung:
Unterstützung Schulentwicklung

Website



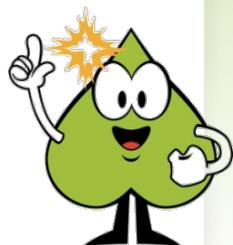
Ab Anfang November:
www.pikas.tu-dortmund.de

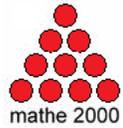
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Mathematische Bildung

Herausfordernde Lernangebote

Themenbezogene Individualisierung





Startaufgabe

Aktivität:

Minus-Aufgaben mit Umkehrzahlen

Wenn man die Ziffern einer Zahl vertauscht, erhält man ihre UMKEHRZAHL. Die Umkehrzahl von 85 ist 58.

Wählen Sie nun selbst eine zweistellige Zahl und bilden Sie die Umkehrzahl.

Ziehen Sie die kleinere von der größeren Zahl ab.

Schreiben Sie mindestens 12 weitere Aufgaben auf und rechnen Sie diese aus. Tauschen Sie sich darüber auf, was Ihnen auffällt.

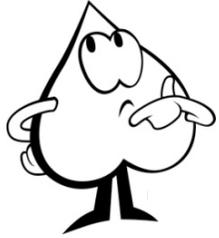
Übersicht Umkehrzahlen:

Subtraktion 2-stelliger Umkehrzahlen:

Übersicht zu den Ergebniszahlen: 9 unterschiedliche Ergebnisse (Vielfache von 9) / 45 Aufgaben

9	18	27	36	45	54	63	72	81
98-89	97-79	96-69	95-59	94-49	93-39	92-29	91-19	90-09
87-78	86-68	85-58	84-48	83-38	82-28	81-18	80-09	
76-67	75-57	74-47	73-37	72-27	71-17	70-07		
65-56	64-46	63-36	62-26	61-16	60-06			
54-45	53-35	52-25	51-15	50-05				
43-34	42-24	41-14	40-04					
32-23	31-13	30-03						
21-12	20-02							
10-01								

Startaufgabe



Umkehrzahlen - Startaufgabe

Wähle eine zweistellige Zahl. Schreibe ihre Umkehrzahl dazu.
Ziehe die kleinere von der größeren Zahl ab.

$$85 - 58 = \underline{\quad}$$

Rechne mindestens 10 weitere Aufgaben.

Was fällt dir bei den Ergebnissen auf?

Schreibe auf.

Startaufgabe

Die Ergebnisse sind : 9, 18, 54, 28, 0, 72, 63, 45, 34, 8, 28, 27,
 65 - 56 97 - 79 77 - 77 53 - 35 66 - 66 91 - 19
 81 - 18 67 - 76 57 - 15 21 - 12

Thomas

Mir ist aufgefallen das ich 2mal die Umkehraufgabe gefunden
 habe. Damit meine ich bei 2 Ergebnissen die sind einmal 54 und 45 und
 bei den anderen 36 und 63. Mir ist außerdem noch aufgefallen das
 2mal 27 und 2mal 9 rausgekommen ist. 2 Mal 18 auch.

Annika

Es kommen sehr viele 9 und ~~27~~ vor.

Anja

Startaufgabe

$$85 - 58 = 27$$

$$73 - 37 = 36$$

$$93 - 39 = 54$$

$$54 - 45 = 9$$

$$84 - 48 = 36$$

$$31 - 13 = 18$$

$$32 - 23 = 9$$

8

$$65 - 56 = 9$$

$$21 - 12 = 9$$

$$61 - 16 = 45$$

$$66 - 66 = 0$$

Das die meisten ergebnisse 9 ergeben.

Karla

Wenn man 2 nimm oder andere
zahlen die hinter einander sind
ergibt es neun, wenn welche einen
auseinander sind kommt 18
rausum so weiter sie auseinander
sind kommen immer 9 dazu

Moritz

Mir fällt gar nix auf.

Jonas

1. Qualitätsmerkmale für gute Aufgaben

Die Grundschule in NRW Neue Richtlinien und Lehrpläne 2008



Gute Lernaufgaben ...

- ... sind herausfordernd auf unterschiedlichem Anspruchsniveau.
- ... fordern und fördern inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen.
- ... knüpfen an Vorwissen an und bauen das strukturierte Wissen kumulativ auf.
- ... sind in sinnstiftende Kontexte eingebunden.
- ... sind vielfältig in den Lösungsstrategien und Darstellungsformen.
- ... stärken das Könnensbewusstsein durch erfolgreiches Bearbeiten.

Qualitätsmerkmale für gute Aufgaben

- Gute Aufgaben



... fordern und fördern inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen.

- ... sind herausfordernd auf unterschiedlichem Anspruchsniveau.
- ... knüpfen an Vorwissen an und bauen das strukturierte Wissen kumulativ auf.

2. Das Potenzial einer Aufgabe analysieren

Inhaltliche Kompetenzen

- Zahlen und Operationen:
 - Zahlenrechnen
 - Die Schülerinnen und Schüler lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 unter Ausnutzung von Rechengesetzen oder Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (auch unter Verwendung von Zwischenformen)
 - Flexibles Rechnen
 - Die Schülerinnen und Schüler nutzen aufgabenbezogen oder nach eigenen Präferenzen eine Strategie des Zahlenrechnens (z.B. stellenweise, schrittweise, Hilfsaufgabe)

2. Das Potenzial einer Aufgabe analysieren

Prozessbezogene Kompetenzen

- Problemlösen / kreativ sein:
 - Die Schülerinnen und Schüler probieren zunehmend systematisch und zielorientiert:
[Finden weitere Aufgaben mit gleichen Ergebnissen](#)
- Argumentieren:
 - Die Schülerinnen und Schüler erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten:
[Wenn der Unterschied ..., dann ..](#)
- Darstellen:
 - Die Schülerinnen und Schüler halten ihre Arbeitsergebnisse, Vorgehensweisen und Lernerfahrungen fest:
[Individuelle Schülerdokumente](#)
- Kommunizieren
 - Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten komplexere Aufgabenstellungen gemeinsam:
[Sortieren der Aufgabenkärtchen](#)

2. Das Potenzial einer Aufgabe analysieren

Problemlösen / kreativ sein:

Die Schülerinnen und Schüler probieren zunehmend systematisch und zielorientiert:

Finden weitere Aufgaben mit gleichen Ergebnissen (Beispiel Ergebnis 9)

$$\begin{array}{r}
 98 - 89 = 9 \\
 87 - 78 = 9 \\
 76 - 67 = 9 \\
 65 - 56 = 9 \\
 54 - 45 = 9 \\
 43 - 34 = 9 \\
 32 - 23 = 9 \\
 21 - 12 = 9 \\
 10 - 01 = 9
 \end{array}$$

Tipps: Rückwärts rechnen ¹⁰ zählen! 987654...!

Bei den Zehnern und Einern wird es immer einer weniger.

2. Das Potenzial einer Aufgabe analysieren

Argumentieren:

Die Schülerinnen und Schüler erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten:

Wenn der Unterschied ..., dann ..

Wenn der Unterschied zwischen den Ziffern 4 beträgt ist das Ergebnis immer 36.

2. Das Potenzial einer Aufgabe analysieren

Darstellen:

Die Schülerinnen und Schüler nutzen zum Präsentieren und Austauschen geeignete Darstellungsformen (Plakat)



- Gute Aufgaben
 - ... fordern und fördern inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen.
 -  ... sind herausfordernd auf unterschiedlichem Anspruchsniveau.
 - ... knüpfen an Vorwissen an und bauen das strukturierte Wissen kumulativ auf.

3. Anforderungsbereiche

- **AB I: Reproduzieren**
 - » Die Schülerinnen lösen die Aufgabe, indem sie ihr Grundwissen einbringen und Routinetätigkeiten des Mathematikunterrichts ausführen.
- **AB II: Zusammenhänge herstellen**
 - » Die Schülerinnen lösen die Aufgabe, indem sie Zusammenhänge erkennen und für die Aufgabenlösung nutzen.
- **AB III: Verallgemeinern und Reflektieren**
 - » Die Schülerinnen lösen die Aufgabe, indem sie komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern ausführen.

3. Anforderungsbereiche

Aktivität:

Auf dem Arbeitsblatt finden Sie unterschiedliche Teilaufgaben zu den „Umkehrzahlen“.

Ordnen Sie bitte die einzelnen Teilaufgaben den entsprechenden Anforderungsbereichen zu.

3. Anforderungsbereiche

Zuordnung zu den Anforderungsbereichen

Aufgabe 1

a) Rechne. Was fällt dir bei den Ergebnissen auf? (AB_)

$43 - 34$	$53 - 35$	$52 - 25$	$62 - 26$
$65 - 56$	$64 - 46$	$41 - 14$	$73 - 37$
$54 - 45$	$42 - 24$	$85 - 58$	$84 - 48$

b) Erkennst du, wie die Aufgaben gebildet werden? (AB_)
Bilde selbst noch weitere Päckchen nach diesem Muster.

Aufgabe 2

Rechne aus. (AB_)

$73 - 37$	$95 - 59$	$52 - 25$	$63 - 36$
$65 - 56$	$42 - 24$	$31 - 13$	$91 - 19$
$83 - 38$	$87 - 78$	$42 - 24$	$53 - 35$

Aufgabe 3

a) Rechne. Finde zu jedem Päckchen noch weitere Aufgaben. (AB_)

$43 - 34$	$53 - 35$
$65 - 56$	$64 - 46$
$54 - 45$	$42 - 24$

b) Zu Aufgaben mit Umkehrzahlen gibt es noch 7 andere Ergebnisse. (AB_)
Bilde noch weitere Aufgaben und versuche, möglichst alle Ergebnisse zu finden.
Schreibe auf, wie du vorgegangen bist.

3. Anforderungsbereiche

Zuordnung zu den Anforderungsbereichen

Aufgabe 4

Rechne.

(AB_)

$62 - 26$

$83 - 38$

$65 - 56$

$74 - 47$

$92 - 29$

$82 - 28$

$91 - 19$

$53 - 35$

$10 - 1$

Ordne die Ergebnisse nach der Größe. Was fällt dir auf?

Aufgabe 5

(AB_)

Forscherauftrag:

Wie viele Minusaufgaben mit Umkehrzahlen gibt es?

Aufgabe 6

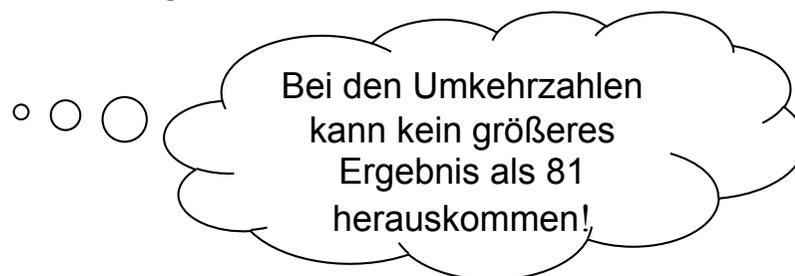
(AB_)

Bilde selbst Aufgaben mit Umkehrzahlen und rechne aus.

Aufgabe 7

(AB_)

Stimmt das? Überprüfe und begründe!



3. Anforderungsbereiche

Ich untersuche 2 unter sich
8.6.09

$$\begin{array}{r} 57 \\ 45 - 57 = 18 \checkmark \\ 42 - 24 = 18 \checkmark \\ 32 - 23 = 9 \\ 53 - 35 = 18 \\ 96 - 69 = 18 \\ 86 - 68 = 18 \\ 97 - 79 = 18 \\ 86 - 68 = 18 \\ 46 \\ 64 - 46 = 18 \\ 42 - 24 = 18 \\ 37 - 73 = 18 \end{array}$$

Yvonne

Unterschied Ziffern : 7

$$92 - 29 = 63$$

2 Ziffern

$$81 - 18 = 63$$

$$70 - 7 = 63$$

Unterschied Ziffern 8 :

$$91 - 19 = 72$$

$$80 - 8 = 72$$

Kathrin

Wenn man 2 nimmst oder andere
zahlen die hinter einander sind
ergibt es neun, wenn welche einen
auseinander sind kommt 18
rausum so weiter sie auseinander
sind kommen immer 3 raus

Moritz

$$55 - 55 = 00$$

$$66 - 66 = 99$$

$$75 - 57 = 78$$

$$85 - 58 = 27$$

$$95 - 59 = 36$$

$$94 - 49 = 45$$

$$93 - 39 = 54$$

$$92 - 29 = 63$$

$$91 - 19 = 72$$

$$90 - 09 = 81$$

Unterschied
zwischen
Ziffern

Ziffern	Ergebnis
0	0
1	9
2	18
3	27
4	36
5	45
6	54
7	63
8	72
9	81

Moritz

Qualitätsmerkmale für gute Aufgaben

- Gute Aufgaben
 - ... fordern und fördern inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen.
 - ... sind herausfordernd auf unterschiedlichem Anspruchsniveau.
 -  ... knüpfen an Vorwissen an und bauen das strukturierte Wissen kumulativ auf.

4. Aufgabenvariation

„Der wichtigste Schritt bei der Aufgabenvariation ist die Identifizierung **variabler Bestimmungselemente** der Aufgabe“.

(G. Walther)

4. Aufgabenvariation

- Veränderung der Rechenvorschrift
- Veränderung der Stellenanzahl
- Erweiterung des Aufgabenformats
- Veränderung des Zahlenmusters

4. Aufgabenvariation

1. Veränderung der Rechenvorschrift

Subtraktion									Addition																
9	18	27	36	45	54	63	72	81	187	176	165	154	143	132	121	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11
98-89	97-79	96-69	95-59	94-49	93-39	92-29	91-19	90-09	98+89	97+79	87+78	86+68	76+67	75+57	65+56	64+46	54+45	53+35	43+34	42+24	32+23	31+13	21+12	20+02	10+01
87-78	86-68	85-58	84-48	83-38	82-28	81-18	80-09				96+69	95+59	85+58	84+48	74+47	73+37	63+36	62+26	52+25	51+15	41+14	40+04	30+03		
76-67	75-57	74-47	73-37	72-27	71-17	70-07							94+49	93+39	83+38	82+28	72+27	71+17	61+16	60+06	50+05				
65-56	64-46	63-36	62-26	61-16	60-06										92+29	91+19	81+18	80+08	70+07						
54-45	53-35	52-25	51-15	50-05													90+09								
43-34	42-24	41-14	40-04																						
32-23	31-13	30-03																							
21-12	20-02																								
10-01																									

4. Aufgabenvariation

1. Veränderung der Rechenvorschrift

Subtraktion	Addition
Es gibt neun unterschiedliche Ergebnisse	Es gibt elf unterschiedliche Ergebnisse
Die Ergebnisse sind Vielfache von 9 9,18, ... , 72, 81	Die Ergebnisse sind Vielfache von 11 11,22, ... , 176, 187
Wenn-dann-Beziehung zwischen der Differenz der Zehner und Einer und dem Vielfachen	Wenn-dann-Beziehung zwischen der Summe der Zehner und Einer und dem Vielfachen

4. Aufgabenvariation

2. Veränderung der Stellenanzahl



Suche dir drei Ziffernkarten aus. Erstelle aus ihnen eine dreistellige Zahl und schreibe sie auf. Vertausche nun die Zahlen der Hunderter – und Einerstelle und schreibe auch diese Zahl auf.

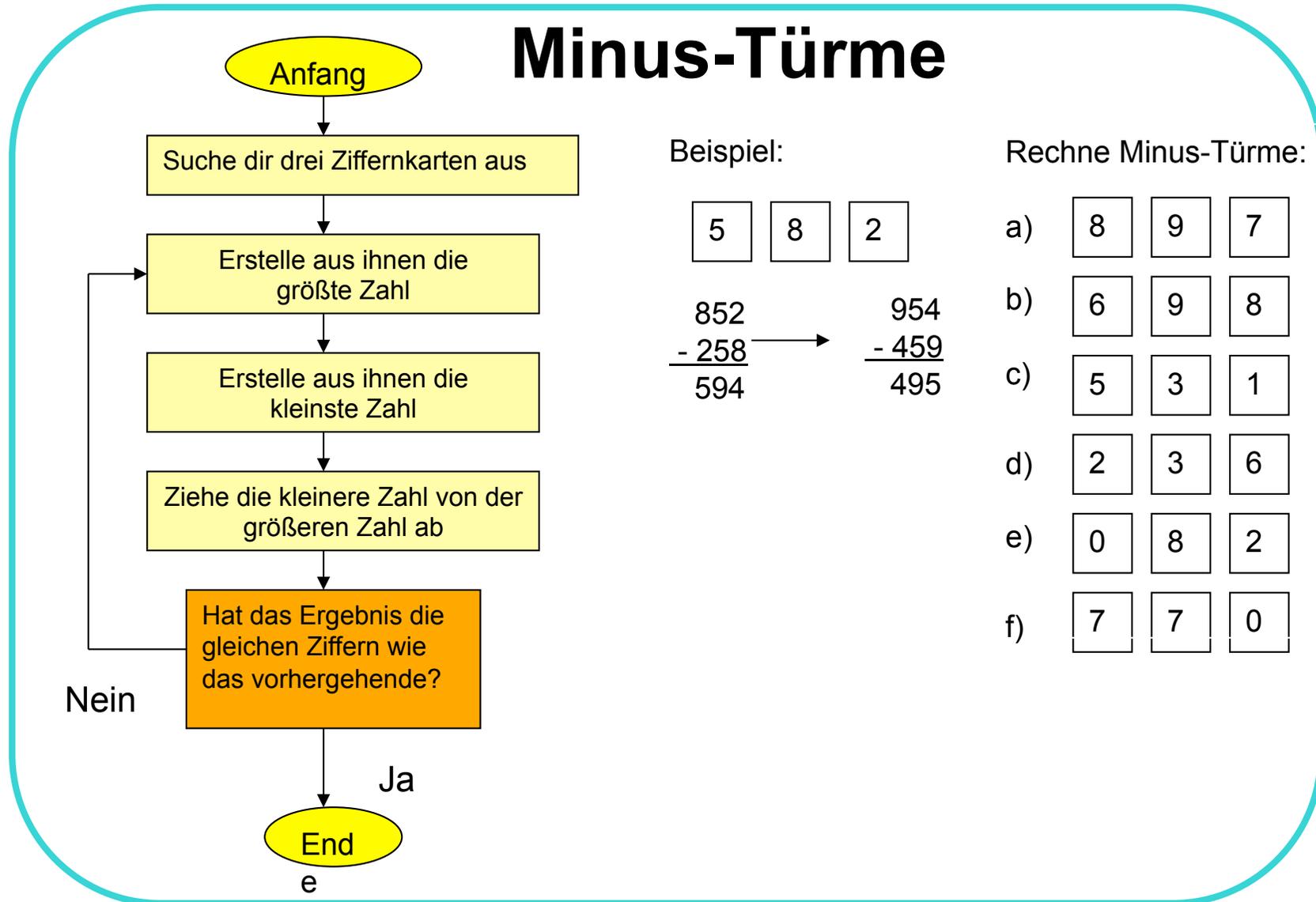
Im Beispiel ist die Differenz genau 198.
Wie lautet das Ergebnis bei deinen Zahlen?

Überlege dir verschiedene Beispiele.
Fällt dir etwas auf?

4	6	2
2	6	4

4. Aufgabenvariation

3. Erweiterung des Aufgabenformats



4. Aufgabenvariation

4. Veränderung des Zahlenmusters



Außergewöhnliche Zahlen: UHU – Zahlen

$$\begin{array}{r} 545 \\ - 454 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 646 \\ - 464 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 737 \\ - 373 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 858 \\ - 585 \\ \hline \end{array}$$

Die folgenden Aufgaben sind Minusaufgaben mit AAL – Zahlen.

Probiere aus.

$$\begin{array}{r} 441 \\ - 114 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 885 \\ - 558 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 996 \\ - 669 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 887 \\ - 778 \\ \hline \end{array}$$

Woran liegt es,
welches Ergebnis
man erhält?
Begründe.

Aufgabe im Schulbuch

Spiegelzahlen:

Überlege dir eine zweistellige Zahl, deren Einer und Zehner unterschiedlich sind. Bilde ihre Spiegelzahl. Nun ziehe von der größeren Zahl die kleinere Zahl ab. Rechne mehrere Beispiele:



Was fällt dir auf, wenn du die Ergebnisse betrachtest?

Minusaufgaben:

$$75 - 57 = \underline{\quad}$$

$$82 - 28 = \underline{\quad}$$

$$53 - 35 = \underline{\quad}$$

$$91 - \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

Forschen und Finden:

Suche dir in der Hundertertafel eine Zahl von 1 bis 99 aus. Finde ihre Umkehrzahl mit den gleichen Ziffern. Ziehe die kleinere von der größeren Zahl ab.

Gewählte Zahl: 35

Umkehrzahl: 53

$$53 - 35 = 18$$

Gewählte Zahl: 61

Umkehrzahl: 16

$$61 - 16 = 45$$

Gewählte Zahl: 90

Umkehrzahl: 09

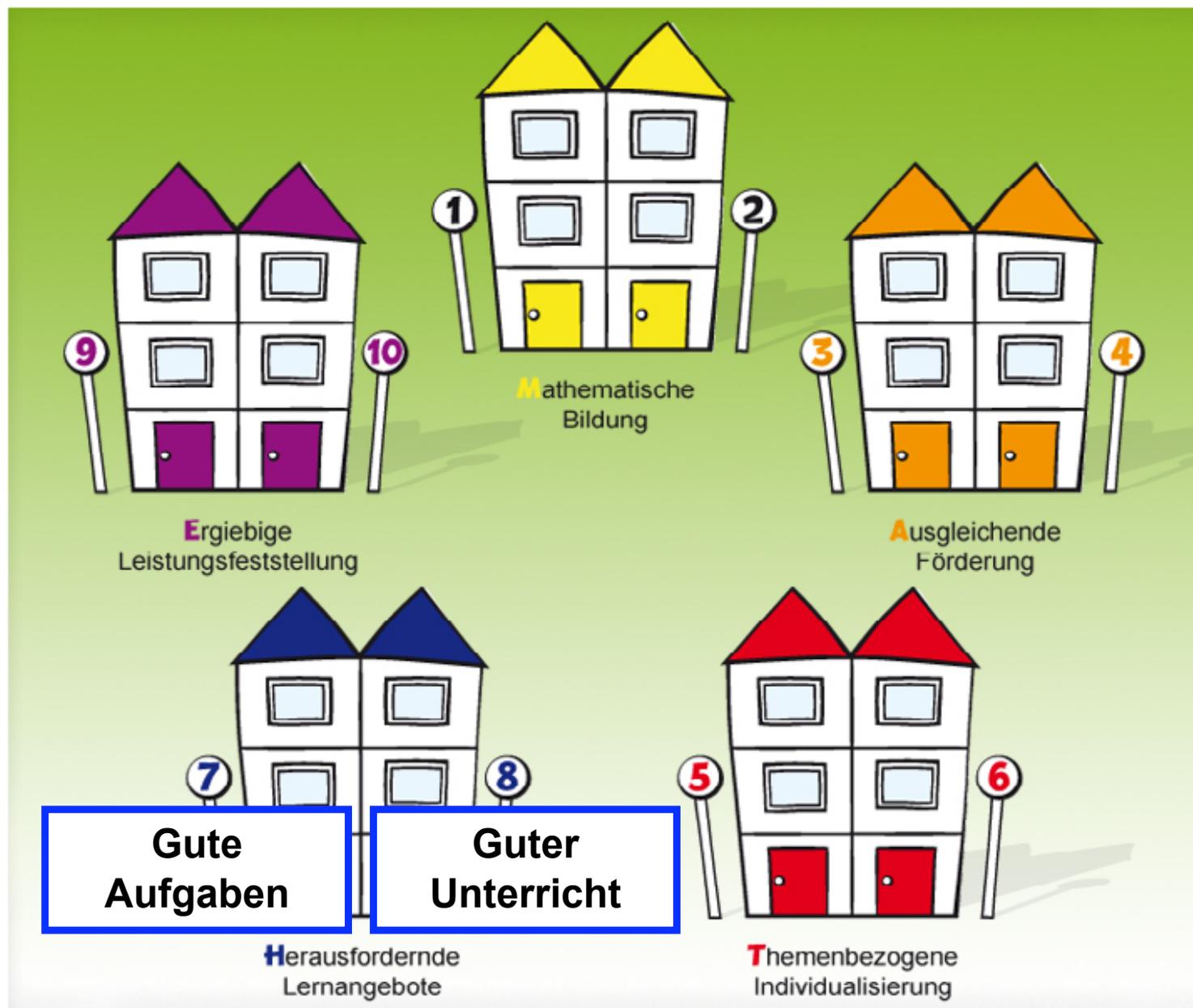
$$90 - 09 = 81$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Was sind mögliche Ergebnisse?

b) Bei welchen Zahlen gelangst du zum Ergebnis 9?

Gute Aufgaben - Guter Unterricht



Was ist eine gute Mathematikaufgabe?

Untereinanderrechnen
 Das Klare 1.1
 leichte Aufgaben w.z.
 & 1.1=2

Ich finde die Mathe
 aufgaben gut wenn
 die schwer sind

Wenn sie mittel-
 schwer sind.
 Dabei müssen
 aber auch Kriebel-
 aufgaben sein.

Wenn sie dem Rechenkönnen
 des Kindes entspricht

I M M E R
 ALLES SIMON

...good bye



**Vielen Dank
für Ihre
Aufmerksam-
keit !!**