technische universität dortmund

fakultät für mathematik

PD Dr. F. Guiaş

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2010/11

Blatt 1

14.10.2010

1. Seien $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Erraten Sie mithilfe der Interpretation von $E[X|X+Y]$ eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$E[X|X+Y] = F(Y) \quad P-f.s.$$

und beweisen Sie die Formel formal.

2. Sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ferner sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathcal{A}$ mit $P(B_n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass für die von $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B} = \{\cup_{n\in I} B_n : I \subset \mathbb{N} \text{ beliebig}\}.$$

(b) Bestimmen Sie $E[X|\mathcal{B}]$.

3. Sei Λ eine rechtsstetige, streng monoton wachsende Funktion auf $\mathbb{R}_+$ mit $\Lambda(0) = 0$. Ein $\mathbb{N}_0$-wertiger stochastischer Prozess $N = (N(t))_{t\geq 0}$ heißt *inhomogener Poisson-Prozess* mit *Intensitätsmaß* Λ, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Es gilt $N(0) = 0$ P-fast sicher.

(ii) Fast alle Pfade $t \mapsto N_t(\omega)$ sind rechtsstetig und monoton wachsend auf $\mathbb{R}_+$.

(iii) Der Prozess N besitzt unabhängige und stationäre Zuwächse mit Verteilung

$$P_{N(t)-N(s)} = Poi(\Lambda(t) - \Lambda(s)),$$

wobei $Poi(\Lambda(t)-\Lambda(s))$ die Poisson-Verteilung zum Parameter $\Lambda(t)-\Lambda(s)$ bezeichnet.

Zeigen Sie, dass der Prozess $\tilde{N} = (\tilde{N}_t)_{t\geq 0}$, definiert durch

$$\tilde{N}_t = N_t - \Lambda(t), \quad t \geq 0,$$

ein Martingal bezüglich der von N erzeugten kanonischen Filtration $\mathcal{F}^N$ ist.

4. Für $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ ist die *Lognormalverteilung* $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Sei X eine $\Lambda(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie:

(a) $E[X] = e^{\mu+\sigma^2/2}$ und $Var[X] = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$.

(b) $\ln(X)$ ist $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt (d.h. normalverteilt).

(c) Ist umgekehrt Y eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable, dann ist e^Y $\Lambda(\mu, \sigma^2)$-verteilt.

Abgabe am 21.10.2010 in der Vorlesung.