technische universität dortmund

fakultät für mathematik

PD Dr. F. Guiaş

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2010/11

Blatt 2

21.10.2010

1. Sei $\sigma \in \mathbb{R}$ und $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit der kanonischer Filtration $\mathcal{F}^W$. Zeigen Sie, dass die geometrische Brownsche Bewegung

$$\left(X_t := \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)\right)_{t\geq 0}$$

ein $\mathcal{F}^W$-Martingal ist.

2. Zeigen Sie, dass der Poisson-Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ mit Intensität $\lambda > 0$ ein homogener Markov-Prozess ist und geben Sie seine Übergangsintensitäten an.

3. Sei $N = (N_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass die Wartezeit

$$W := \inf\{t \geq 0 : N_t = 1\}$$

auf den ersten Sprung exponentialverteilt ist. Bestimmen Sie den Parameter dieser Verteilung.

4. (Cox-Ross-Rubinstein-Modell zur Modellierung von Aktienkursen) Es seien $p \in (0,1)$ und $0 < d < 1 < u$ Parameter. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, $(p\delta_u + (1-p)\delta_d)$-verteilter Zufallsvariablen. Dann modelliert der Prozess

$$\left(Y_n := \prod_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0},$$

die Preisentwicklung einer Aktie zu den Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}_0$ mit deterministeschem Startpreis 1.

(a) Zeigen Sie, dass der Preisprozess $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Markov-Prozess auf dem Zustandsraum

$$S := \{u^k \cdot d^l : k, l \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{R}$$

ist.

(b) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Verteilung von Y_n.

(c) Bestimmen Sie p in Abhängigkeit von u, d, so dass $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal (bzgl. der kanonischen Filtration) wird. (Benutzen Sie hierbei die Tatsache, dass für $I = \mathbb{N}_0$ ein adaptierter Prozess $(X_t)_{t \in I} \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ genau dann ein Martingal ist, wenn $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ P-f.s. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.)

Abgabe am 28.10.2010 in der Vorlesung.