

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2010/11

Blatt 4

4.11.2010

1. (Gemischte Versicherung) Wir betrachten die folgende Versicherung:

- Laufzeit: T Jahre
 - Der Versicherungsnehmer (VN) zahlt in $t = 0$ eine Einmalprämie der Höhe P .
 - Stirbt VN zum Zeitpunkt $t < T$, zahlt der Versicherer zum Zeitpunkt t die Todesfallsumme K an die Erben.
 - Stirbt VN nicht vorzeitig, zahlt der Versicherer zum Zeitpunkt T die Erlebensfallsumme L an VN.
 - Weitere Zahlungsverpflichtungen existieren nicht.
- (a) Stellen Sie das zugehörige reguläre Versicherungsmodell auf, indem Sie die Zahlungsfunktionen sowie den Zustandsraum und die Übergangswahrscheinlichkeiten für den zugrundeliegenden Markov-Prozess angeben. Geben Sie auch die entsprechenden Kolmogorovschen DGLs an.
- (b) Stellen Sie für das Deckungskapital in Abhängigkeit der jeweiligen Zustände die zugehörigen Thiele'schen DGLs auf, und lösen Sie diese mittels Variation der Konstanten.
- (c) Berechnen Sie die Einmalprämie P .

2. (Versicherung auf 2 Leben) Wir betrachten folgende Versicherung auf zwei Leben: Das Versicherungsszenario sei durch einen regulären Markov-Prozess $(X_t)_{t \in [0, T]}$ mit Werten in

$$S = \{(*, *), (*, \dagger), (\dagger, *), (\dagger, \dagger)\}$$

modelliert. Dabei stehe $X_t = (\dagger, *)$ beispielsweise für das Ereignis, dass der Versicherungsnehmer (VN) tot ist, seine Ehefrau (E) aber noch lebt. Da eine Reaktivierung ausgeschlossen ist, sind für die Übergangintensitäten die folgenden Annahmen sinnvoll:

$$\mu_{(\dagger, *), (*, *)} = \mu_{(*, \dagger), (*, *)} = \mu_{(\dagger, \dagger), (*, *)} = \mu_{(\dagger, *), (*, \dagger)} = \mu_{(*, \dagger), (\dagger, *)} = \mu_{(\dagger, \dagger), (\dagger, *)} = \mu_{(\dagger, \dagger), (*, \dagger)} = 0.$$

Desweiteren unterstellen wir

$$\mu_{(*,*)}^{(t,t)} = 0.$$

Hiermit schließen wir gleichzeitiges Sterben aus.

Der Vertrag sei wie folgt abgeschlossen:

- Falls VN lebt, zahlt er bis zum Zeitpunkt T eine kontinuierliche Prämie der Intensität c .
 - Falls E lebt und VN vor T stirbt, zahlt die Versicherung ein Kapital der Höhe b an E.
 - Weitere Zahlungsverpflichtungen existieren nicht.
- (a) Stellen Sie für das Deckungskapital in Abhängigkeit der jeweiligen Zustände die zugehörigen Thiele'schen DGLs auf, und lösen Sie diese mittels Variation der Konstanten.
- (b) Leiten Sie die Formel für die Prämie c her, wenn bei Vertragsabschluss VN und E leben.

Abgabe am 11.11.2010 in der Vorlesung.