technische universität dortmund

fakultät für mathematik

PD Dr. F. Guiaş

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2010/11

Blatt 5

11.11.2010

1. Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger reellwertiger stochastischer Prozess. Dann ist die *quadratische Variation* $(\langle X\rangle_t)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$\langle X\rangle_t := \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 \quad \text{(in Wahrscheinlichkeit)},$$

wobei $\{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = t\}$ eine Zerlegung von $[0,t]$ mit Feinheit $\sup_{i\leq n}(t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0$ für $n\to\infty$ darstellt.
Zeigen Sie:

(a) Für eine eindimensionale Brownsche Bewegung $W = (W_t)_{t\geq 0}$ gilt $\langle W\rangle_t = t$.
Anleitung: Zeigen Sie

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2 - t\right)^2\right] = 2\sum_{i=1}^{n}(t_i^n - t_{i-1}^n)^2$$

und folgern Sie, dass $\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2 \to t$ in L^2 für $n\to\infty$.

(b) Ist $X : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion von beschränkter Variation, d.h. $X \in BV([0,t])$ für alle $t \geq 0$, so folgt $\langle X\rangle_t = 0$.

Was bedeutet dies für die totale Variation der Pfade einer Bronschen Bewegung?

2. Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Leiten Sie unmittelbar aus der Definition des Itô-Integrals die folgende Formel her:

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Abgabe am 18.11.2010 in der Vorlesung.