technische universität dortmund

fakultät für mathematik

PD Dr. F. Guiaş

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2010/11

Blatt 6

18.11.2010

1. Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und α, μ, σ Konstanten. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Itô-Prozess mit $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$ und definiere $Y = X^\alpha$. Welche stochastische Differentialgleichung löst Y?

2. Der *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* ist die Lösung $(X_t)_{t\geq 0}$ der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t,$$

wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und μ, σ Konstanten seien.

(a) Lösen Sie die Gleichung. (Hinweis: Wenden Sie die Itô-Formel auf $f(t, x) = e^{-\mu t}x$ an.)

(b) Berechnen Sie $E[X_t]$ und $Var[X_t]$.

3. Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung und seien μ, σ Konstanten. Bestimmen Sie die Generatoren der folgenden Itô-Diffusionen:

(a) $dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t$

(b) $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$

(c) $dY_t = \begin{bmatrix} dt \\ dX_t \end{bmatrix}$ mit X_t wie in (a)

(d) $\begin{bmatrix} dX_t^{(1)} \\ dX_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_t^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_t^{(1)} \\ dW_t^{(2)} \end{bmatrix}$, wobei $(W_t^{(i)})_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, unabhängige eindimensionale Brownschen Bewegungen seien

4. Finden Sie zu den folgenden Generatoren die entsprechenden Itô-Diffusionen (d.h. geben Sie ihre stochastischen Differentialgleichungen an):

(a) $Af(x) = f'(x) + f''(x) \quad (f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}))$

(b) $Af(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t} + \mu x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^2))$, wobei μ, σ Konstanten seien

(c) $Af(x_1,x_2) = \mu_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 x_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$
$(f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^2))$, wobei μ_i, σ_i $(i = 1, 2)$ und ρ Konstanten seien

---

Abgabe am 25.11.2010 in der Vorlesung.