Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2010/11

Blatt 7

25.11.2010

1. Für eine eindimensionale Brownsche Bewegung $W = (W(t))_{t \geq 0}$ und $x \in \mathbb{R}$ betrachte

$$X(t) = x + W(t), \quad t \geq 0,$$

und die Erstaustrittszeit τ aus dem Intervall (a, b) mit $a \leq x \leq b$,

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin (a, b)\}.$$

Ziel soll es sein, $p_x := P(X(\tau) = b | X(0) = x)$ und $E_x[\tau]$ zu berechnen.

(a) Zeigen Sie, dass $\tau < \infty$ f.s. gilt, und stellen Sie für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von p_x eine Formel für $E_x[f(X(\tau))]$ auf.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Dynkinschen Formel eine Funktion $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$E_x[f_0(X(\tau))] = f_0(x).$$

Benutzen Sie die Formel aus (a), um damit p_x zu berechnen.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Dynkinschen Formel eine Funktion $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$E_x[f_1(X(\tau))] = f_1(x) + E_x[\tau].$$

Benutzen Sie die Formel aus (a) und die Lösung für p_x aus (b), um damit $E_x[\tau]$ zu berechnen.

(d) Wie muss $x \in [a, b]$ gewählt werden, um die erwartete Erstaustrittszeit zu maximieren?

2. Skizzieren Sie die Auszahlungsprofile (Payoffs) für die folgenden Optionen, die sich als Linearkombinationen aus dem Basiswert und europäischen Calls und Puts zusammensetzen:

(a) *1:2 Short Call Hedge*: 1 x Basiswert mit Startkurs S_0 , 2 x short call S_0

- (b) *Straddle* mit Ausübungspreis (Strike) K : 1 x long put K , 1 x long call K
- (c) *Strangle* mit Strike $K_1 < K_2$: 1 x long put K_1 , 1 x long call K_2
- (d) *Bull-Spread* mit Strikes $K_1 < K_2$: 1 x long call K_1 , 1 x short call K_2
- (e) *Bear-Spread* mit Strikes $K_1 < K_2$: 1 x short put K_1 , 1 x long put K_2
- (f) *Butterfly-Spread* mit Strikes $K_1 < K_2$ und $K = 1/2(K_1 + K_2)$: 1 x long K_1 , 1 x long call K_2 , 2 x long call K

Hierbei steht „long“ für den Kauf einer Option und „short“ für den Verkauf. Die Zahl in der Bezeichnung der Option gibt den Strike an. Der Verfallstag der verschiedenen Optionen sei identisch.

3. Ein Unternehmen ist zum Zeitpunkt $t = 0$ durch Eigenkapital der Höhe E und Fremdkapital der Höhe D , fällig in Zeitpunkt $t = T$, finanziert. Das Unternehmen führt mehrere Investitionsprojekte durch. Die Kosten der Investitionen belaufen sich auf das gesamte Kapital. Die Investitionen liefern zum Zeitpunkt $t = T$ einen riskanten Einzahlungsüberschuss in Höhe von V . Falls V geringer als D ist, so wird das Unternehmen liquidiert, die Eigenkapitalgeber erhalten nichts, während die Gläubiger den realisierten Einzahlungsüberschuss erhalten. Fällt V hingegen höher aus als D , so erhalten die Gläubiger den Betrag D und die Eigenkapitalgeber den Rest.

- (a) Bestimmen Sie jeweils die Auszahlungsstruktur für die Kapitalgeber. Mit welchen Optionsverträgen sind die Auszahlungsstrukturen vergleichbar?
- (b) Der Unternehmenswert V_0 ist definiert als die Summe von Eigen- und Fremdkapital, d.h. als die Summe der Werte der entsprechenden Ansprüche zum Zeitpunkt $t = T$, bewertet in $t = 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Put-Call-Parität, dass V_0 unabhängig von der Höhe von D ist. (Dieses Resultat ist auch als Modigliani-Miller-Theorem bekannt.)

4. Zeigen Sie, dass im Black-Scholes Finanzmarktmodell für die Preise C_A , P_A eines amerikanischen Calls bzw. Puts gilt:

- (a) $C_A(t, S) = C_E(t, S)$,
- (b) $Ke^{-r(T-t)} \leq S + P_A(t, S) - C_A(t, S) \leq K$,
- (c) $(Ke^{-r(T-t)} - S)^+ \leq P_A(t, S) \leq K$,

wobei C_E den Wert einer europäischen Call-Option bedeute.

Abgabe am 2.12.2010 in der Vorlesung.