technische universität dortmund

fakultät für mathematik

PD Dr. F. Guiaş

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2010/11

Blatt 8

2.12.2010

1. Für einen Aktienkurs $S(t)$ gelte

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0).$$

Eine Option auf diese Aktie habe den Preis $V(t, S)$ mit dem Payoff $V(T, S)$.

(a) Zeigen Sie, dass das *Vega* (auch *Kappa* genannt), definiert durch $\kappa = \partial V/\partial\sigma$, der Differentialgleichung

$$-r\kappa + \frac{\partial \kappa}{\partial t} + rS\frac{\partial \kappa}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial S^2} + \sigma S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$$

mit Endbedingung $\kappa(S, T) = 0$ genügt.

(b) Angenommen, der Käufer einer anderen Option mit Preis $U(t, S)$ erhalte bzw. zahle kontinuierlich Geld mit einer Intensität $c(t, S)$. Zeigen Sie durch geeignete Modifikation in der Herleitung der Black-Scholes-Gleichung, dass U die folgende Differentialgleichung löst:

$$-rU + \frac{\partial U}{\partial t} + rS\frac{\partial U}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + c = 0$$

(c) Es gelte $U(T, S) = 0$ und $c(t, S) > 0$ für alle $0 \leq t < T, S > 0$. Begründen Sie, dass dann $U(t, S) > 0$ für alle $0 \leq t < T, S > 0$ gilt.

(d) Folgern Sie, dass jede Option mit positivem *Gamma* $\Gamma = \partial^2 V/\partial S^2$ stets ein positives Vega hat.

2. Geben Sie die Auszahlungsfunktionen für die folgenden Optionen an:

(a) *Compound-Option:* Mit dem Kauf einer Compound-Option erwirbt man das Recht, zum Verfallstag T eine andere Option mit Verfallstag $T' > T$ zum Ausübungspreis K zu kaufen bzw. zu verkaufen.

(b) *Chooser-Option:* Bei dieser Option kann man zum Verfallstag T wählen, ob man einen Call oder einen Put mit Verfallstag $T' > T$ erhalten möchte.

(c) *Barrier-Option:* Dies ist eine Call- oder Put-Option, die wertlos (bzw. erst dann wertvoll) wird, wenn der Kurs des Basiswerts eine vorher festgelegte Schranke vor dem Verfallstag T über- bzw. unterschreitet.

Es genügt jeweils, zu den obigen Optionsklassen ein konkretes Beispiel zu wählen. Worin unterscheiden sich die Compound- und Chooser-Option von der Barrier-Option?

3. (Binäre Optionen) Die Auszahlungsfunktionen eines *binären* Calls mit Strike $K > 0$ lauten:

- *Cash-or-nothing Call* (mit Auszahlungsbetrag $B > 0$):

$$g_1(S) = \begin{cases} B & , \quad S > K, \\ 0 & , \quad S \leq K. \end{cases}$$

- *Asset-or-nothing Call*:

$$g_2(S) = \begin{cases} S & , \quad S > K, \\ 0 & , \quad S \leq K. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie Black-Scholes-Formeln für die Preise C_1 und C_2 der binären Call-Optionen. (Tipp: Benutzen Sie die Feynman-Kac-Formel aus Satz 7.9, um damit die Black-Scholes-Gleichung mit den Endbedingungen g_1 bzw. g_2 zu lösen.)

(b) Stellen Sie die Auszahlungsfunktionen für die entsprechenden Put-Optionen auf und geben Sie die Put-Call-Paritäten an, d.h. schreiben Sie die Preise P_1 und P_2 der Put-Optionen in Abhängigkeit der Call-Preise C_1 und C_2.

Abgabe am 9.12.2010 in der Vorlesung.